

## Związek między mocą bierną a wrażliwością napięcia bezstratnego źródła w dziedzinie częstotliwości

**Streszczenie.** A artykule przedstawiono związek między mocą bierną a stabilnością napięcia zasilania w przypadku występowania okresowych niesinusoidalnych sygnałów napięcia i prądu. Wyprowadzono nieznaną dotąd prąd optymalny dla bezstratnego ale niesztynnego źródła energii elektrycznej na podstawie kryterium wrażliwości napięcia względem zmian prądu źródła. Wyniki odniesiono do tzw. „prądu Fryze”.

**Abstract.** In the article the relationship between the reactive power and stability of voltage source were presented. Previously unknown optimal current for the lossless non-stiff voltage source were developed based on voltage sensitivity due to the current change criterion. The results were referred to the so-called “Fryze current”. (The relationship between a reactive power and voltage source sensitivity in the frequency domain)

**Słowa kluczowe:** funkcjonal jakości, wrażliwość napięcia, konduktancja optymalna, prąd optymalny.

**Keywords:** functional of quality, voltage sensitivity, optimal conductance, optimal current.

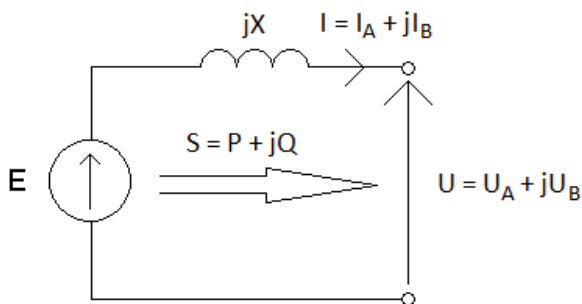
doi:10.12915/pe.2014.11.55

### Wprowadzenie

Dobrze znany jest związek między stabilnością napięcia zasilania, a mocą bierną w przypadku występowania sygnałów sinusoidalnych prądu i napięcia. Jednak zupełnie nic nie wiadomo o tej zależności dla przebiegów niesinusoidalnych – okresowych, zwłaszcza wtedy, gdy znacznie odbiegają one od sinusoidy. Zadaniem niniejszego artykułu jest danie odpowiedzi na to pytanie w dziedzinie częstotliwości.

Moc bierna jest uważana za ten wskaźnik energetyczny, który ma zasadniczy wpływ na stabilność napięcia układu zasilającego (źródła energii elektrycznej, generatora, systemu elektroenergetycznego). W przypadku sinusoidalnych przebiegów prądów i napięć współzależność między mocą bierną, a spadkiem napięcia zasilania jest na tyle prosta, że predysponuje ona moc bierną do roli ważnego pojęcia teorii mocy.

Na rysunku 1 został przedstawiony schemat zastępczy bezstratnego źródła zasilania z sinusoidalnymi przebiegami napięcia i prądu.



Rys.1. Schemat zastępczy bezstratnego źródła zasilania z sinusoidalnymi przebiegami sygnałów napięcia i prądu

Moc zespoloną tego źródła opisuje wyrażenie:

$$S = (U_A + jU_B)(I_A - jI_B) = U_A I_A + U_B I_B + j(U_B I_A - U_A I_B)$$

gdzie:

$$(1) \quad P = \operatorname{Re}\{S\} = U_A I_A + U_B I_B,$$

$$(2) \quad Q = \operatorname{Im}\{S\} = U_B I_A - U_A I_B.$$

Dla biernej impedancji wewnętrznej przyjmuje się  $U_B = 0$ ,  $I_B \rightarrow -I_B$ , wówczas zależności (1), (2) wynoszą odpowiednio:

$$P = U_A I_A = U I_A, \quad Q = U I_B,$$

stąd:

$$I_A = \frac{P}{U}, \quad I_B = \frac{Q}{U}.$$

Zatem spadek napięcia w źródle bezstratnym wynosi:

$$\Delta U = jX(I_A - jI_B) = X(I_B + jI_A) = \frac{X}{U}(Q + jP).$$

Tak więc przy zadanych  $X$ ,  $U$ ,  $P$ , gdzie  $P$  jest zadany zapotrzebowaniem na moc, przyjmuje się warunek optymalizacji:

$$(3) \quad |\Delta U| \rightarrow \operatorname{MIN} \Leftrightarrow Q \rightarrow 0.$$

Oznacza to, że zminimalizowanie spadku napięcia źródła przy zadanej pobieranej mocy czynnej wymaga sprowadzenia do zera mocy biernej pobieranej ze źródła, tj.  $Q \rightarrow 0$ .

Jednak do kwestii minimalizacji spadku napięcia można podejść inaczej, to znaczy sformułować zagadnienie minimum z ograniczeniem równościowym [6]:

$$(4) \quad \Delta U^* \Delta U \rightarrow \operatorname{MIN},$$

$$(5) \quad \operatorname{Re}\{EI^*\} - RI^* I = P,$$

$$(6) \quad \Delta U = ZI,$$

gdzie:

$R = \frac{1}{2}(Z + Z^*)$  - rezystancja (stratność) wewnętrzna źródła zasilania.

Sformułowanie (4), (5), (6) jest ogólniejsze, gdyż zachodzi dla znacznie szerszej klasy sygnałów, niż tylko sinusoidalne. W przypadku źródła wieloharmonicznego zagadnienia te przyjmują postać:

$$\sum_{n \geq 1} \Delta U_n (\Delta U_n)^* \rightarrow \operatorname{MIN},$$

$$\sum_{n \geq 1} (\operatorname{Re}\{E_n I_n^*\} - R_n I_n I_n^*) = P,$$

$$\Delta U_n = Z_n I_n,$$

gdzie ciągi  $\{E_n\}$ ,  $\{I_n\}$ ,  $\{Z_n\}$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$  są odpowiednio zespolonymi rozkładami harmonicznymi sygnałów.

Dla źródła wewnętrznego bezstratnego warunki te ulegają dalszemu uproszczeniu:

$$R_n = \frac{1}{2}(Z_n + Z_n^*) = 0,$$

wówczas:

$$\sum_{n \geq 1} X_n I_n^* I_n \rightarrow \text{MIN},$$

$$\sum_{n \geq 1} \operatorname{Re}\{I_n^* E_n\} - P = 0,$$

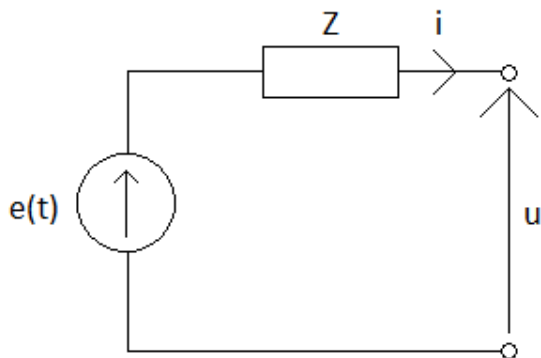
gdzie:

$$X_n = \frac{1}{2j}(Z_n - Z_n^*).$$

### Minimalizacja $|\Delta U| \rightarrow \text{MIN}$ dla sygnałów okresowych, niesinusoidalnych

Rozpatrując sygnały okresowe, niesinusoidalne napięcia i prądu można określić bezpośredni związek pomiędzy mocą bierną, a stabilnością napięcia zasilania, przy czym zagadnienie minimalizacji spadku napięcia źródła jest nadal aktualne [7].

Na rysunku 2 przedstawiono schemat rzeczywistego źródła zasilania, dla którego sygnały  $e(t)$ ,  $i(t)$ ,  $u(t)$  oraz operator  $Z$  scharakteryzowane są ciągami zespolonych harmonicznymi składowych  $\{E_n\}$ ,  $\{I_n\}$ ,  $\{U_n\}$  oraz  $\{Z_n\}$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$



Rys. 2. Schemat rzeczywistego źródła zasilania

Dla źródła bezstratnego sformułowane będą dwa zagadnienia optymalizacyjne: zagadnienie minimum normy prądu i zagadnienie minimalnych zmian napięcia źródła. Obydwa przy zadanym bilansie źródła:

$$(7) \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n I_n^* \rightarrow \text{MIN} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\{I_n^* E_n\} - P = 0 \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^2 I_n^* I_n \rightarrow \text{MIN} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\{I_n^* E_n\} - P = 0 \end{cases}$$

Funkcjonał Lagrange'a realizujący zagadnienie minimum ma postać:

$$F\{I_n\}_{n=1}^{\infty} = \sum_n X_n^2 I_n^* I_n - \lambda \left( \sum_n \operatorname{Re}\{I_n^* E_n\} - P \right) \rightarrow \text{MIN}.$$

Poszukiwane jest minimum, więc wyznaczono wariację względem prądu  $I_n$ :

$$\delta F = F\{I_n + \delta I_n\} - F\{I_n\} = \sum_n X_n^2 (I_n^* \delta I_n + \delta I_n^* I_n) - \lambda \sum_n \operatorname{Re}\{\delta I_n^* E_n\} + \sum_n X_n^2 \delta I_n^* \delta I_n,$$

w której dla każdego przyrostu  $\delta I_n$  ma zachodzić nierówność:

$$\sum_n \operatorname{Re}\{(2X_n^2 I_n - \lambda E_n) \delta I_n^*\} + \sum_n X_n^2 \delta I_n^* \delta I_n > 0.$$

Tak więc warunek konieczny i dostateczny minimum funkcjonału przyjmuje postać:

$$2X_n^2 I_n = \lambda E_n \rightarrow I_n = \frac{0,5\lambda}{X_n^2} E_n,$$

skąd:

$$0,5\lambda = \frac{P}{\sum_n \left( \frac{|E_n|}{X_n} \right)^2},$$

z tego warunku wyznaczono prąd zwany dalej optymalnym  $I_n^{opt}$ :

$$I_n^{opt} = \frac{P}{X_n^2 \sum_m \left( \frac{|E_m|}{X_m} \right)^2} E_n.$$

Rozwiązaniem zadania optymalizacyjnego (7) jest

$$I_n^{ef} = \frac{P}{\sum_m |E_m|^2} E_n = \frac{P}{\|e\|^2} E_n = G^{ef} E_n,$$

natomiast zadania (8):

$$I_n^{opt} = \frac{P}{X_n^2 \sum_m \left( \frac{|E_m|}{X_m} \right)^2} E_n = G_n^{opt} E_n.$$

W obydwu przypadkach występują prądy rozwiązujące  $\{I_n^{ef}\}$  – tzw. prąd efektywny (Fryze) [3] i  $\{I_n^{opt}\}$  – prąd optymalny (nowe rozwiązanie), które powstają przez działanie operatora konduktancji odpowiednio  $G^{ef}$  i  $\{G_n^{opt}\}$  na wspólny sygnał SEM  $\{E_n\}$ . Operatory te różnią się zasadniczo,  $G^{ef}$  jest wszechprzepustowy (niezależny od częstotliwości), natomiast  $\{G_n^{opt}\}$  jest dyspersyjny (zależny od częstotliwości).

Jeżeli w szczególności reaktancja wewnętrzna jest czystą indukcyjnością  $X_n = n\omega L$  to:

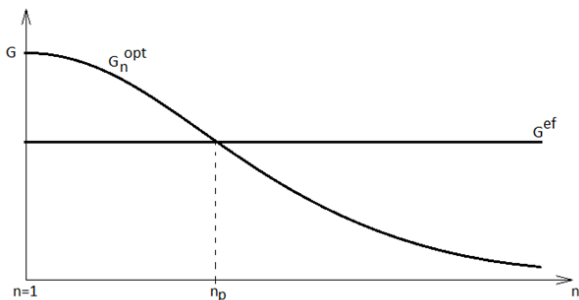
$$G_n^{opt} = \frac{P}{n^2 \sum_m \left( \frac{|E_m|}{m} \right)^2} = \frac{G}{n^2}.$$

Porównanie konduktancji  $G_n^{opt}$  i  $G^{ef}$  zachodzi na podstawie nierówności:

$$\frac{P}{\sum_{m \geq 1} \left( \frac{|E_m|}{m} \right)^2} > \frac{P}{\sum_{m \geq 1} |E_m|^2},$$

z czego wynika, że  $G > G^{ef}$ .

Na rysunku 3 przedstawiono przykładowe przebiegi konduktancji w funkcji wielokrotności podstawowej harmonicznej.



Rys. 3. Przykładowe przebiegi konduktancji

Funkcja częstotliwościowa  $G_n^{opt}$  przecina się z wartością  $G^{ef}$  w punkcie spełniającym równanie:

$$G_n^{opt} = G^{ef},$$

albo

$$n^2 \sum_m \left( \frac{|E_m|}{m} \right)^2 = \sum_n |E_n|^2.$$

Wprowadzając współczynnik udziału n-tej harmonicznej względem pierwszej:

$$U_m = \frac{|E_m|}{|E_1|}$$

otrzymuje się rozwiązanie równania jako tzw. częstotliwość odcięcia:

$$(9) \quad n_p = \sqrt{\frac{\sum_{n \geq 1} (U_n)^2}{\sum_{m \geq 1} \left( \frac{U_m}{m} \right)^2}} = \sqrt{\frac{G}{G^{ef}}} > 1.$$

Zakładając  $\{U_n\}$  w postaci „p-bramki”

$$U_n = \begin{cases} 1 & n = 1, 2, \dots, p \\ 0 & n > p \end{cases}$$

otrzymuje się:

$$n_p = \sqrt{\frac{p}{\sum_{n=1}^p \frac{1}{n^2}}} \geq \sqrt{\frac{p}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}}.$$

Uwzględniając, że wartość szeregu nieskończonego wynosi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

otrzymuje się:

$$n_p \geq \frac{\sqrt{6p}}{\pi} \approx 0,78\sqrt{p},$$

czyli:

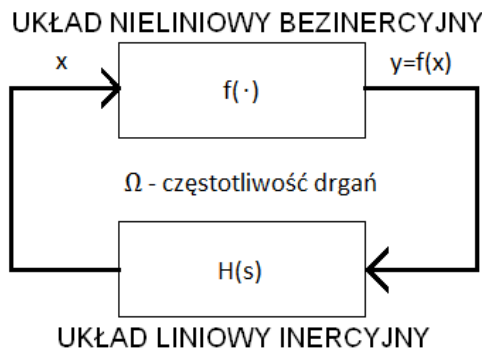
$$\frac{G}{G^{ef}} = \frac{6p}{\pi^2} \approx 0,61p.$$

Obliczono przykładowe próbki  $n_p$  dla kilku wartości  $p$ :

$$\begin{array}{l} p = 5; \quad 10; \quad 100; \quad 1000; \quad 10000 \\ n_p = 1; \quad 2; \quad 7; \quad 24; \quad 78 \end{array}$$

### Związek z tzw. zasadą Groszkowskiego

Istnieje podobieństwo między wyprowadzonym w poprzednim rozdziale wzorem na częstotliwość odcięcia (9), a zasadą Groszkowskiego [2] dotyczącą układu ze sprzężeniem zwrotnym, złożonego z dwóch podukładów; nieliniowego, bezinercyjnego i liniowego czasowo niezmienniczego (rys.4).



Rys. 4. Model generatora drgań

Przyjmując przebiegi sygnałów okresowych  $x, y$  po obu stronach układu w postaci szeregów Fouriera:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m e^{jm\Omega t},$$

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m e^{jm\Omega t},$$

gdzie:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T},$$

oraz uwzględniając warunek bezinercyjności układu nieliniowego:

$$\oint x dy = \int_0^T x(t) y^{(1)}(t) dt = 0,$$

otrzymuje się równanie:

$$\sum_m \sum_n jn\Omega X_m Y_n \int_0^T e^{j(n+m)\Omega t} dt = 0.$$

Jest ono spełnione, gdy zachodzi:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} jn\Omega X_n Y_n^* = 0,$$

skąd:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(X_n Y_n^* - X_n^* Y_n) = 0,$$

zatem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{Im}\{X_n Y_n^*\} = 0.$$

Równość ta jest pierwotnym sformulowaniem zasady Groszkowskiego, w którym występują oba sygnały  $x$ ,  $y$ . Jednak układ liniowy wprowadza następujące związki między amplitudami  $\{X_n\}$ ,  $\{Y_n\}$ :

$$X_n = H(jn\Omega)Y_n,$$

$$Y_n = H^{-1}(jn\Omega)X_n,$$

skąd otrzymuje się wtórne sformułowanie zasady, w którym występuje już tylko jeden z sygnałów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{Im}\{H(jn\Omega)\} |Y_n|^2 = 0,$$

albo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{Im}\{H^{-1}(jn\Omega)\} |X_n|^2 = 0.$$

Używając jako przykładu układu rezonansowego:

$$H(s) = \frac{1}{1 + q\left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s}\right)} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{1}{1 + jq\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)},$$

dla którego urojona część odwrotności  $H(j\omega)$  wynosi:

$$\operatorname{Im}\{H^{-1}(j\omega)\} = q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right),$$

oraz wprowadzając współczynnik udziału amplitudy  $n$ -tej harmonicznej sygnału względem pierwszej harmonicznej:

$$U_n = \frac{|X_n|}{|X_1|},$$

Otrzymuje się:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{n\Omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{n\Omega} \right) U_n^2 = 0.$$

Rozwiązując otrzymane równanie względem  $\omega_0/\Omega$  otrzymuje się:

$$\frac{\omega_0}{\Omega} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{\infty} (nU_n)^2}{\sum_{n=1}^{\infty} (U_n)^2}}.$$

Otrzymane wyrażenie jest podobne do (9), a staje się nim gdy podstawić  $nU_n = V_n$ :

$$\frac{\omega_0}{\Omega} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{\infty} (V_n)^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{V_n}{n}\right)^2}} > 1.$$

## Podsumowanie

W opracowaniu wprowadzono nowy, nieznaną dotąd prąd optymalny rzeczywistego źródła energii elektrycznej. Prąd ten jest w pewnym sensie alternatywą dla znanego i powszechnie używanego tzw. „prądu Fryze”, który otrzymywany jest z warunku minimum normy (wartości skutecznej) prądu dla sztywnego źródła napięcia. Nowy prąd optymalny wyprowadza się z innego kryterium optymalizacyjnego. Jest nim minimum wrażliwości napięcia zaciskowego na zmiany sygnału prądu źródła. Ten prąd optymalny jest wynikiem działania operatora konduktancji optymalnej na sygnał napięcia źródłowego. Zagadnienie to sformułowane jest w dziedzinie częstotliwości, w której operator konduktancji optymalnej jest dyspersyjny, tzn. zależy od częstotliwości. W przeciwieństwie do tego operator konduktancji optymalnej dla prądu Fryze nie zależy od częstotliwości. Zwrócono również uwagę na związek nowo otrzymanego operatora konduktancji optymalnej z „konduktancją Fryze”. W rozdziale dotyczącym zasady Groszkowskiego pokazano analityczne podobieństwo pozornie różniących się zjawisk fizycznych.

## LITERATURA

- [1] Kudrewicz J.: Nieliniowe obwody elektryczne, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996
- [2] Kudrewicz J.: Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1970
- [3] Pasko M.: Opis właściwości energetycznych, energetyczno jakościowych obwodów elektrycznych przebiegami niesinusoidalnymi okresowymi. *Przegląd Elektrotechniczny*, 78 (2002), nr 5s, 23-40
- [4] Pasko M., Maciążek M.: Zjawiska energetyczne w obwodach elektrycznych i ich interpretacja, *Wiadomości Elektrotechniczne*, 2005, nr 4, 18-25
- [5] Siwczyński M., Jaraczewski M.: Electric circuit analysis by means of optimization criteria, part one – the simple circuits, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, 52 (2004), n.4, 359-367
- [6] Siwczyński M.: O współzależności między mocą bierną a stabilnością napięcia zasilania w przypadku okresowych niesinusoidalnych przebiegów napięcia i prądu, *Przegląd Elektrotechniczny*, 87 (2011), nr 6, 169-173
- [7] Siwczyński M.: Moc bierna w układach zasilanych impulsowo, *Przegląd Elektrotechniczny*, 87 (2011), nr 8, 121-127

**Autorzy:** prof. zw. dr hab. inż. Maciej Siwczyński, Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki Przemysłowej i Informatyki Technicznej, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, E-mail: e-3@pk.edu.pl; mgr inż. Konrad Hawron, Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki Przemysłowej i Informatyki Technicznej, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, E-mail: konhawpk@gmail.com.