

## Wykorzystanie składowych głównych z normą L1 do filtracji projekcyjnej

**Streszczenie.** W niniejszej pracy zaprezentowano zmodyfikowaną metodę nieliniowej filtracji projekcyjnej. Zaproponowana modyfikacja dotyczy problemu wyznaczenia podprzestrzeni projekcyjnej. W oryginalnej metodzie filtracji do wyznaczenia podprzestrzeni projekcyjnej wykorzystuje się metodę analizy składowych głównych (PCA), gdzie wykorzystywana jest norma L2. Norma L2 wrażliwa jest na próbki obce, stąd zaproponowano metodę PCA z normą L1 do wyznaczenia podprzestrzeni projekcyjnej jak również do wyznaczenia końcowej wartości próbki sygnału.

**Abstract.** The paper presents a modification of nonlinear state-space projections (NSSP) method. The proposed approach deals with the sub-space estimation problem. In the original NSSP method, the principal component analysis (PCA) is used for the sub-space determination. The classical PCA uses L2 norm which is sensitive to outliers. Thus, in this paper the L1 norm PCA is proposed for a sub-space determination as well as for the final value of the processed signal sample. **A modification of nonlinear state-space projections (NSSP) method**

**Słowa kluczowe:** przestrzeń fazowa, filtracja projekcyjna, nieliniowe tłumienie zakłóceń.

**Keywords:** embedded space, projective filtering, nonlinear noise reduction.

doi:10.12915/pe.2014.05.31

### Wstęp

Podczas rejestracji sygnałów o małej amplitudzie (pojedyncze mV) lub bardzo małej (dziesiątki  $\mu\text{V}$ ) rejestrowane są również zakłócenia. Amplituda zakłóceń może przekraczać amplitudę sygnału użytecznego. Do tłumienia zakłóceń wykorzystuje się filtry. Filtry liniowe z powodzeniem stosuje się w przypadkach, gdy widmo szumu nie pokrywa się z widmem sygnału użytecznego. W przypadku, gdy widmo szumu pokrywa się z widmem sygnału użytecznego filtry liniowe są praktycznie bezużyteczne. W takim przypadku, do eliminacji zakłóceń można zastosować metody z dziedziny dynamicznych systemów nieliniowych. Zwiększająca się moc obliczeniowa komputerów umożliwia stosowanie takich metod w akceptowalnym czasie [1]. Jedną z metod mającą swe korzenie w dynamicznych systemach nieliniowych jest metoda nieliniowej filtracji projekcyjnej (ang. *NSSP: Nonlinear State—Space Projection Method*). Metoda nieliniowej filtracji projekcyjnej została z powodzeniem użyta do eliminacji zakłóceń w sygnale EKG [2][3] bądź filtracji sygnałów hydrologicznych [4]. W metodzie NSSP do wyznaczenia podprzestrzeni projekcyjnej wykorzystywana jest metoda analizy składowych głównych (ang. *PCA: Principal Component Analysis*). Powszechnie stosowana metoda PCA wykorzystuje normę L2, która to norma jest wrażliwa na próbki obce (ang. *outliers*). W pracy [5] wykorzystano metodę PCA opartą o normę L1 do wyznaczenia podprzestrzeni projekcyjnej, co zwiększa odporność metody na próbki obce. W ostatnim kroku filtracji projekcyjnej wyznacza się wartość średnią ze wszystkich wystąpień przetwarzanej próbki sygnału w reprezentacji sygnału w przestrzeni fazowej. W niniejszej pracy zaproponowano, aby wartość modyfikowanej próbki sygnału była medianą wszystkich wystąpień modyfikowanej próbki w reprezentacji fazowej.

Układ niniejszej pracy jest następujący: w części Metody przedstawiono sposób odtwarzania przestrzeni fazowej dla sygnału jak również przedstawiono metodę analizy składowych głównych zarówno z normą L2 jak i normą L1. W części Eksperyment Numeryczny zaprezentowano otrzymane wyniki filtracji dla wybranych sygnałów. Wioski kończą niniejszą pracę.

### Metody

W tej części pracy przedstawione zostaną poszczególne etapy procesu filtracji projekcyjnej. W pierwszym kroku

odtworzana jest przestrzeń fazowa przetwarzanego sygnału. Przestrzeń fazowa odtwarzana jest zgodnie z twierdzeniem Takensa [6]. Następnie, w odtworzonej przestrzeni fazowej dokonywana jest korekcja każdego z jej punktów. Proces korekcji punktu składa się z następujących etapów: pierwszy etap obejmuje wyznaczenie sąsiedztwa dla przetwarzanego punktu. Następnie, na podstawie sąsiedztwa wyznaczana jest podprzestrzeń projekcyjna, na którą rzutowany jest przetwarzany punkt. Wymiar podprzestrzeni projekcyjnej jest znacznie mniejszy od wymiaru przestrzeni fazowej. Dalej odtwarzana jest wartość punktu w przestrzeni fazowej na podstawie punktu w podprzestrzeni projekcyjnej. Końcowy etap filtracji projekcyjnej obejmuje odtwarzanie wartości sygnału w dziedzinie czasu.

### Odtwarzanie przestrzeni fazowej

Metoda rekonstrukcji przestrzeni fazowej zaczerpnięta została z teorii dynamicznych systemów nieliniowych. Przestrzeń fazowa może być odtworzona stosując twierdzenie Takensa [6]. Dla sygnału  $x_N$ , punkt w odtworzonej przestrzeni fazowej jest dany w postaci:

$$(1) \quad \mathbf{x}_n = [x_n, x_{n+\tau}, \dots, x_{n+(m-1)\tau}]$$

gdzie:  $x_n$  jest przetwarzanym sygnałem,  $N$  jest długością sygnału,  $\tau$  jest opóźnieniem a  $m$  jest wymiarem zanurzeniowym. Często przyjmuje się  $\tau=1$ , stąd w dalszej części niniejszej pracy taka wartość opóźnienia będzie obowiązywała. Cały przetwarzany sygnał  $x_N$  który w dziedzinie czasu reprezentowany jest przez wektor, w przestrzeni fazowej reprezentowany jest przez macierz:

$$(2) \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \vdots & & & \vdots \\ x_{n-m+1} & x_{n-m+2} & & x_{n-1} & x_n \\ & & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_n & & x_{n+m-3} & x_{n+m-2} \\ x_n & x_{n+1} & & x_{n+m-2} & x_{n+m-1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

gdzie:  $x_n$  oznacza amplitudę sygnału w chwili  $n$ . Istotny jest fakt, że wartość  $x_n$  występuje  $m$ -krotnie w reprezentacji fazowej.

### Otoczenie i składowe główne

Niech  $\mathbf{x}^{(n)}$  będzie punktem w odtworzonej przestrzeni fazowej. Otoczenie  $I^{(n)}$  punktu  $\mathbf{x}^{(n)}$  określone jest jako

$$(3) \quad \Gamma^{(n)} = \left\{ \mathbf{x}_k \mid \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^{(n)}\|^2 < \varepsilon \right\},$$

gdzie:  $\varepsilon$  jest promieniem otoczenia,  $\|\bullet\|^2$  oznacza odległość euklidesową. Promień otoczenia powinien być tak dobrany, aby liczba kardynalna otoczenia  $I^{(n)}$  była większa od przyjętego progu  $N_{min}$ .

Analiza składowych głównych (ang. *Principal Component Analysis*) jest metodą redukcji wymiarowości danych [7]. Metoda PCA jest ortogonalną transformacją współrzędnych (cech) w przestrzeni opisującej analizowany punkt. Niech  $I^{(n)} = \{\mathbf{x}_1^{(n)}, \mathbf{x}_2^{(n)}, \dots, \mathbf{x}_K^{(n)}\}$  będzie otoczeniem punktu  $\mathbf{x}^{(n)}$ , gdzie  $\mathbf{x}^{(n)} \in \mathcal{R}^m$ . Każdy element otoczenia opisany jest za pomocą  $m$  cech powiązanych z chwilą czasu ( $i$ ). Proces wyznaczenia składowych głównych rozpoczyna się od wyznaczenia macierzy kowariancji dla scentrowanych danych, tj.

$$(4) \quad \mathbf{C}_X = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (\mathbf{x}_i^{(n)} - \bar{\mathbf{x}}^{(n)}) (\mathbf{x}_i^{(n)} - \bar{\mathbf{x}}^{(n)})^T,$$

gdzie

$$(5) \quad \bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{x}_i^{(n)},$$

jest średnią z próby,  $K=|I^{(n)}|$  jest licznością otoczenia.

Składowe główne  $\mathbf{w}_i$  ( $1 \leq i \leq d$ ) są równe wektorom własnym, które odpowiadają  $d$  największym wartościom własnym macierzy kowariancji  $\mathbf{C}_X$ . Projekcja do  $d$ -wymiarowej podprzestrzeni jest przekształceniem liniowym punktu  $\mathbf{x}^{(n)}$  w postaci:

$$(6) \quad \mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{W}^T (\mathbf{x}^{(n)} - \bar{\mathbf{x}}^{(n)}),$$

gdzie:  $\mathbf{y}^{(n)}$  jest  $d$ -wymiarową reprezentacją punktu  $\mathbf{x}^{(n)}$ ,  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d]$  jest macierzą projekcyjną. Rekonstrukcja punktu  $\mathbf{y}^{(n)}$  w  $m$ -wymiarowej przestrzeni fazowej określona jest jako

$$(7) \quad \hat{\mathbf{x}}^{(n)} = \mathbf{W} \mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{W} \mathbf{W}^T (\mathbf{x}^{(n)} - \bar{\mathbf{x}}^{(n)}) + \bar{\mathbf{x}}^{(n)}.$$

Wartość  $x_n$  występuje  $m$ -krotnie w reprezentacji fazowej, stąd, jako wartość amplitudy sygnału w dziedzinie czasu wyznacza się wartość średnią, tj.

$$(8) \quad \hat{x}(n) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{x}_i^{(n-i+1)},$$

gdzie:  $x_i^{(n-i+1)}$  oznacza  $i$ -tą składową wektora  $\mathbf{x}^{(n-i+1)}$  w przestrzeni fazowej.

### Analiza składowych głównych z normą $L1$

Problem analizy składowych głównych może być rozpatrywany z wielu równoważnych punktów widzenia: jako dekompozycja macierzy kowariancji na wartości i wektory własne, lub jako metoda liniowej estymacji podprzestrzeni [7]. W klasycznej metodzie PCA (z normą  $L2$ ) problem wyznaczenia  $d$ -wymiarowej podprzestrzeni może być rozważany jako zadanie optymalizacji w postaci

$$(9) \quad \mathbf{W}^* = \arg \max_{\mathbf{W}} \|\mathbf{W}^T \mathbf{C}_X \mathbf{W}\|_2 = \arg \max_{\mathbf{W}} \|\mathbf{W}^T \mathbf{X}\|_2$$

$$\text{przy: } \mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I}_m$$

gdzie:  $\mathbf{C}_X$  jest macierzą kowariancji,  $\mathbf{I}_m$  jest kwadratową macierzą identycznościową o wymiarze  $m \times m$ .

Rozwiązaniem (9) jest rozkład macierzy kowariancji według wartości osobliwych [8]. W sformułowaniu problemu (9) wykorzystano normę  $L2$ , która jest wrażliwa na próbki obce [9]. Stosując normę  $L1$ , która jest odporna na próbki obce, problem wyznaczania składowych głównych z normą  $L1$  można przedstawić jako

$$(10) \quad \mathbf{W}^* = \arg \max_{\mathbf{W}} \|\mathbf{W}^T \mathbf{C}_X \mathbf{W}\|_1 = \arg \max_{\mathbf{W}} \|\mathbf{W}^T \mathbf{X}\|_1$$

$$\text{przy: } \mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I}_m$$

Pierwsza składowa główna  $\mathbf{w}_1$  dla normy  $L1$  może być wyznaczona za pomocą poniższej metody [9]

1. ustal dowolną wartość  $\mathbf{w}_0 \in \mathcal{R}^m$ , taką że  $\mathbf{w}_0^T \mathbf{w}_0 = 1$ , ustal  $p=1$ ,

$$\mathbf{w}_p = \sum_{i=1}^K \text{sgn}(\mathbf{w}_{p-1}^T \mathbf{x}_i) \mathbf{x}_i$$

2.

$$\mathbf{w}_p = \frac{\mathbf{w}_p}{\|\mathbf{w}_p\|}, \quad p = p + 1$$

3. jeżeli  $\mathbf{w}_p \neq \mathbf{w}_{p-1}$  przejdź do punktu 2, w przeciwnym razie  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_p$ .

Powyższa metoda umożliwia wyznaczenie pierwszej składowej głównej. Jednakże, metoda ta może być wykorzystana do wyznaczenia dowolnej liczby składowych głównych. Do wyznaczenia pozostałych składowych głównych należy zastosować poniższą metodę [9]:

1. dla danego zbioru danych  $\mathbf{X}$ , ustal  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$ ,

2. dla  $1 \leq j \leq d$

3. modyfikuj zbiór  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{x}_i^{(j)} = \mathbf{x}_i^{(j-1)} - \mathbf{w}_{j-1} (\mathbf{w}_{j-1}^T \mathbf{x}_i^{(j-1)}), \quad (1 \leq i \leq K)$$

4. wyznacz składową główną dla zmodyfikowanego zbioru  $\mathbf{X}^{(j)}$  stosując metodę dla pierwszej składowej głównej.

Podobnie jak dla klasycznej metody PCA, w pracy [2] wykorzystano średnią arytmetyczną do wyznaczenia skorygowanej wartości amplitudy w dziedzinie czasu (8). Mając na uwadze zwiększoną odporność normy  $L1$  na próbki obce, w niniejszej pracy zaproponowano aby skorygowana wartość amplitudy w dziedzinie czasu była medianą wszystkich  $m$  wystąpień skorygowanej próbki w macierzy (2). Stąd,

$$(11) \quad \hat{x}(n) = \arg \min_{x \in \mathcal{R}} \sum_{i=1}^m \|\hat{x}_i^{(n-i+1)} - x\|_1,$$

gdzie:  $x_i^{(n-i+1)}$  oznacza  $i$ -tą składową wektora  $\mathbf{x}^{(n-i+1)}$  w przestrzeni fazowej.

### Filtracja projekcyjna z normą $L1$

Zaproponowaną metodę filtracji projekcyjnej opartej na analizie składowych głównych z normą  $L1$  można przedstawić w następujących krokach:

1. dla danego sygnału należy odtworzyć przestrzeń fazową stosując (1), ustalić wymiar podprzestrzeni projekcyjnej  $d$ ,

2. dla każdego z punktu w przestrzeni fazowej należy znaleźć takie otoczenie, aby jego licznosc była nie mniejsza od pewnego przyjętego progu  $N_{min}$ ,

3. na podstawie otoczenia każdego z punktów należy wyznaczyć podprzestrzeń projekcyjną wykorzystując metodę analizy składowych głównych z normą  $L1$ ,

4. dokonać projekcji do podprzestrzeni projekcyjnej (6),

5. odtworzyć punkt w przestrzeni fazowej (7),

6. wyznaczyć wartość amplitudy odtworzonego sygnału stosując (11).

## Eksperyment numeryczny

Celem przeprowadzonego eksperymentu numerycznego jest zbadanie wpływu sposobu odtwarzania sygnału w czasie na skuteczność zastosowanej filtracji projekcyjnej. Do filtracji wykorzystano klasyczną metodę filtracji projekcyjnej (z normą  $L_2$ ) oraz metodę wykorzystującą normę  $L_1$  do wyznaczania podprzestrzeni projekcyjnej.

W przeprowadzonym eksperymencie numerycznym przyjęto addytywny model zakłóceń, tj.

$$(12) \quad x(n) = s(n) + a \cdot v(n),$$

gdzie:  $x(n)$  jest sygnałem zakłóconym,  $s(n)$  jest sygnałem oryginalnym,  $a$  jest amplitudą składowej zakłócającej,  $v(n)$  jest szumem. Dla tak przyjętego modelu zakłóceń, stosunek sygnał-szum (SNR) jest zdefiniowany jako:

$$(13) \quad SNR = 10 \log \frac{\sigma_s^2}{a^2 \sigma_v^2},$$

gdzie:  $\sigma_s^2$  jest wariancją sygnału,  $\sigma_v^2$  jest wariancją szumu. W dalszej części pracy przyjęto, że składowa zakłócająca jest szumem o rozkładzie gaussowskim i wariancji  $\sigma_v^2=5$ .

W eksperymencie wykorzystano dwa deterministyczne sygnały: sinusoidalny oraz trójkątny, oba o częstotliwości  $f=5\text{Hz}$ , próbkowane z częstotliwością  $f_s=100\text{Hz}$ . Do każdego z sygnałów dodano składową szumową o znanej wartości parametru SNR. Do oceny jakości filtracji wykorzystano współczynnik redukcji szumu w postaci [2]:

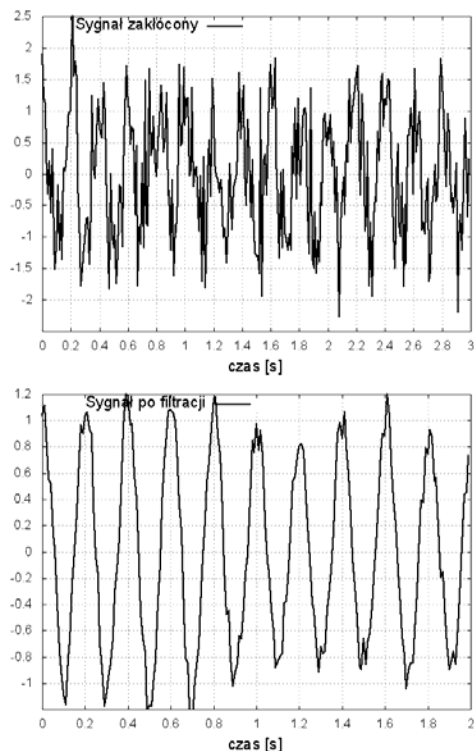
$$(14) \quad NRF = \sqrt{\frac{\|x_N - s_N\|^2}{\|y_N - s_N\|^2}},$$

gdzie:  $s_N$  jest sygnałem oryginalnym,  $x_N$  jest sygnałem zakłóconym a  $y_N$  jest sygnałem otrzymanym po filtracji.

W trakcie prowadzonych eksperymentów wartość wymiaru zanurzeniowego przyjęto  $m=51$ . Wielkość wymiaru zanurzeniowego została tak dobrana, aby długość opóźnienia obejmowała co najmniej jeden okres przetwarzanego sygnału. Minimalna wielkość sąsiedztwa była ustalona  $N_{min}=51$ . Wartości wymiaru podprzestrzeni projekcyjnej przyjęto ze zbioru wartości  $d \in \{1, 2, 5\}$ . Wartości stosunku sygnał-szum należą do zbioru wartości  $SNR \in \{10, 5, 0\} \text{ dB}$ . Każda filtracja była powtarzana 21-krotnie dla różnych realizacji składowej szumowej. Zaprezentowane wartości współczynnika redukcji szumu są wartościami średnimi. Obliczenia prowadzono w środowisku MATLAB.

Na rysunku 1 przedstawiono fragment zakłóconego sygnału sinusoidalnego oraz uzyskanego sygnału w procesie filtracji projekcyjnej z normą  $L_1$ . Wartość próbki w dziedzinie czasu była odtwarzana jako mediana wystąpień. Wartość stosunku sygnał-szum wynosi  $SNR=0\text{dB}$ . W tabeli 1 przedstawiono wartości współczynnika redukcji szumu dla zakłóconego sygnału sinusoidalnego z różnymi wartościami parametru SNR oraz różnych wymiarów podprzestrzeni projekcyjnej. Wprowadzono następujące oznaczenia współczynnika redukcji szumu:

$NRF_{11}$  – dla filtracji projekcyjnej z normą  $L_1$  oraz medianą jako wartością odtwarzaną w dziedzinie czasu,  
 $NRF_{12}$  – dla filtracji projekcyjnej z normą  $L_1$  oraz średnią jako wartością odtwarzaną w dziedzinie czasu,  
 $NRF_{21}$  – dla filtracji projekcyjnej z normą  $L_2$  oraz medianą jako wartością odtwarzaną w dziedzinie czasu,  
 $NRF_{22}$  – dla filtracji projekcyjnej z normą  $L_2$  oraz średnią jako wartością odtwarzaną w dziedzinie czasu.



Rys. 1. Fragment zakłóconego sygnału sinusoidalnego oraz sygnału po filtracji projekcyjnej z normą  $L_1$ . Stosunek sygnał-szum wynosi  $SNR=0\text{dB}$ , wartość wymiaru zanurzeniowego  $m=51$ , wymiar podprzestrzeni projekcyjnej  $d=1$  oraz minimalna wielkość sąsiedztwa  $N_{min}=51$ . Współczynnik redukcji szumu wynosi  $NRF=5,65$

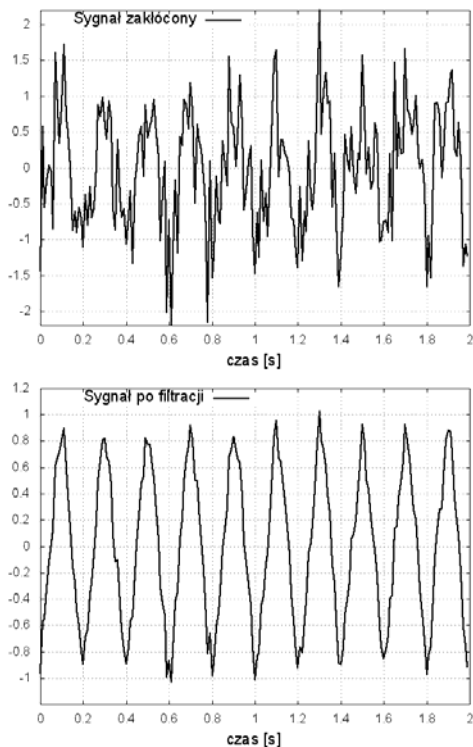
Tabela 1. Wartości współczynnika redukcji szumu  $NRF$  dla sygnału sinusoidalnego. Wartość wymiaru zanurzeniowego przyjęto  $m=51$  oraz minimalna wielkość sąsiedztwa  $N_{min}=51$

$d=1$				
SNR [dB]	$NRF_{11}$	$NRF_{12}$	$NRF_{21}$	$NRF_{22}$
10	5,7085	5,5936	6,5144	6,4507
5	5,6706	5,5560	6,4832	6,4116
0	5,6535	5,5395	6,4655	6,3999
$d=2$				
SNR [dB]	$NRF_{11}$	$NRF_{12}$	$NRF_{21}$	$NRF_{22}$
10	4,3461	4,4263	7,3318	7,288
5	4,3044	4,3869	7,3108	7,2709
0	4,2973	4,3757	7,338	7,2912
$d=5$				
SNR [dB]	$NRF_{11}$	$NRF_{12}$	$NRF_{21}$	$NRF_{22}$
10	3,591	3,5688	6,6394	6,5485
5	3,8185	3,7685	6,821	6,7596
0	3,7467	3,7089	6,5897	6,5047

Na rysunku 2 przedstawiono fragment zakłóconego sygnału trójkątnego przy  $SNR=0\text{dB}$ . Podobnie jak w przypadku sygnału sinusoidalnego, do filtracji wykorzystano metodę z normą  $L_1$  oraz medianą jako wartością odtwarzaną w dziedzinie czasu. Tabela 2 zawiera wartości współczynnika redukcji szumu dla zakłóconego sygnału trójkątnego i różnych wartości wymiaru podprzestrzeni projekcyjnej.

Zastosowanie mediany jako wartości próbki odtwarzanej w dziedzinie czasu w większości przypadków zwiększa wartość współczynnika redukcji szumu. Dotyczy to zarówno klasycznej metody filtracji projekcyjnej jak i filtracji projekcyjnej wykorzystującą normę  $L_1$ . Wraz ze wzrostem wymiaru podprzestrzeni projekcyjnej maleje skuteczność filtracji, zmiana sposobu odtwarzania wartości próbki nie ma zasadniczego znaczenia. Zastosowanie normy  $L_1$  zwiększyło skuteczność filtracji projekcyjnej przy małych wartościach współczynnika SNR ( $SNR=0\text{dB}$ ). W pewnych

przypadkach, zastosowanie mediany pogorszyło skuteczność filtracji. Mediana może być rozważana jako estymator o największej wiarygodności dla parametru przesunięcia rozkładu Laplace'a. W przeprowadzonym eksperymencie numerycznym, szum podlegał rozkładowi Gaussa. Dla pewnych przypadków szumu będącego realizacją zmiennej losowej o gaussowskim rozkładzie mediana może dać gorsze oszacowanie od średniej.



Rys.2. Fragment zakłóconego sygnału trójkątnego oraz sygnału po filtracji projekcyjnej z normą  $L1$ . Stosunek sygnał-szum wynosi  $SNR=0dB$ , wartość wymiaru zanurzeniowego  $m=51$ , wymiar podprzestrzeni projekcyjnej  $d=1$  oraz minimalna wielkość sąsiedztwa  $N_{min}=51$ . Współczynnik redukcji szumu wynosi  $NRF=4,33$

Tabela 2. Wartości współczynnika redukcji szumu  $NRF$  dla sygnału trójkątnego. Wartość wymiaru zanurzeniowego przyjęto  $m=51$  oraz minimalna wielkość sąsiedztwa  $N_{min}=51$

$d=1$				
$SNR [dB]$	$NRF_{11}$	$NRF_{12}$	$NRF_{21}$	$NRF_{22}$
10	6,9059	6,7384	8,3236	8,1476
5	4,7677	4,7903	4,9787	4,9806
0	4,5046	4,5266	4,42	4,3474
$d=2$				
$SNR [dB]$	$NRF_{11}$	$NRF_{12}$	$NRF_{21}$	$NRF_{22}$
10	4,9887	5,1079	7,853	7,6182
5	4,1549	4,2558	4,8226	4,7813
0	4,0948	4,1777	4,1047	3,9778
$d=5$				
$SNR [dB]$	$NRF_{11}$	$NRF_{12}$	$NRF_{21}$	$NRF_{22}$
10	3,5629	3,6459	6,1027	5,9601
5	3,2567	3,2809	4,1	4,0392
0	3,2537	3,2568	2,9791	2,9115

## Wnioski

Metoda filtracji projekcyjnej jest z powodzeniem stosowana w wielu dziedzinach: tłumienie zakłóceń w sygnałach biomedycznych bądź sygnałach hydrologicznych. Idea filtracji projekcyjnej oparta jest na przetwarzaniu sygnału w odtworzonej przestrzeni fazowej. Jeden z etapów przetwarzania obejmuje projekcję punktu z przestrzeni fazowej do podprzestrzeni projekcyjnej. Podprzestrzeń projekcyjna wyznaczana jest przy pomocy metody analizy składowych głównych (PCA). Klasyczna metoda PCA wykorzystuje normę  $L2$ . W niniejszej pracy zaproponowano wykorzystanie normy  $L1$  do wyznaczenia podprzestrzeni projekcyjnej. Dzięki temu zwiększona została odporność metody na próbki obce, co dla małych wartości stosunku sygnał-szum skutkuje zwiększoną skutecznością tłumienia zakłóceń. Ponadto, jako odtworzoną wartość w dziedzinie czasu wykorzystano medianę z wystąpień modyfikowanej próbki w reprezentacji w przestrzeni fazowej. Zastosowanie mediany zwiększyło skuteczność tłumienia zakłóceń zarówno dla klasycznej metody filtracji projekcyjnej jak i filtracji projekcyjnej z normą  $L1$ .

*Autor pragnie wyrazić swoje podziękowania dla PT Recenzentów za uwagi które wpłynęły na finalną postać niniejszej pracy.*

*Obliczenia wykonano przy użyciu klastra obliczeniowego Ziemowit (<http://www.ziemowit.hpc.polsl.pl>) znajdującego się na wyposażeniu Laboratorium Biologii Obliczeniowej i Bioinformatyki, Centrum Biotechnologii Politechniki Śląskiej w Gliwicach, zakupionego w ramach projektu Śląska BIO-FARMA, nr POIG.02.01.00-00-166/08.*

## LITERATURA

- [1] Kantz H., Schreiber T., Nonlinear time series analysis, Cambridge Univ. Press, 2004
- [2] Schreiber T., Kaplan D., Nonlinear noise reduction for electrocardiograms, Chaos, Vol. 6, pp.87-92, 1996.
- [3] Kotas M., Projective filtering of time warped ECG beats, Comp. In Biology and Medicine, 38 (2008), 127-137
- [4] Elshorbagy A., Simonovic S.P., Panu U.S., Noise reduction in chaotic hydrologic time series: facts and doubts, J. Hydrology, 256 (2002), 147-165
- [5] Nie F., Huang H. et.al, Robust principal component analysis with non-greedy  $l_1$  norm maximization, Proc. 22<sup>nd</sup> Int'l Conf. Artificial Intelligence, 2011
- [6] Takens E., Detecting strange attractors in turbulence, Lecture Notes in Math, 898 (1981), 366-381
- [7] Jolliffe I.T., Principal component analysis, Springer, New York, 2002
- [8] Golub G. Van Loan Ch., Matrix Computation, The John Hopkins Univ. Press, 1996
- [9] Kwak N., Principal component analysis based on  $L1$  norm maximization, IEEE Trans PAMI, 9 (2008), vol. 30, 1672-1680

*Autor: dr inż. Tomasz Przybyła, Politechnika Śląska, Instytut Elektroniki, Zakład Elektroniki Biomedycznej, ul. Akademicka 16, 44-100 Gliwice, E-mail: Tomasz.Przybyla@polsl.pl*