

Minimalno – energetyczny rozptyw prądowych sygnałów elektrycznych w przestrzeni liniowej L^1 – impulsów

Streszczenie: W artykule pokazano, że w obwodach sygnałów elektrycznych należących do przestrzeni L^1 - impulsów, występujący tam rzeczywisty rozptyw prądów nie spełnia zasady minimum strat energetycznych. Przedstawiono rozwiązanie tego zagadnienia poprzez wprowadzenie sterowania źródłem napięciowym w dwugałęziowym obwodzie równoległym i $n-1$ źródłami w n -gałęziowym obwodzie. Wykazano, że wprowadzone sterowanie jest energetycznie obojętne.

Abstract: The paper presents that in the circuits of electrical signals belonging to the L^1 -impulses space, the actual currents flow does not comply with the principle of minimum energy loss. The solution is presented to this issue through the introduction of the control system: the voltage source in two branches parallel circuit and $n-1$ voltage sources in n -branches circuit. It is demonstrated that the introduced control system is energy-neutral. (Minimally - energy distribution of electrical current signals in the linear L^1 - impulses space)

Słowa kluczowe: zasada minimum energii, przestrzenie liniowe, operatory splotowe, sterowanie optymalnoenergetyczne
Key words: the minimum energy principle, linear spaces, convolution operators, energy neutral controlled voltage source

doi:10.12915/pe.2014.09.10

Wstęp

Zagadnienia dotyczące jakości rozptywu energii elektrycznej oraz minimalizacji strat energii zwykle dotyczą minimalizacji pewnych wskaźników energetycznych, jak np. moc bierna lub uzyskania optymalnego, ze względów energetycznych, rozptywu prądów. W obwodach prądu stałego obowiązuje zasada minimum energii, zgodnie z którą rozptyw prądów w złożonej sieci jest taki, że całkowite straty energii w obwodzie są minimalne [1,2]. Jednak zasada ta na ogół nie działa już w obwodzie prądu sinusoidalnie zmiennego [3].

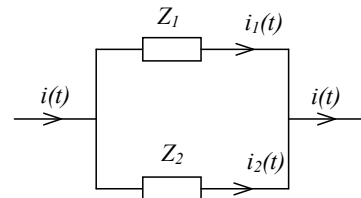
Z drugiej strony, w dziedzinie sygnałów niesinusoidalnych okresowych pojęcie mocy biernej traci sens, co oznacza, że pojęciem tym nie należy się posługiwać podczas badania jakości rozptywu energii elektrycznej w sieci [4,5]. Jednak problemy kompensacyjne zmierzające do wyzerowania wskaźnika mocy biernej mogą być rozwiązywane jako zadania optymalizacyjne polegające na minimalizowaniu strat energii w sieci albo jako związane z nimi zadania minimalizowania prądów skutecznych [6,7]. Publikacja ta wychodzi temu zagadnieniu naprzeciw.

W artykule wykazano, że w obwodach z sygnałami należącymi do liniowej przestrzeni L^1 - impulsów, występujący tam rzeczywisty rozptyw prądów nie spełnia zasady minimum strat energii. Aby tak było, potrzebne jest sterowanie. Rozważono dwugałęziowy obwód równoległy z rozdziałem prądowym i sterowaniem prądowo-napięciowym. Wykazano, że zastosowane źródło sterowane jest energetycznie obojętne. Zatem proces minimalno-energetycznego sterowania odbywa się bezenergetycznie. Przedstawiono także uogólnienie zasady minimum strat energetycznych dla n -gałęziowego obwodu równoległego.

Zaprezentowano dwa przykłady sterowań optymalnych. Pierwszy z udziałem regulatorów różniczkujących i drugi z zastosowaniem operatorów z biegunami rzeczywistymi. Podano odpowiednie do tego interpretacje elektryczne RL i RC.

Zasada minimum strat energetycznych w przestrzeniach L^1 i P^T

Na rysunku 1 przedstawiono rozptyw prądów w równoległym obwodzie prądu zmiennego, w którym impedancje poszczególnych gałęzi są określone poprzez liniowe operatory czasowo-niezmienne impedancji Z_1 i Z_2 .



Rys. 1. Rozptyw prądów w impedancyjnym obwodzie równoległym

Sygnały $i(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$, należą do przestrzeni sygnałowej L^1 , tzw. przestrzeni L^1 - impulsów:

$$(1) \quad L^1 = \left\{ x(t) : \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \right\}$$

albo do generowanej przez nią przestrzeni sygnałów T -okresowych [8]:

$$(2) \quad P_T = \{ \tilde{x}(t) : \tilde{x}(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(t + pT); \quad x(t) \in L^1 \}$$

W przestrzeniach tych określony jest iloczyn skalarny; w L^1 :

$$(3) \quad (u, i) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)i(t) dt$$

a w P_T :

$$(4) \quad (u, i) = \int_0^T u(t)i(t) dt$$

Operator impedancji Z rozkłada się na dwie składowe R i X [9]:

$$(5) \quad Z = \frac{1}{2} [Z + Z^*] + \frac{1}{2} [Z - Z^*] = R + X$$

gdzie:

$$(6) \quad R = \frac{1}{2} [Z + Z^*]$$

R - jest operatorem samosprzężonym (hermitowskim), tj. $R^* = R$, oraz

$$(7) \quad X = \frac{1}{2} [Z - Z^*]$$

X - jest operatorem antyhermitowskim, tj. $X^* = -X$.

Operator Z^* jest operatorem sprzężonym względem Z , tj. takim, że dla dowolnych sygnałów x, y : $(Zx, y) = (x, Z^*y)$. Operator R reprezentuje składową czynną operatora impedancji Z (operator stratności), a operator X jego składową bierną. Można wykazać, że dla funkcji zespolonych s -transformat zachodzi [10]: $Z^*(s) = Z(-s)$. Odpowiednia zasada minimum dla sygnałów prądowych i_1, i_2 rozptywających się na dwie gałęzie, określonych operatorami impedancji Z_1, Z_2 ma postać:

$$(8) \quad (R_1 i_1, i_1) + (R_2 i_2, i_2) \rightarrow MIN$$

$$i_1 + i_2 = i$$

Zagadnienie to jest równoważne minimalizacji funkcjonału:

$$(9) \quad f(i_1) = (R_1 i_1, i_1) + (R_2 (i - i_1), i - i_1) =$$

$$((R_1 + R_2) i_1, i_1) - (R_2 i, i_1) - (R_2 i_1, i) + (R_2 i, i) \rightarrow MIN$$

albo:

$$(10) \quad f(i_1) = ((R_1 + R_2) i_1, i_1) - 2(R_2 i, i_1) \rightarrow MIN$$

gdzie:

$$(11) \quad R_1 = \frac{1}{2} [Z_1 + Z_1^*]$$

$$R_2 = \frac{1}{2} [Z_2 + Z_2^*]$$

Wariacja funkcjonału ma postać:

$$(12) \quad \delta f(i_1) = f(i_1 + \delta i_1) - f(i_1) =$$

$$(2(R_1 + R_2) i_1 - R_2 i, \delta i_1) + ((R_1 + R_2) \delta i_1, \delta i_1)$$

Warunek konieczny i wystarczający „MIN f ” można zapisać w następującej formie:

$$(13) \quad \forall \delta i_1 \quad \delta f(i_1) > 0$$

Skąd, przy dodatniej określoności operatorów R_1, R_2 :

$$(14) \quad \forall \delta i_1 \quad ((R_1 + R_2) i_1 - R_2 i, \delta i_1) = 0$$

Zatem prąd i_1 musi spełnić następujące równanie (tzw. równanie optymalizacyjne):

$$(15) \quad (R_1 + R_2) i_1 = R_2 i$$

Operatory Z_1, Z_2 są operatorami typu splotu (czasowa niezmienniczość), dlatego w przestrzeni L^1 równanie optymalizacyjne jest równaniem całkowym:

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (r_1(t-t') + r_2(t-t')) i_1(t') dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} r_2(t-t') i(t') dt'$$

a w przestrzeni P^T równaniem całkowym ze splotem cyklicznym:

$$(17) \quad \int_0^T (\tilde{r}_1(t \ominus t') + \tilde{r}_2(t \ominus t')) \tilde{i}_1(t') dt' = \int_0^T \tilde{r}_2(t \ominus t') \tilde{i}(t') dt'$$

gdzie symbol \ominus oznacza działanie odejmowania modulo T :

$$(18) \quad t \ominus t' = \begin{cases} t - t' & \text{dla } t - t' \in [0, T) \\ t - t' + T & \text{dla } t - t' \notin [0, T) \end{cases} \quad t, t' \in [0, T)$$

a jądra operatorów całkowych – funkcje $r_1(t), r_2(t)$, są funkcjami impulsowymi operatorów R_1 i R_2 .

Rozwiązanie całkowego równania optymalizacyjnego można zapisać z użyciem operatora odwrotnego w następujący sposób:

$$(19) \quad i_1 = (R_1 + R_2)^{-1} R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

a dla prądu i_2 otrzymuje się:

$$(20) \quad i_2 = (R_1 + R_2)^{-1} R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

Wyniki (19) i (20) nie pokrywają się z tymi, które otrzymuje się z praw Kirchhoffa (tzw. „dzielnik prądu”):

$$(21) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -Z_1 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązując układ równań liniowych (21) metodą Cramera otrzymuje się wyznaczniki:

$$(22) \quad W = Z_1 + Z_2; \quad W_1 = Z_2 i; \quad W_2 = Z_1 i$$

skąd:

$$(23) \quad i_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} i$$

$$i_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} i$$

Wprowadzając tzw. operator odchylenia między rozwiązaniem minimum a rozwiązaniem wg prawa dzielnika prądu dla i_1 można zapisać:

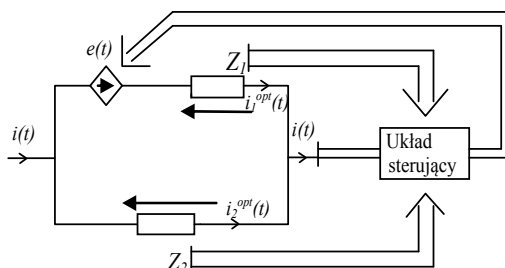
$$(24) \quad \Delta \rho_1^i = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{Z_2 Z_1^* - Z_2^* Z_1}{Z^2 + Z Z^*}$$

i analogicznie dla prądu i_2 :

$$(25) \quad \Delta \rho_2^i = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{Z_1 Z_2^* - Z_1^* Z_2}{Z^2 + Z Z^*}$$

gdzie: $Z = Z_1 + Z_2$

Tak więc, w obwodzie prądu zmiennego z rysunku 1 występujący tam rzeczywisty rozptyw prądów nie spełnia zasady minimum strat energii. Aby tak było, potrzebne jest sterowanie z użyciem źródła napięciowego o wydajności $e(t)$ sterowanego prądem $i(t)$ [10] (rys. 2)



Rys. 2. Układ sterowania rozptywem prądu i na optymalne prądy i_1^{opt} i i_2^{opt}

Sterowanie napięciem źródłowym e następuje tak, aby zrealizowany był optymalny energetycznie rozdział prądu i na i_1^{opt}, i_2^{opt} :

$$(26) \quad i_1^{opt} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i = \rho_1^i i$$

$$i_2^{opt} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i = \rho_2^i i$$

gdzie:

$$(27) \quad \rho_1^i = R_2 (R_1 + R_2)^{-1} = R_1^{-1} (R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1}$$

$$\rho_2^i = R_1 (R_1 + R_2)^{-1} = R_2^{-1} (R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1}$$

są operatorami rozdziału prądu i na prądy i_1^{opt}, i_2^{opt} . Dla operatorów ρ_1^i oraz ρ_2^i zachodzi:

$$(28) \quad \begin{aligned} (\rho_1^i)^* &= \rho_1^i \\ (\rho_2^i)^* &= \rho_2^i \end{aligned}$$

czyli są to operatory hermitowskie. Napięcie źródłowe e musi spełniać wtedy równanie Kirchhoffa :

$$(29) \quad e - Z_1 i_1^{opt} + Z_2 i_2^{opt} = 0$$

skąd otrzymuje się warunek sterowania

$$(30) \quad e = Z_1 i_1^{opt} - Z_2 i_2^{opt} = \frac{Z_1 Z_2^* - Z_1^* Z_2}{Z + Z^*} i = C^Z i$$

gdzie: C^Z – impedancyjny operator sterowania spełniający warunek:

$$(31) \quad (C^Z)^* = -C^Z$$

czyli C^Z jest operatorem antyhermitowskim.

Na podstawie (28) oraz (31) można wykazać, że odpowiednie iloczyny skalarne spełniają następujące warunki:

$$(32) \quad \begin{aligned} (C^Z i, i) &= -(C^Z i, i) \rightarrow (e, i) = 0 \\ (C^Z i, \rho_1^i i) &= -(C^Z i, \rho_1^i i) \rightarrow (e, i_1^{opt}) = 0 \\ (C^Z i, \rho_2^i i) &= -(C^Z i, \rho_2^i i) \rightarrow (e, i_2^{opt}) = 0 \end{aligned}$$

co oznacza, że sygnał źródła napięciowego $e(t)$ jest ortogonalny do sygnałów prądów i , i_1^{opt} , i_2^{opt} , czyli zastosowane źródło jest energetycznie obojętne tj. proces minimalno-energetycznego sterowania odbywa się bezenergetycznie.

Z wyrażen dla operatora sterowania C^Z (30), a także z wyrażen na operatory odchylenia (24), (25) wynika, że naturalne warunki minimalnoenergetycznego rozplywu prądów tzn. warunki, które nie wymagają sterowania są następujące:

$$(33) \quad Z_1(s)Z_2(-s) = Z_1(-s)Z_2(s)$$

ponieważ wtedy, zarówno operator sterowania jak i operatory odchylenia są jednocześnie operatorami zerowymi.

Uogólnienie zasady minimum strat energetycznych dla n -gałęziowego obwodu równoległego

Uogólnione rozwiązania zasady minimum strat energetycznych dla n -gałęziowego obwodu równoległego określają dystrybucję prądów na poszczególne gałęzie k scharakteryzowane operatorami impedancyjnymi z rozkładem R, X ($Z_k = R_k + jX_k$):

$$(34) \quad i_k^{opt} = \rho_k^i i \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Operatory ρ_k^i rozdziału prądu i na prądy i_k^{opt} opisuje zależność

$$(35) \quad \rho_k^i = \frac{1}{R_k \sum_{m=1}^n R_m^{-1}} = \frac{R_{12\dots n}}{R_k \sum_{m=1}^n R_{12\dots n}^{-1} R_m^{-1}} = \frac{R_{12\dots n}}{R_k M}$$

gdzie operatory $R_{12\dots n}$ oraz M zdefiniowane są wzorami:

$$(36) \quad R_{12\dots n} = R_1 R_2 \dots R_n;$$

$$(37) \quad M = \sum_{m=1}^n R_{12\dots n} R_m^{-1} = R_{12\dots n} \sum_{m=1}^n R_m^{-1}$$

Sygnały napięciowych źródeł sterujących można opisać następująco:

$$(38) \quad e_k = C_k^Z i \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

gdzie, transimpedancyjne operatory sterowania C_k^Z określone są wzorami:

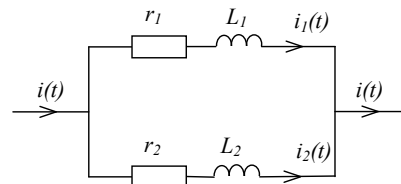
$$(39) \quad C_k^Z = Z_k \rho_k^i - Z_n \rho_n^i = \frac{1}{2} R_k^{-1} R_n^{-1} \left(\sum_{m=1}^n R_m^{-1} \right)^{-1} (Z_k Z_n^* - Z_k^* Z_n)$$

i są antyhermitowskie, tj.:

$$(40) \quad (C_k^Z)^* = -C_k^Z \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

Przykład 1

Na rysunku 3 przedstawiono schemat obwodu elektrycznego, którego gałęzie zawierają elementy typu rezystancyjno-indukcyjnego.



Rys. 3. Równoległy obwód dwugałęziowy typu rezystancyjno-indukcyjnego

Impedancyjne operatory poszczególnych gałęzi określone są następująco:

$$(41) \quad \begin{aligned} Z_1(s) &= r_1 + sL_1 \\ Z_2(s) &= r_2 + sL_2 \end{aligned}$$

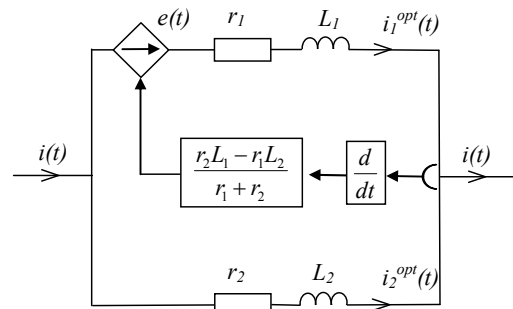
Operatory stratności R_1 i R_2 przyjmują postać:

$$(42) \quad R_1(s) = r_1; \quad R_2(s) = r_2$$

i są one bezdispersyjne (nie zależą od s). Operator sterowania C^Z opisuje zależność:

$$(43) \quad C^Z(s) = \frac{r_2 L_1 - r_1 L_2}{r_1 + r_2} s$$

Schemat układu sterowania optymalnego rozdziału prądu $i(t)$ dla obwodu z rysunku 3 zawiera pojedynczy regulator różniczkujący i jest przedstawiony na rysunku 4.



Rys. 4. Schemat układu sterowania w obwodzie równoległym

Warunek rozkładu naturalnego, na podstawie zależności (33) przyjmuje postać:

$$(44) \quad \frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2}$$

i oznacza on równość stałych czasowych w poszczególnych gałęziach.

Przykład 2

W przypadku, gdy impedancyjne operatory poszczególnych gałęzi mają pojedyncze bieguny rzeczywiste, tj. :

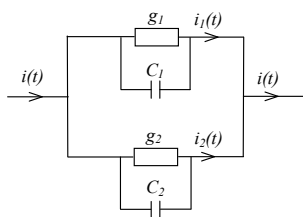
$$(45) \quad \begin{aligned} Z_1(s) &= \frac{a_1}{b_1 + s} & a_1, a_2 > 0 \\ Z_2(s) &= \frac{a_2}{b_2 + s} & b_1, b_2 > 0 \end{aligned}$$

wówczas operatory stratności czynnej są dyspersyjne (zależą od s):

$$(46) \quad R_1(s) = \frac{1}{2} a_1 \left(\frac{1}{b_1 + s} + \frac{1}{b_1 - s} \right) = \frac{a_1 b_1}{b^2 - s^2}$$

$$(47) \quad R_2(s) = \frac{a_2 b_2}{b_2^2 - s^2}$$

Przykładem obwodu, którego operatory gałęziowe są określone zależnościami (45) może być układ przedstawiony na rysunku 5.



Rys.5. Równoległy obwód konduktancyjno-pojemnościowy

Operator sterowania $C^Z(s)$ na podstawie (30) może być przedstawiony w postaci:

$$(48) \quad C^Z(s) = \frac{1}{2} \frac{Z_1(s)Z_2(-s) - Z_1(-s)Z_2(s)}{R_1(s) + R_2(s)}$$

Biorąc pod uwagę, że:

$$(49) \quad R_1(s) + R_2(s) = \frac{b_1 b_2 (a_1 b_2 + a_2 + b_1) - (a_1 b_1 + a_2 + b_2) s^2}{(b_1^2 - s^2)(b_2^2 - s^2)}$$

oraz

$$(50) \quad \frac{1}{2} Z_1(s)Z_2(-s) - Z_1(-s)Z_2(s) = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{(b_1^2 - s^2)(b_2^2 - s^2)} s$$

otrzymuje się operator sterowania w postaci:

$$(51) \quad C^Z(s) = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{a_1 b_1 (b_2^2 - s^2) + a_2 b_2 (b_1^2 - s^2)} s = \frac{as}{b^2 - s^2}$$

gdzie:

$$(52) \quad b^2 = \frac{b_1 b_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_1 b_1 + a_2 b_2}; \quad a = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

Dokonując rozkładu operatora sterowania $C^Z(s)$ na ułamki proste otrzymuje się postać czasową operatora sterowania, zawierającą składniki: przyczynowy i antyprzyczynowy:

$$(53) \quad \begin{aligned} C^Z(s) &= \frac{as}{(b-s)(b+s)} = -\frac{a}{2} \frac{1}{b+s} + \frac{a}{2} \frac{1}{b-s} \leftrightarrow \\ &-\frac{a}{2} e^{-bt} \mathbf{1}(t) + \frac{a}{2} e^{bt} \mathbf{1}(-t) \in L^1 \end{aligned}$$

gdzie: $\mathbf{1}(t)$ – skok jednostkowy

Stąd wynika funkcja impulsowa operatora sterowania $C^Z(s)$ w postaci:

$$(54) \quad C^Z(t) = \frac{1}{2} [C(t) - C^*(t)]$$

gdzie:

$$(55) \quad C(t) = -ae^{-bt} \mathbf{1}(t)$$

a operator $C^*(t)$ jest operatorem sprzężonym względem operatora $C(t)$. Można wykazać, że w przestrzeni L^1 -impulsów $C^*(t) = C(-t)$ [8].

Dokonując periodycznego powielenia operatora $C(t)$ wg. zależności (2) otrzymuje się:

$$(56) \quad \tilde{C}(t) = \sum_{p=0}^{\infty} C(t + pT) = -a \sum_{p=0}^{\infty} e^{-b(t+pT)} = -\frac{ae^{-bt}}{1 - e^{-bT}}$$

dla $t \in [0, T)$

skąd, wyrażenie na operator sterowania w przestrzeni P^T przyjmuje postać:

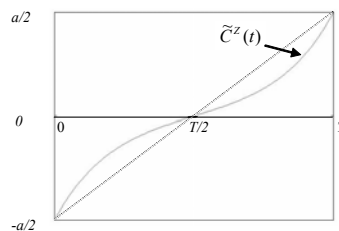
$$(57) \quad \tilde{C}^Z(t) = \frac{1}{2} [\tilde{C}(t) - \tilde{C}(T-t)] = \frac{1}{2} \left[-\frac{ae^{-bt}}{1 - e^{-bT}} + \frac{ae^{-b(T-t)}}{1 - e^{-bT}} \right] =$$

$$\frac{1}{2} \frac{a}{1 - e^{-bT}} [e^{b(t-T)} - e^{-bt}] = \frac{1}{2} a \frac{e^{b(t-\frac{T}{2})} - e^{-b(t-\frac{T}{2})}}{e^{\frac{bT}{2}} - e^{-\frac{bT}{2}}}$$

Ostatecznie, cykliczną funkcję impulsową operatora sterowania określa wzór:

$$(58) \quad \tilde{C}^Z(t) = \frac{1}{2} a \frac{\text{sh}b(t - \frac{T}{2})}{\text{sh}b\frac{T}{2}}, \quad \text{dla } t \in [0, T)$$

a jej przebieg przedstawia wykres na rysunku 6.



Rys. 6. Przebieg funkcji operatora $\tilde{C}^Z(t)$ w przedziale czasu $t \in [0, T)$

Sygnał wydajności źródła napięciowego w przestrzeni P^T wyrażony jest zależnością:

$$(59) \quad \begin{aligned} \tilde{e}(t) &= \int_0^T \tilde{C}^Z(t \ominus t') i(t') dt' = \\ &\int_0^t \tilde{C}^Z(t - t') i(t') dt' + \int_t^T \tilde{C}^Z(t - t' + T) i(t') dt' \end{aligned}$$

dla $t \in [0, T)$

Operatory rozdziału optymalnego prądów wynoszą:

$$(60) \quad \rho_1^i(s) = \frac{R_2(s)}{R_1(s) + R_2(s)} = \gamma_1 \frac{b_1^2 - s^2}{b^2 - s^2}$$

$$(61) \quad \rho_2^i(s) = \frac{R_1(s)}{R_1(s) + R_2(s)} = \gamma_2 \frac{b_2^2 - s^2}{b^2 - s^2}$$

gdzie

$$(62) \quad \gamma_1 = \frac{1}{1 + \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}}; \quad \gamma_2 = \frac{\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}}{1 + \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}} \Rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 = 1$$

Rozkładając operatory $\rho_1^i(s), \rho_2^i(s)$ na ułamki proste otrzymuje się:

$$(63) \quad \rho_1^i(s) = \gamma_1 \left[1 + \frac{b_1^2 - b^2}{2b} \left(\frac{1}{b+s} + \frac{1}{b-s} \right) \right]$$

$$(64) \quad \rho_2^i(s) = \gamma_2 \left[1 + \frac{b_2^2 - b^2}{2b} \left(\frac{1}{b+s} + \frac{1}{b-s} \right) \right]$$

W przestrzeni L_1 operatory ρ_1^i, ρ_2^i przyjmują postać:

$$(65) \quad \rho_{1,2}^i(t) = \gamma_{1,2} \left[\delta(t) + \frac{b_{1,2}^2 - b^2}{2b} (\rho(t) + \rho^*(t)) \right]$$

$$\rho(t) = e^{-bt} \mathbf{1}(t)$$

gdzie: $\delta(t)$ – impuls Diraca

Dokonując periodycznego rozprzestrzenienia operatora $\rho(t)$ otrzymuje się:

$$(66) \quad \tilde{\rho}(t) = \sum_{p=0}^{\infty} e^{-b(t+T)} = \frac{e^{-bt}}{1 - e^{-bT}} \quad t \in [0, T)$$

skąd, wyrażenia (63) i (64) w przestrzeni P^T przyjmują postać:

$$(67) \quad \tilde{\rho}_{1,2}^i(t) = \gamma_{1,2} \left[\delta(t) + \frac{b_{1,2}^2 - b^2}{2b} (\tilde{\rho}(t) + \tilde{\rho}(T-t)) \right]$$

Można wykazać, że:

$$\tilde{\rho}(t) + \tilde{\rho}(T-t) = \frac{e^{-bt} + e^{-b(T-t)}}{1 - e^{-bT}}$$

$$(68) \quad \frac{e^{b\left(\frac{T-t}{2}\right)} + e^{-b\left(\frac{T-t}{2}\right)}}{e^{\frac{bT}{2}} - e^{-\frac{bT}{2}}} = \frac{chb\left(\frac{T-t}{2}\right)}{shb\frac{T}{2}}$$

Zatem operatory optymalnego rozdziału przyjmują ostatecznie postać:

$$(69) \quad \tilde{\rho}_{1,2}^i(t) = \gamma_{1,2} \left[\delta(t) + \frac{b_{1,2}^2 - b^2}{2b} \frac{chb\left(\frac{T-t}{2}\right)}{shb\frac{T}{2}} \right]$$

dla $t \in [0, t)$

Zgodnie z zależnością (48) warunek rozptywu naturalnego jest spełniony, gdy:

$$(70) \quad Z_1(s)Z_2(-s) = Z_1(-s)Z_2(s)$$

skąd

$$(71) \quad \frac{a_1}{b_1+s} \frac{a_2}{b_2-s} = \frac{a_1}{b_1-s} \frac{a_2}{b_2+s}$$

albo:

$$(72) \quad (b_1+s)(b_2-s) = (b_1-s)(b_2+s)$$

skąd $b_1=b_2$, czyli bieguny impedancji Z_1 i Z_2 muszą być takie same.

W takim przypadku sterowanie nie jest potrzebne – optymalny rozptyw prądów jest spełniony w sposób naturalny.

Wnioski

W artykule w ogólny sposób przedstawiono rozdział sygnału prądu na dwie, lub więcej gałęzi równoległych w

taki sposób, aby zminimalizować całkowite straty energii w obwodzie.

Sygnał prądowy podlegający optymalnemu rozdziałowi może mieć przebieg impulsowy lub okresowy i w zależności od tego jest zakwalifikowany albo do przestrzeni funkcyjnej L^1 , albo do generowanej przez nią przestrzeni liniowej P^T . Natomiast gałęzie składowe obwodu są scharakteryzowane liniowymi, czasowo-niezmienniczymi operatorami typu impedancyjnego. Na ogół operatory te zadane są funkcjami wymiernymi zmiennej zespolonej w taki sposób, aby spełniały warunki stawiane gałęziom pasywnym RLC.

W artykule wykazano, że optymalny, w sensie minimum strat energii rozdział prądów nie jest naturalny, lecz uzyskiwany jest za pomocą prądowo-napięciowego sterowania, które na ogół jest zrealizowane przy użyciu pasywnego źródła napięcia sterowanego prądowo lub zespołu takich źródeł. Wyznaczono antyhermitowski (pasywny) operator sterowania dla takiego źródła.

Okazuje się jednak, że w pewnych szczególnych przypadkach optymalny rozdział prądu jest możliwy bez udziału sterowań prądowo napięciowych. Przypadek ten zachodzi, gdy spełniony jest warunek naturalnego dopasowania gałęzi składowych (33), który można też zapisać w postaci $\frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} = \frac{Z_1(-s)}{Z_2(-s)}$. W szczególności ma to

miejsce, gdy: $Z_{1,2}(-s) = Z_{1,2}(s)$ lub $Z_{1,2}(-s) = -Z_{1,2}(s)$ co sprawia, że w rozkładach $Z(s) = R(s) + X(s)$ funkcje $X_{1,2}(s) = 0$ lub $R_{1,2}(s) = 0$ i co jednocześnie oznacza, że w pierwszym przypadku gałęzie są czysto rezystancyjne, a w drugim przypadku czysto reaktancyjne.

LITERATURA

- [1] Desoer C. A.: The maximum power transfer theorem for n-ports. *IEEE Trans.*, Vol. CT-20 (1979), 228-230
- [2] Rohrer R. A.: Optimal matching: A new approach to the matching problem for real invariant one port networks. *IEEE Trans.*, Vol. CT-15 (1968), 118-124
- [3] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Minimalno – energetyczny rozkład sygnałów sinusoidalnych w obwodach elektrycznych, *Wiadomości Elektrotechniczne*, 9 (2014)
- [4] L.S. Czarniecki, Uwagi do artykułu Możliwość przedstawienia jednolitej nowej koncepcji mocy biernej prądu niesinusoidalnego w dziedzinie czasu. *Przegląd Elektrotechniczny*, R85 (2009), nr. 6, 164-166.
- [5] Rens, A. P., Validation of popular nonsinusoidal power theories for the analysis and management of modern power systems. *North-West University, Potchefstroom Campus*, 2006.
- [6] Walczak, J. Pasko, M., Minimalizacja strat mocy czynnej i symetryzacja przepływu mocy w układach z przebiegami niesinusoidalnymi, *Jakość i Użytkowanie Energii Elektrycznej*, 5 (1999), nr. 1, 55-59
- [7] L.S. Czarniecki, Currents' Physical Components (CPC) concept: a fundamental for power theory, *Przegląd Elektrotechniczny*, R84 (2008), nr 6, 28-37.
- [8] Siwczyński M., Jaraczewski M., The L^1 –impulse method as an alternative to the Fourier series in the power theory of continuous time systems, *Bull. of the Polish Acad. of Science, Techn. Scie.*, 57 (2009), n. 1, 79-85
- [9] Siwczyński M. Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu – obwody jednofazowe, *Przegląd Elektrotechniczny*, R86 (2010), nr 6, 196-201
- [10] Siwczyński M., Energetyczna teoria obwodów. *Wydawnictwo Instytutu Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią PAN*, Kraków 2003

Autorzy: prof. dr hab. inż. Maciej Siwczyński, dr inż. Andrzej Drwal, dr inż. Sławomir Żaba, Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Instytut Elektrotechniki Przemysłowej i Informatyki Technicznej, Kraków ul. Warszawska 24, E-mails: gsz@pk.edu.pl; adrwal@pk.edu.pl; szaba@pk.edu.pl.