

Matematyczny trójwymiarowy model pojemności pasożytniczych w strukturach ścieżek przewodzących mikroelektronicznych układów warstwowych

Streszczenie. W artykule przedstawiono rezultaty obliczeń pojemności w systemie ścieżek przewodzących o wybranej konfiguracji, usytuowanych w mikroukładzie grubowarstwowym. Pojemność między dwoma ścieżkami wyznaczono w oparciu o rozwiązanie trójwymiarowego zagadnienia brzegowego stosując metodę przekształceń całkowych Fouriera. Otrzymany układ równań z nieznanymi gęstościami ładunków rozwiązano numerycznie metodą kolokacji, a wartość pojemności obliczono z jej definicyjnej zależności. Zaproponowano ponadto modyfikację metody numerycznej, umożliwiającą wielokrotne skrócenie czasu obliczeń.

Abstract. The results of capacitance calculations in conductive paths system with selected configuration (placed in thick-film microcircuit) have been presented in this paper. The capacitance between two paths was determined based on solution of 3D boundary problem using Fourier integral transforms method. The obtained equation system with unknown charge densities has been solved numerically with use the collocation method and capacitance value has been calculated from its definition relation. Additionally, the modification of numerical method was proposed, which allow to significantly reduce the calculation time. (Mathematical model of parasitic capacitances in conducting path structures of film microcircuits)

Słowa kluczowe: : mikroukład hybrydowy, pojemności pasożytnicze, całki Fouriera, metoda kolokacji

Keywords: hybrid microcircuit, parasitic capacitances, Fourier's integrals, collocation method

doi:10.12915/pe.2014.12.73

Wstęp

Sprzężenia pojemnościowe istnieją we wszystkich warstwowych strukturach hybrydowych i układach scalonych. Mają one na ogół szkodliwy wpływ na działanie tych układów, przez wprowadzenie pojemności rozproszonych pomiędzy różne ścieżki przewodzące, gdzie żadna pojemność pasożytnicza jest nie do zaakceptowania. Jest zatem wskazane, aby mieć możliwość oszacowania wartości tych pasożytniczych sprzężeń, w celu uwzględnienia ich skutków w działaniu całego układu [1].

Struktura topologiczno - przestrzenna mikroukładu hybrydowego sprzyja kształtowaniu się w nim złożonego systemu pojemnościowych mediów propagacji zakłóceń. Są one szczególnie istotne w zakresie średnich i dużych częstotliwości. Ich intensywność zależy w dużym stopniu od topologii układu, (szczególnie nieprawidłowości w jej projekcie), a więc od rozmiarów geometrycznych ścieżek i elementów, odległości między nimi, a także od właściwości materiałowych i konfiguracji przestrzennej struktury układu. Dlatego też identyfikacja i analiza tego typu sprzężeń celowa jest już na etapie projektowania mikroukładów, między innymi w aspekcie uwzględnienia kryteriów kompatybilności elektromagnetycznej czy niezawodności.

Matematyczny model pojemności

Mikroukłady warstwowe i scalone o wyższej gęstości upakowania charakteryzują się – w porównaniu z klasycznymi układami cienko- czy grubowarstwowymi o niskim stopniu scalenia – bardziej złożoną strukturą połączeń, w której długość i szerokość ścieżek przewodzących mają często zbliżone wymiary. W tego typu przypadkach struktury połączeniowe należy analizować w obszarze trójwymiarowym. Zastosowanie modelu 3D pozwoli na wypracowanie miarodajnej oceny niepożądanych efektów w układach o wyższej skali integracji już na etapie ich projektowania przez przeprowadzenie symulacji komputerowych, stwarzając w ten sposób możliwość uniknięcia kosztownych badań doświadczalnych.

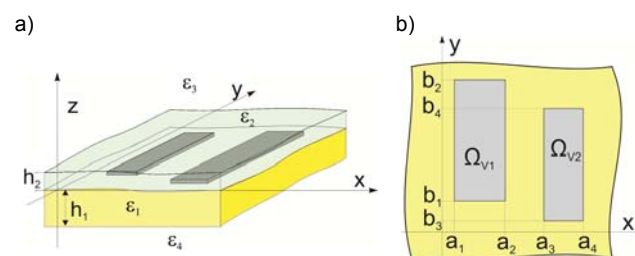
Przedmiotem rozważań jest system dwóch równoległych ścieżek przewodzących, które są umieszczone na nieskończonym podłożu o grubości h_1 i zabezpieczone warstwą dielektryka grubości h_2 (rys.1). Przyjęto ponadto, że mają one skończoną długość i szerokość o wymiarach

przedstawionych na rysunku 1b. Przyłożone do ścieżek potencjały wynoszą odpowiednio φ_1 i φ_2 oraz spełniają warunek $\lim_{x^2+y^2+z^2 \rightarrow \infty} \varphi = 0$

$$x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$$

Do sformułowania matematycznego modelu pojemności, przyjęto ponadto następujące założenia:

- grubość ścieżek przewodzących jest pomijalnie mała;
- współczynnik przenikalności dielektrycznej podłoża wynosi ϵ_1 , dielektryka ϵ_2 , obszaru powyżej jego powierzchni - ϵ_3 , a poniżej płytki podłożowej - ϵ_4 .



Rys.1. Konfiguracja ścieżek przewodzących w układzie (tworzą pojemność C_{LT}): a) widok ogólny, b) w płaszczyźnie $x-y$.

Do rozwiązania trójwymiarowego zagadnienia brzegowego zastosowano metodę przekształceń całkowych Fouriera [2], w której potencjał elektryczny $\varphi(x,y,z)$, spełniający równanie Laplace'a wyrażono zależnością:

$$(1) \quad \varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha, \beta, z) \cdot e^{j(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

gdzie transformata $F(\alpha, \beta, z)$ wynosi:

$$(2) \quad F(\alpha, \beta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, z) \cdot e^{-j(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

skąd po przekształceniach i uwzględnieniu, że $r^2 = \alpha^2 + \beta^2$ otrzymuje się:

$$(3) \quad F = \begin{cases} R_1 e^{-r(z-h_2)} & z \geq h_2 \\ R_2 \sinh(rz) + R_3 \cosh(rz) & h_2 \geq z \geq 0 \\ R_4 \sinh(rz) + R_5 \cosh(rz) & 0 \geq z \geq -h_1 \\ R_6 e^{r(z+h_1)} & z \leq -h_1 \end{cases}$$

Współczynniki $R_1 - R_6$ wyznaczono z klasycznych dla pola elektrostatycznego warunków brzegowych: ciągłości potencjału na granicy dwóch ośrodków, ciągłości składowej normalnej indukcji elektrycznej D_n na granicy dwóch ośrodków (w obszarze poza ścieżkami przewodzącymi, dla $z = -h_1$ i h_2) i skokowej zmiany składowej normalnej indukcji elektrycznej D_n na granicy ścieżek i podłoża (dla $z=0$).

Wykorzystując następujące założenie, że:

$$(4) \quad \varphi(x, y, 0) = \begin{cases} \varphi_1 & \text{dla } x, y \in \Omega_{V1} \\ \varphi_2 & \text{dla } x, y \in \Omega_{V2} \end{cases}$$

otrzymuje się w rezultacie układ równań całkowych dla rozkładu ładunków elektrycznych o nieznannej gęstości powierzchniowej $q_i(x, y)$ ($i=1,2$).

$$(5) \quad \frac{1}{\pi^2 \varepsilon_2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_w \varepsilon_g + \varepsilon_d} \iint_{\Omega_{V1}} \frac{G_r(r)}{r} \left(\iint_{\Omega_{V1}} q_1 \cos(\alpha(x-s)) \cos(\beta(y-t)) ds dt + \iint_{\Omega_{V2}} q_2 \cos(\alpha(x-s)) \cos(\beta(y-t)) ds dt \right) d\alpha d\beta + \frac{1}{2\pi \varepsilon_2} \cdot \frac{\varepsilon_d \varepsilon_g}{\varepsilon_w \varepsilon_g + \varepsilon_d} \left(\iint_{\Omega_{V1}} q_1(s, t) \frac{1}{\sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}} ds dt + \iint_{\Omega_{V2}} q_2(s, t) \frac{1}{\sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}} ds dt \right) = \begin{cases} \varphi_1 & (x, y) \in \Omega_{V1} \\ \varphi_2 & (x, y) \in \Omega_{V2} \end{cases}$$

gdzie $\varepsilon_g = \varepsilon_2/\varepsilon_3$, $\varepsilon_d = \varepsilon_1/\varepsilon_4$, $\varepsilon_w = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ oraz

$$(6) \quad G_r(r) = \varepsilon_w \varepsilon_g (1 - \varepsilon_d^2) \cdot \frac{[\varepsilon_g + \text{th}(rh_2)] \text{th}(rh_1)}{M} + \varepsilon_d (1 - \varepsilon_g^2) \cdot \frac{[\varepsilon_d + \text{th}(rh_1)] \text{th}(rh_2)}{M} = \varepsilon_w \varepsilon_g (1 - \varepsilon_d^2) \cdot GA_r(\alpha) + \varepsilon_d (1 - \varepsilon_g^2) \cdot GB_r(\alpha)$$

$$M = \varepsilon_w (1 + \varepsilon_d \text{th}(rh_1)) (\varepsilon_g + \text{th}(rh_2)) + (1 + \varepsilon_g \text{th}(rh_2)) (\varepsilon_d + \text{th}(rh_1)).$$

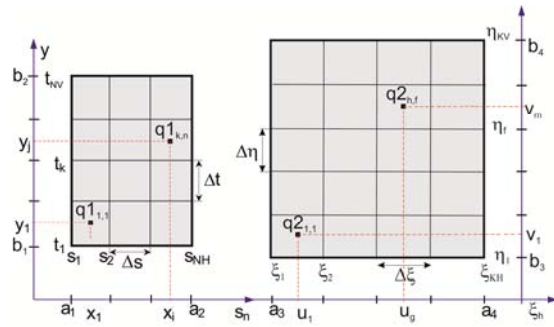
W zależności (5) uwzględniono rozdzielenie jader całek na części: regularną i osobliwą, która posiada rozwiązanie analityczne:

$$(7) \quad \iint_{\Omega} \frac{\cos(\alpha(x-s)) \cos(\beta(y-t))}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} d\alpha d\beta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}}$$

Dyskretyzacja układu równań i obliczanie pojemności

W celu rozwiązania układu równań (5) przeprowadzono ich dyskretyzację, dokonując podziału powierzchni ścieżek. Szerokość pierwszej ścieżki podzielono na NH , jej długość na NV odcinków, a drugiej odpowiednio na KH i KV odcinków (rys. 2). Stosując także metodę kolokacji [3], założono, że równanie rozkładu gęstości ładunku jest spełnione (oznaczając dla przejrzystości $q_1 \rightarrow q1$ i $q_2 \rightarrow q2$):

- na pierwszej ścieżce w punktach (x_i, y_j) dla $i = 1, \dots, NH$ i $j = 1, \dots, NV$; gdzie $x_i = a_1 + (i - 0.5) \cdot \Delta s$, $y_j = b_1 + (j - 0.5) \cdot \Delta t$ jak też, że $q1_{k,n} = \text{const.}$ dla $s_n < s < s_{n+1}$ i $t_k < t < t_{k+1}$, gdzie $s_n = a_1 + (n - 1) \cdot \Delta s$; dla $n = 1, \dots, NH$, $t_k = b_1 + (k - 1) \cdot \Delta t$ dla $k = 1, \dots, NV$, a $\Delta s = (a_2 - a_1)/NH$ i $\Delta t = (b_2 - b_1)/NV$
- na drugiej ścieżce w punktach (u_g, v_m) dla $g = 1, \dots, KH$ i $m = 1, \dots, KV$ gdzie $u_g = a_3 + (g - 0.5) \cdot \Delta \xi$; $v_m = b_3 + (m - 0.5) \Delta \eta$, $q2_{h,f} = \text{const.}$ dla $\xi_h < \xi < \xi_{h+1}$, $\eta_f < \eta < \eta_{f+1}$, gdzie $\xi_h = a_3 + (h - 1) \cdot \Delta \xi$; a $\Delta \xi = (a_4 - a_3)/KH$ dla $h = 1, \dots, KH$; i $\eta_f = b_3 + (f - 1) \cdot \Delta \eta$; $\Delta v = (b_4 - b_3)/KV$ dla $f = 1, \dots, KV$.



Rys. 2. Podział powierzchni pierwszej i drugiej ścieżki o wymiarach odpowiednio $(a_2 - a_1) \times (b_2 - b_1)$ i $(a_4 - a_3) \times (b_4 - b_3)$

Dokonując przekształceń poszczególnych elementów układu równań (5) w obszarze $(x, y) \in \Omega_{V1}$ i uwzględnieniem zależności (6) dla części regularnej i osobliwej jądra otrzymuje się odpowiednio równania:

$$(8) \quad \iint_{\Omega_{V1}} \iint_{\Omega_{V1}} q1(s, t) \frac{G(r)}{r} \cos(\alpha(x-s)) \cos(\beta(y-t)) d\alpha d\beta ds dt \approx \sum_{n=1}^{NH} \sum_{k=1}^{NV} q1_{n,k} \left(\iint_{\Omega_{V1}} \frac{G_r(r)}{r} \cdot \frac{\sin[\alpha(s_{n+1} - x_i)] - \sin[\alpha(s_n - x_i)]}{\alpha} \times \frac{\sin[\beta(t_{k+1} - y_j)] - \sin[\beta(t_k - y_j)]}{\beta} d\alpha d\beta \right) = \sum_{n=1}^{NH} \sum_{k=1}^{NV} q1_{n,k} \left(\iint_{\Omega_{V1}} \left(\varepsilon_w \varepsilon_g (1 - \varepsilon_d^2) \frac{GA_r(r)}{r} + \varepsilon_d (1 - \varepsilon_g^2) \frac{GB_r(r)}{r} \right) \times \frac{\sin[\alpha(s_{n+1} - x_i)] - \sin[\alpha(s_n - x_i)]}{\alpha} \times \frac{\sin[\beta(t_{k+1} - y_j)] - \sin[\beta(t_k - y_j)]}{\beta} d\alpha d\beta \right) = \sum_{n=1}^{NH} \sum_{k=1}^{NV} q1_{n,k} \left(\varepsilon_w \varepsilon_g (1 - \varepsilon_d^2) RA1_{t_k, s_n}^{y_j, x_i} + \varepsilon_d (1 - \varepsilon_g^2) RB1_{t_k, s_n}^{y_j, x_i} \right)$$

$$(9) \quad \iint_{\Omega_{V1}} q1(s, t) \frac{1}{\sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}} ds dt \approx \sum_{n=1}^{NH} \sum_{k=1}^{NV} q1_{n,k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{s_n}^{s_{n+1}} \frac{1}{\sqrt{(s-x_i)^2 + (t-y_j)^2}} ds dt = \sum_{n=1}^{NH} \sum_{k=1}^{NV} q1_{n,k} \times \left[(s_{n+1} - x_i) \ln \frac{(t_{k+1} - y_j) + \sqrt{(s_{n+1} - x_i)^2 + (t_{k+1} - y_j)^2}}{(t_k - y_j) + \sqrt{(s_{n+1} - x_i)^2 + (t_k - y_j)^2}} + (t_{k+1} - y_j) \ln \frac{(s_{n+1} - x_i) + \sqrt{(s_{n+1} - x_i)^2 + (t_{k+1} - y_j)^2}}{(s_n - x_i) + \sqrt{(s_n - x_i)^2 + (t_{k+1} - y_j)^2}} + (s_n - x_i) \ln \frac{(t_k - y_j) + \sqrt{(s_n - x_i)^2 + (t_k - y_j)^2}}{(t_{k+1} - y_j) + \sqrt{(s_n - x_i)^2 + (t_{k+1} - y_j)^2}} + (t_k - y_j) \ln \frac{(s_n - x_i) + \sqrt{(s_n - x_i)^2 + (t_k - y_j)^2}}{(s_{n+1} - x_i) + \sqrt{(s_{n+1} - x_i)^2 + (t_k - y_j)^2}} \right] = \sum_{n=1}^{NH} \sum_{k=1}^{NV} q1_{n,k} \Pi_{t_k, s_n}^{y_j, x_i}$$

Dalsze przekształcenia umożliwiają wyznaczenie całek zawierających regularną część jądra: $RA2_{\eta_f, \xi_h}^{y_j, x_i}$ i $RB2_{\eta_f, \xi_h}^{y_j, x_i}$ w obszarze $(x, y) \in \Omega_{I1}$ oraz $RA3_{I_k, s_n}^{v_m, u_g}$, $RB3_{I_k, s_n}^{v_m, u_g}$ i $RA4_{\eta_f, \xi_h}^{v_m, u_g}$, $RB4_{\eta_f, \xi_h}^{v_m, u_g}$ w obszarze $(x, y) \in \Omega_{I2}$, które rozwiązuje się na drodze numerycznej. Z kolei pozostałe całki zawierające nieregularną część jądra, tj. $I2_{\eta_f, \xi_h}^{y_j, x_i}$, $I3_{I_k, s_n}^{v_m, u_g}$ i $I4_{\eta_f, \xi_h}^{v_m, u_g}$ mają rozwiązanie analityczne. W rezultacie tych przekształceń, układ równań (5) można zapisać w postaci:

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{NH} \sum_{k=1}^{NV} q1_{n,k} \cdot W1_{I_k, s_n}^{y_j, x_i} + \sum_{h=1}^{KH} \sum_{f=1}^{KV} q2_{h,f} \cdot W2_{\eta_f, \xi_h}^{y_j, x_i} = \varphi_1$$

$$\sum_{n=1}^{NH} \sum_{k=1}^{NV} q1_{n,k} \cdot W3_{I_k, s_n}^{v_m, u_g} + \sum_{h=1}^{KH} \sum_{f=1}^{KV} q2_{h,f} \cdot W4_{\eta_f, \xi_h}^{v_m, u_g} = \varphi_2$$

gdzie elementy macierzy współczynników potencjałowych [W] o wymiarach $(NH \cdot NV + KH \cdot KV) \times (NH \cdot NV + KH \cdot KV)$ przyjmują - przy oznaczeniu $\varepsilon_M = \pi \varepsilon_2 (\varepsilon_d + \varepsilon_g \varepsilon_w)$ - postać

$$(11) \quad W1_{I_k, s_n}^{y_j, x_i} = \frac{\varepsilon_d \varepsilon_g}{\varepsilon_M} I1_{I_k, s_n}^{y_j, x_i} + \frac{\varepsilon_w \varepsilon_g (1 - \varepsilon_d^2)}{\varepsilon_M} RA1_{I_k, s_n}^{y_j, x_i} + \frac{\varepsilon_d (1 - \varepsilon_g^2)}{\varepsilon_M} RB1_{I_k, s_n}^{y_j, x_i}$$

Pozostałe elementy podmacierzy $W2 - W4$ określa się w analityczny sposób.

Szukaną pojemność C_{LT} można wyznaczyć dokonując inwersji macierzy [W]. Z otrzymanej w ten sposób macierzy [P] = [W⁻¹] należy wydzielić odpowiednie podmacierze zgodnie z przyjętym podziałem ścieżek

$$(12) \quad [W^{-1}] = [P] = \begin{bmatrix} P1_{m,k} & P2_{m,j} \\ P3_{n,k} & P4_{n,j} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m, k = 1, \dots, NH \cdot NV \\ n, j = 1, \dots, KH \cdot KV \end{matrix}$$

a następnie zsumować elementy poszczególnych podmacierzy i pomnożyć je przez długość i szerokość podziału ścieżek odpowiednio przez $\Delta s \cdot \Delta t$ lub $\Delta \eta \cdot \Delta \xi$. Otrzymuje się pojemności cząstkowe C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} , skąd oblicza się pojemność C_{LT} według zależności [4]:

$$(13) \quad C_{LT} = \frac{C_{11} \cdot C_{22} - C_{12} \cdot C_{21}}{C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22}}$$

Modyfikacja obliczeń – rozwiązanie analityczne

Całki $RA1-RA4$ i $RB1-RB4$ stanowiące regularne części jądra, zawierające funkcje $GA_r(r)$ i $GB_r(r)$, są nieelementarne i wymagają długotrwałych obliczeń numerycznych. Dlatego też opracowano metodę umożliwiającą znaczne skrócenie czasu ich trwania. Modyfikacja polega na zastąpieniu tych funkcji wyrażeniami przybliżonymi:

$$(14) \quad GA_r(r) = \frac{th(r) \cdot (\varepsilon_g + th(rh_z))}{M(r)} \approx \sum_{\chi=1}^3 (K_\chi (1 - e^{-T_\chi r})) = AF$$

$$(15) \quad GB_r(r) = \frac{th(rh_z) \cdot (\varepsilon_d + th(r))}{M(r)} \approx \sum_{\chi=1}^3 B_\chi (1 - e^{-J_\chi r}) = BF$$

w których $h_z = h_2/h_1$, a K_χ , T_χ , B_χ i J_χ są nieznanymi współczynnikami, których wartości trzeba wyznaczyć. W wyniku tego podstawienia, otrzymuje się całki niewłaściwe, które można zapisać w postaci:

$$(16) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{th(r) \cdot (\varepsilon_g + th(rh_z)) \cdot \cos[\alpha(s-x_i)] \cos[\beta(\bar{t}-y_j)]}{M(r) \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} d\alpha d\beta \approx \sum_{\chi=1}^3 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{K_\chi (1 - e^{-T_\chi r}) \cos(\alpha X) \cos(\beta Y)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} d\alpha d\beta = GA^*(X, Y)$$

i rozwiązać analitycznie:

$$(17) \quad \left(\int_0^\infty \int_0^\infty K_\chi \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \frac{e^{-T_\chi \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) \cos(\alpha X) \cos(\beta Y) d\alpha d\beta \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{K_\chi}{\sqrt{X^2 + Y^2}} - \frac{K_\chi}{\sqrt{T_\chi^2 + X^2 + Y^2}} \right) = GRI^*(X, Y)$$

gdzie $X = (s-x)$ i $Y = (t-y)$. W wyniku tej zamiany całka (17) adekwatna do $RA1$ (równanie (8)) zostaje zredukowana do całki podwójnej oznaczonej i przyjmuje postać:

$$(18) \quad \int_{\bar{s}_n}^{\bar{s}_{n+1}} \int_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}} \left(\frac{K_\chi}{\sqrt{X^2 + Y^2}} - \frac{K_\chi}{\sqrt{T_\chi^2 + X^2 + Y^2}} \right) d\bar{s} d\bar{t}$$

Pierwsza część całki (18) jest równa $K_\chi \cdot I1_{I_k, s_n}^{y_j, x_i}$, gdzie

$I1_{I_k, s_n}^{y_j, x_i}$ jest określone równaniem (9), natomiast jej drugi składnik jest wyrażony ogólnie zależnością:

$$(19) \quad \iint \frac{1}{\sqrt{T^2 + X^2 + Y^2}} dXdY = \int \ln \left(Y + \sqrt{T^2 + X^2 + Y^2} \right) dX = X \cdot \ln \left(Y + \sqrt{T^2 + X^2 + Y^2} \right) + Y \cdot \ln \left(X + \sqrt{T^2 + X^2 + Y^2} \right) + 2T \cdot \arctan \left(\frac{X + Y + \sqrt{T^2 + X^2 + Y^2}}{T} \right) - X$$

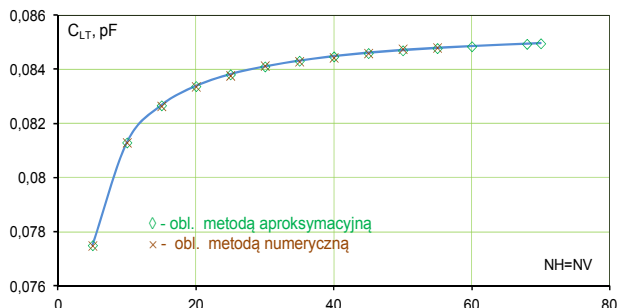
W taki sam sposób wyznacza się całki równważne zależnościom $RA2-RA4$, $RB1-RB4$ oraz $I2-I4$. Wartości współczynników K_χ i T_χ oraz B_χ i J_χ funkcji aproksymujących, oznaczonych odpowiednio przez AF i BF (zależności (9) i (10)), przybliżających funkcje GA i GB wyznaczono stosując metodę aproksymacji średniokwadratowej.

Przykładowe obliczenia przeprowadzono przyjmując następujące wartości parametrów wejściowych: $\varepsilon_1 = 9,08$, $\varepsilon_2 = 8,8$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$, $h_1 = 0,635 \cdot 10^{-3}$ m i $h_2 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ m, otrzymując rozwiązanie, w którym współczynniki wynoszą: dla funkcji AF : $K_1 = 0,0452$, $K_2 = 0,0416$; $K_3 = -0,038$, $T_1 = 1,9853$; $T_2 = 9,0579$; $T_3 = 0,1572$, a dla funkcji BF : $B_1 = 0,0109$, $B_2 = -0,0105$, $B_3 = 0,0473$, $J_1 = 4,3578$, $J_2 = 2,1232$, $J_3 = 0,1597$. Przybliżenie obydwu funkcji GA i GB należy uznać za wysoce zadowalające (błąd średniokwadratowy aproksymacji w pierwszym przypadku wynosi $RMSE = 5,13 \cdot 10^{-5}$, a w drugim $RMSE = 1,3 \cdot 10^{-5}$).

Badania symulacyjne w układach 3D

Dla wybranych modeli matematycznych pojemności w strukturach trójwymiarowych opracowanych na podstawie metody przedstawionej w pkt 3.3. oraz dla ich aproksymacyjnej modyfikacji (pkt 4.3.2.), opracowano stosowne procedury numeryczne. Przy ich wykorzystaniu przeprowadzono wiele badań symulacyjnych, mających przede wszystkim na celu potwierdzenie poprawności wyznaczenia wartości pojemności oraz sprawdzenie zgodności wyników otrzymanych przy zastosowaniu obu metod obliczeniowych.

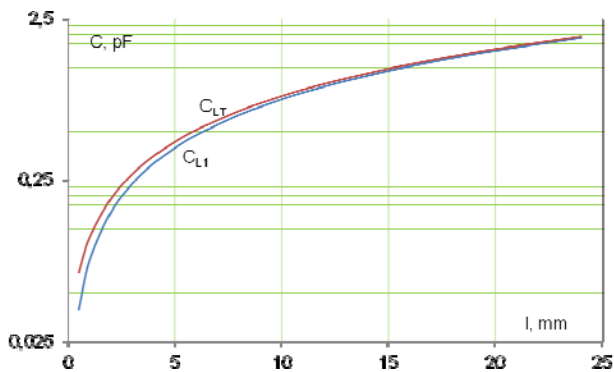
Przykładowe symulacje komputerowe zrealizowano dla układu o konfiguracji jak na rysunku 1b ze ścieżkami w kształcie kwadratu o następujących wymiarach: długości obu ścieżek $l=b_2-b_1=a_2-a_1=w=0,6$ mm, gdzie w jest szerokością ścieżek odległość między nimi $c=0,2$ mm oraz pozostałych parametrach $\varepsilon_1 = 9,08$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ i $h_1 = 0,635$ mm i $h_2 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ m. Rezultaty obliczeń określające wartość pojemności w zależności od liczby podziału ścieżek na $NH = NV$ części przedstawiono na rys. 4.33.



Rys.3. Wartość pojemności w funkcji liczby podziału ścieżek

Należy zauważyć, że wartości pojemności przy zastosowaniu wymienionych metod są bardzo zbliżone

Prowadzono również badania symulacyjne, w których porównano wyniki wartości pojemności między ścieżkami, uzyskane przy zastosowaniu modelu trójwymiarowego (układ o konfiguracji z rysunku 1b) z rezultatami obliczeń zrealizowanych na podstawie adekwatnego modelu dwuwymiarowego, w którym przyjęto taką samą, jak w modelu 3D długość ścieżek. Zależność C_{LT} (model 3D) i C_{L1} (model dwuwymiarowy) z funkcji długości ścieżek przedstawiono na rys. 4.

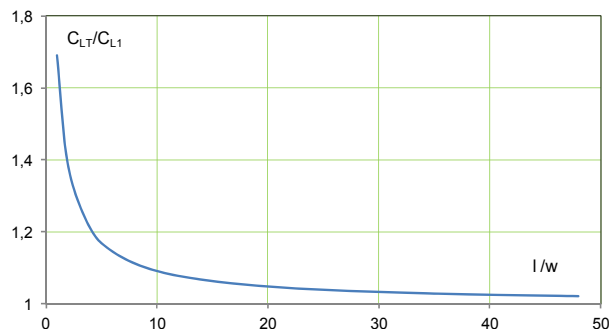


Rys.4. Wartość pojemności między ścieżkami w układzie trójwymiarowym (pojemność C_{LT}) i dwuwymiarowym (C_{L1}) w funkcji długości ścieżek l ; $w = 0,5$ mm, $c = 0,2$ mm, $\varepsilon_1 = 9,08$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$, $h_1 = 0,63$ mm, $h_2 = 0,05$ mm

W przypadku ścieżek o zbliżonym stosunku długości do szerokości ($l/w \geq 1$) wyznaczona wartość pojemności C_{LT} jest znacznie większa od C_{L1} . W miarę zwiększania długości warstw przewodzących wartości pojemności dwu- i trójwymiarowych zbliżają się do siebie, a ich stosunek zmierza do jedności, co pokazano na rysunku 5.

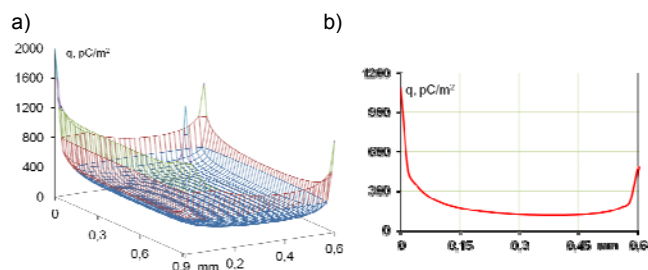
Wyższa wartość pojemności w układzie 3D wynika przede wszystkim z faktu znacznego wzrostu gęstości ładunku na granicy wszystkich czterech krawędzi ścieżek (rys.6a), podczas gdy w strukturach dwuwymiarowych wzrost gęstości występuje tylko na dwóch krawędziach (rys.6b). Gęstość ta ma tym większy wpływ na zwiększenie wartości pojemności, im stosunek l/w jest bliższy jedności. W miarę wydłużania warstw przewodzących, gęstość

ładunku na krawędziach szerokości ścieżek traci na znaczeniu, stąd też $C_{LT}/C_{L1} \rightarrow 1$.



Rys.5. Zależność stosunku pojemności C_{LT}/C_{L1} w funkcji l/w

W miarę wydłużania warstw przewodzących, gęstość ładunku na krawędziach szerokości ścieżek traci na znaczeniu, stąd też $C_{LT}/C_{L1} \rightarrow 1$.



Rys.7. Rozkład gęstości ładunku w układzie: a) trójwymiarowym, b) dwuwymiarowym

Podsumowanie

Przedstawiony model matematyczny pojemności i opracowana na tej podstawie procedura obliczania pojemności umożliwiają analizę czynników wpływających na jej wartość w badanych strukturach mikroukładu hybrydowego o zadanej konfiguracji ścieżek i określonych parametrach geometrycznych i fizycznych mikroukładu.

Opracowanie modyfikacji, polegającej a zastosowaniu aproksymacji funkcji podcałkowych kombinacją funkcji wykładniczych, pozwala na wyznaczenie całek niewłaściwych na drodze analitycznej, co radykalnie skraca czas trwania obliczeń, nie wymaga doboru górnej granicy całkowania, a ponadto daje praktycznie takie same wyniki obliczeń symulacyjnych (błąd względny < 1%).

Uwidaczniają się znaczne różnice wyników wartości pojemności obliczanej przy zastosowaniu modelu trój- i dwuwymiarowego w przypadku ścieżek o niewielkiej długości, gdy stosunek l/w rośnie, to $C_{LT}/C_{L1} \rightarrow 1$

LITERATURA

- [1] Kalita W., Sabat W., Wisz B.: Zagadnienia EMC w projektowaniu mikroelektronicznych układów hybrydowych. *Of. Wyd. Politechniki Wrocławskiej*, Wrocław 2005, s. 11-16
- [2] Kącki E.: Równania różniczkowe w zagadnieniach fizyki i techniki. *WNT*, Warszawa 1995
- [3] Dautray R., Lions J.: Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. *Integral equations and numerical methods*. Springer, vol. 4, Berlin 2000
- [4] Paul C.R.: Analysis of Multiconductor Transmission Lines. *Wiley*, New Jersey 2008

Autor: dr inż. Bogusław Wisz, Politechnika Rzeszowska, Zakład Systemów Elektronicznych i Telekomunikacyjnych, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów, E-mail: bogdanw@prz.edu.pl