

Metoda analizy stacjonarnego pola termicznego w szynoprzewodzie rurowym ze zmiennym współczynnikiem przejmowania ciepła na jego powierzchni

Streszczenie. W pracy analizowano stacjonarne pole termiczne w szynoprzewodzie rurowym DC ze zmiennym współczynnikiem przejmowania ciepła na jego zewnętrznej powierzchni. Zakładano różne funkcje modelujące współczynnik przejmowania ciepła z powierzchni zewnętrznej. Do rozwiązania dwuwymiarowego zagadnienia brzegowego opracowano analityczną metodę. Funkcje własne wyznaczono metodą rozdzielania zmiennych. Z kolei nieznanne współczynniki funkcji własnych i stałe obliczono numerycznie. Przeprowadzono dyskusję otrzymanych rezultatów z uwzględnieniem zmiany współczynnika przejmowania ciepła. Wyznaczono również dopuszczalny prąd długotrwały.

Abstract. In the paper the stationary thermal field was analyzed in a tabular busbar DC with variable coefficient of the heat transfer on the external surface. Different functions were considered modeling heat transfer coefficient from the external surface. An analytical method was developed to solve the two-dimensional boundary problem. Eigenfunctions of the problem were determined by the separation of variables. The unknown coefficients of eigenfunctions and the constants were computed numerically. The discussion of the achieved results were carried out taking into account a variable coefficient of the heat transfer. The steady-state currents were determined, as well. (The method of analysis of the stationary field in a tabular busbar DC with the variable heat transfer coefficient on its surface).

Słowa kluczowe: zmienny współczynnik przejmowania ciepła, szynoprzewód rurowy, stacjonarne pole termiczne, metody analityczne.

Keywords: variable coefficient of the heat transfer, tabular busbar, stationary thermal field, analytical methods.

doi:10.12915/pe.2014.07.14

Wstęp

Jak wykazują wyniki badań wielu autorów [1], [2], intensywność konwekcji wokół poziomo ułożonych ciał w kształcie walca zależy od położenia punktu na ich obwodzie. Nad górnym punktem układu formuje się pewien rodzaj strugi cieplnej (rys. 1), która skutkuje gorszym oddawaniem ciepła na górze i lepszym na dole. Zjawisko to można modelować uzależniając współczynnik całkowitego przejmowania ciepła od współrzędnej kątowej. Przy takim podejściu nie można przyjąć założenia o osiowej symetrii pola. Przy dostatecznie dużej długości układu względem jego średnicy, brzegowe zagadnienie modelu staje się dwuwymiarowe.

W publikacjach [3], [4] autorzy uwzględnili wyżej opisane zjawisko. W [3] numerycznie obliczono niestalone pole termiczne kabla DC przy zmiennym współczynniku przejmowania ciepła na jego obwodzie. Z kolei w [4] przedstawiono analityczną metodę wyznaczania stacjonarnego pola termicznego gołego przewodu, również ze zmiennym współczynnikiem przejmowania ciepła. W niniejszej pracy rozszerzono zakres metody analitycznej rozpatrując konfigurację pierścieniową zamiast kołowej [4]. Umożliwiło to analizę stacjonarnego pola w szynoprzewodzie rurowym. Podobnie jak w [3], [4] zakładano przy tym zmienny współczynnik przejmowania ciepła na obwodzie. Należy tutaj wspomnieć o wielu zaletach metod analitycznych, w których wyniki obliczeń opisane są wzorami. Dostarczają one dużo informacji ułatwiających m. in. dyskusję nad wpływem poszczególnych parametrów jak też interpretację fizyczną otrzymanych rezultatów. W zaproponowanej metodzie funkcje własne rozwiązania wyznaczono analitycznie. Z kolei nieznanne współczynniki tych funkcji oraz stałe otrzymano rozwiązując odpowiedni układ równań algebraicznych.

Brzegowe zagadnienie termicznego pola modelu

Przedmiotem badań jest szynoprzewód rurowy DC, którego przekrój poprzeczny pokazano na rys. 1. Przyjęto, że układ jest umieszczony w powietrzu o temperaturze T_o i jest osłonięty od bezpośredniego promieniowania słonecznego. Ponadto w analizie rozważanego problemu przyjęto stałe i uśrednione parametry materiałowe.

Zagadnienie brzegowe modelu dogodnie jest przedstawić względem przyrostu temperatury $v(r, \varphi)$ odniesionego do temperatury otoczenia T_o

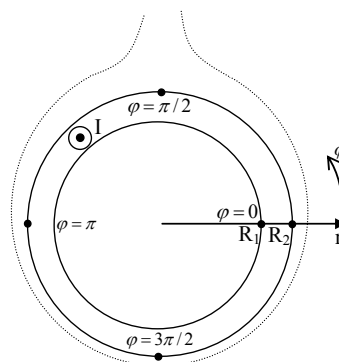
$$(1) \quad v(r, \varphi) = T(r, \varphi) - T_o,$$

gdzie: $T(r, \varphi)$ - stacjonarny rozkład pola temperatury. Przy założeniu, że długość szynoprzewodu jest znacznie większa od jego średnicy i po przyjęciu zmiennych warunków chłodzenia na jego zewnętrznym obwodzie, przyrost (1) jest opisany dwuwymiarowym równaniem przewodnictwa cieplnego [5], [6]

$$(2) \quad \frac{\partial^2 v(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = -\frac{g}{\lambda}$$

dla $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, gdzie:

R_1 - wewnętrzny promień szynoprzewodu, R_2 - zewnętrzny promień szynoprzewodu, λ - cieplna przewodność właściwa, r - współrzędna radialna, φ - współrzędna kątowa, $g = \rho I^2 / S^2$ - wydajność przestrzennych źródeł ciepła, ρ - oporność właściwa, I - natężenie prądu DC, S - pole przekroju poprzecznego szynoprzewodu.



Rys. 1. Model szynoprzewodu rurowego wraz z warstwą przyścienną

W niniejszej pracy analizowano pole termiczne w modelu generowane prądem stałym DC. Warto dodać, że również można z pewnym przybliżeniem rozwiązać rozważane zagadnienie przy założeniu prądu przemiennego AC. W tym celu należy pomnożyć wydajność źródeł g (wyżej podaną) dodatkowo przez współczynnik k_s [7] uwzględniający naskórkowość (który można odczytać z odpowiednich tabel zamieszczonych np. w [7]).

W rozpatrywanym szynoprzewodzie przyjęto, że zewnętrzna powierzchnia ($r=R_2$) wymienia ciepło za pośrednictwem konwekcji naturalnej oraz promieniowania. Wspomnianą wymianę opisuje brzegowy warunek Hankela [2]

$$(3) \quad -\lambda \frac{\partial v(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = \alpha(\varphi) [v(R_2, \varphi)] \quad \text{dla } 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Występujący w równaniu (3) całkowity współczynnik przejmowania ciepła $\alpha(\varphi)$ zależy od położenia rozpatrywanego punktu na obwodzie układu.

Na wewnętrznej powierzchni szynoprzewodu ($r=R_1$) również przyjęto, że ciepło jest wymieniane przez konwekcję i promieniowanie, ale ze stałym współczynnikiem przejmowania ciepła

$$(4) \quad \lambda \frac{\partial v(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \alpha_w [v(R_1, \varphi)] \quad \text{dla } 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

gdzie: α_w - współczynnik przejmowania ciepła na wewnętrznej powierzchni szynoprzewodu. Równania (1-4) tworzą brzegowe zagadnienie poszukiwanego pola.

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego

Rozwiązaniem (2) jest superpozycja całek: szczególnej równania niejednorodnego (Poissona) oraz ogólnej równania jednorodnego (Laplace'a). Całka szczególna jest znana z tablicy zamieszczonej w [8]. Z kolei całkę ogólną, po wyzerowaniu prawej strony (2) wyznaczono metodą rozdzielania zmiennych [6]. Po wyeliminowaniu rozwiązań niefizycznych otrzymano

$$(5) \quad v(r, \varphi) = -\frac{gr^2}{4\lambda} + A \ln(r) + B + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) [E_n \cos(n\varphi) + F_n \sin(n\varphi)]$$

dla $R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, gdzie:

A, B - stałe, C_n, D_n, E_n, F_n - współczynniki funkcji własnych.

Następnie wykorzystując brzegowy warunek Hankela (4) zmniejszono liczbę stałych oraz współczynników rozwiązania (5). Stałą B z (5) wyeliminowano w wyniku podstawienia (5) do (4) i scałkowania otrzymanej zależności względem współrzędnej kątowej φ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Z kolei liczbę nieznaną współczynników w (5) zmniejszono w ten sposób, że ponownie podstawiono (5) do (4). Następnie, tak otrzymaną zależność pomnożono przez $\cos(m\varphi)$, po czym scałkowano obustronnie względem współrzędnej kątowej φ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Wykorzystano przy tym ortogonalność układu funkcji $\{\cos(m\varphi), \sin(m\varphi)\}$. W rezultacie otrzymano

$$(6) \quad v(r, \varphi) = -\frac{g}{4\lambda} (r^2 - R_1^2) - \frac{gR_1}{2\alpha_w} + A \left(\ln\left(\frac{r}{R_1}\right) + \frac{\lambda}{R_1 \alpha_w} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(1 + \left(\frac{R_1}{r}\right)^{2n} \frac{n\lambda - \alpha_w R_1}{n\lambda + \alpha_w R_1} \right) [G_n \cos(n\varphi) + H_n \sin(n\varphi)]$$

dla $R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

W celu wyznaczenia G_n, H_n oraz stałej A ograniczono sumowanie szeregu (6) do skończonej liczby L wyrazów oraz podstawiono (6) do brzegowego warunku Hankela (3). W wyniku tego otrzymano

$$(7) \quad -\frac{gR_2}{2\lambda} + \frac{A}{R_2} + \sum_{n=1}^L n R_2^{n-1} \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n} \frac{n\lambda - \alpha_w R_1}{n\lambda + \alpha_w R_1} \right) (G_n \cos(n\varphi) + H_n \sin(n\varphi)) = -\frac{\alpha(\varphi)}{\lambda} \left[-\frac{g}{4\lambda} (R_2^2 - R_1^2) - \frac{gR_1}{2\alpha_w} + A \left(\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{\lambda}{R_1 \alpha_w} \right) + \sum_{n=1}^L R_2^n \left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n} \frac{n\lambda - \alpha_w R_1}{n\lambda + \alpha_w R_1} \right) (G_n \cos(n\varphi) + H_n \sin(n\varphi)) \right]$$

Tak otrzymaną zależność (7) pomnożono przez $\cos(m\varphi)$ i scałkowano stronami względem współrzędnej kątowej φ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Tym sposobem otrzymano równanie (8a) dla $m=1, 2, \dots, L$. Kolejne równanie otrzymano przemnażając (7) przez $\sin(m\varphi)$ i całkując stronami względem tej samej współrzędnej i w tym samym przedziale jak wyżej. W rezultacie dochodzi się do równania (8b) dla $m=1, 2, \dots, L$. Ostatnie równanie (8c) otrzymano w wyniku całkowania zależności (7) obustronnie względem współrzędnej kątowej φ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Przy obliczaniu niektórych całek występujących w (8a,b) wykorzystano ortogonalność układu funkcji $\{\cos(m\varphi), \sin(m\varphi)\}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. W rezultacie zależności (8a-c) tworzą układ $2L+1$ równań względem G_n, H_n, A

$$(8a) \quad \sum_{n=1}^L G_n I_1(m, n) + \sum_{n=1}^L H_n I_2(m, n) + A \frac{1}{\lambda} \left(\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\lambda}{R_1 \alpha_w} \right) I_3(m) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{g}{4\lambda} (R_2^2 - R_1^2) + \frac{gR_1}{2\alpha_w} \right) I_3(m) \quad m=1, 2, \dots, L,$$

$$(8b) \quad \sum_{n=1}^L G_n I_4(m, n) + \sum_{n=1}^L H_n I_5(m, n) + A \frac{1}{\lambda} \left(\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\lambda}{R_1 \alpha_w} \right) I_6(m) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{g}{4\lambda} (R_2^2 - R_1^2) + \frac{gR_1}{2\alpha_w} \right) I_6(m) \quad m=1, 2, \dots, L,$$

$$(8c) \quad \sum_{n=1}^L G_n I_7(n) + \sum_{n=1}^L H_n I_8(n) + A \left(\frac{2\pi}{R_2} + \frac{1}{\lambda} \left(\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\lambda}{R_1 \alpha_w} \right) \right) I_9 = \frac{\pi g R_2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{g}{4\lambda} (R_2^2 - R_1^2) + \frac{gR_1}{2\alpha_w} \right) I_9$$

gdzie:

(9a)

$$I_1(m, n) = \frac{R_2^n}{\lambda} \left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n} \frac{n\lambda - \alpha_w R_1}{n\lambda + \alpha_w R_1} \right) \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) \cos(n\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi \quad \text{dla } m \neq n,$$

$$(9b) \quad I_4(m, n) = \frac{R_2^m}{\lambda} \left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2m} \frac{m\lambda - \alpha_w R_1}{m\lambda + \alpha_w R_1} \right) \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) \cos^2(m\varphi) d\varphi + m\pi R_2^{m-1} \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2m} \frac{m\lambda - \alpha_w R_1}{m\lambda + \alpha_w R_1} \right) \quad \text{dla } m = n,$$

(9c)

$$I_2(m, n) = \frac{R_2^n}{\lambda} \left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n} \frac{n\lambda - \alpha_w R_1}{n\lambda + \alpha_w R_1} \right) \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) \sin(n\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi,$$

$$(9d) I_3(m) = \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi,$$

(10a)

$$I_4(m, n) = \frac{R_2^n}{\lambda} \left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2n} \frac{n\lambda - \alpha_w R_1}{n\lambda + \alpha_w R_1} \right) \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) \cos(n\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi,$$

(10b)

$$I_5(m, n) = \frac{R_2^n}{\lambda} \left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2n} \frac{n\lambda - \alpha_w R_1}{n\lambda + \alpha_w R_1} \right) \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) \sin(n\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi$$

dla $m \neq n$,

$$(10c) I_5(m, n) = \frac{R_2^m}{\lambda} \left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2m} \frac{m\lambda - \alpha_w R_1}{m\lambda + \alpha_w R_1} \right) \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) \sin^2(m\varphi) d\varphi +$$

$$+ m\pi R_2^{m-1} \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2m} \frac{m\lambda - \alpha_w R_1}{m\lambda + \alpha_w R_1} \right) \text{ dla } m = n,$$

$$(10d) I_6(m) = \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi,$$

$$(11a) I_7(n) = \frac{R_2^n}{\lambda} \left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2n} \frac{n\lambda - \alpha_w R_1}{n\lambda + \alpha_w R_1} \right) \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi,$$

$$(11b) I_8(n) = \frac{R_2^n}{\lambda} \left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2n} \frac{n\lambda - \alpha_w R_1}{n\lambda + \alpha_w R_1} \right) \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi,$$

$$(11c) I_9 = \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) d\varphi.$$

Obliczenie całek (9-11) przy danym $\alpha(\varphi)$ prowadzi do wyznaczenia nieznanych współczynników G_n, H_n oraz stałej A z układu równań (8). Wyniki obliczeń całek (9-11) dla trzech różnych funkcji $\alpha(\varphi)$ zamieszczono w dodatku. W ten sposób określono brakujące elementy w zależności (6). Ostatecznie, rozwiązanie otrzymuje się po dodaniu temperatury otoczenia T_o do (6) według (1).

Przykłady obliczeniowe

Jako przykład obliczeniowy wybrano aluminiowy szynoprzewód rurowy. Przyjęto następujące dane: $R_1=0,02 \text{ m}$, $R_2=0,025 \text{ m}$, $\lambda=229 \text{ W/(mK)}$, $\alpha_w=4 \text{ W/(m}^2\text{K)}$, $\rho=4 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$, $T_o=25 \text{ }^\circ\text{C}$, $S=706,5 \text{ mm}^2$, $L=15$. Ponadto do obliczeń przyjęto trzy różne funkcje $\alpha(\varphi)$ modelujące całkowity współczynnik przejmowania ciepła z powierzchni zewnętrznej $r=R_2$, obejmującego zarówno część konwekcyjną jak i radiacyjną. Pierwszą aproksymację $\alpha_1(\varphi)$ opracowano na podstawie [9]. Stosunkowo dokładnie modelując ona wpływ warstwy przysięennej wokół powierzchni zewnętrznej szynoprzewodu.

(12)

$$\alpha_1(\varphi) = (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) \left(1 - e^{-\frac{\varphi - \pi/2}{B}} \right) + \alpha_{\min} \text{ dla } \varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle,$$

$$\alpha_1(\varphi) = (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) \left(1 - e^{-\frac{-\varphi + \pi/2}{B}} \right) + \alpha_{\min} \text{ dla } \varphi \in \langle \pi/2, 3\pi/2 \rangle,$$

$$\alpha_1(\varphi) = (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) \left(1 - e^{-\frac{\varphi - 5\pi/2}{B}} \right) + \alpha_{\min} \text{ dla } \varphi \in \langle 3\pi/2, 2\pi \rangle,$$

gdzie:

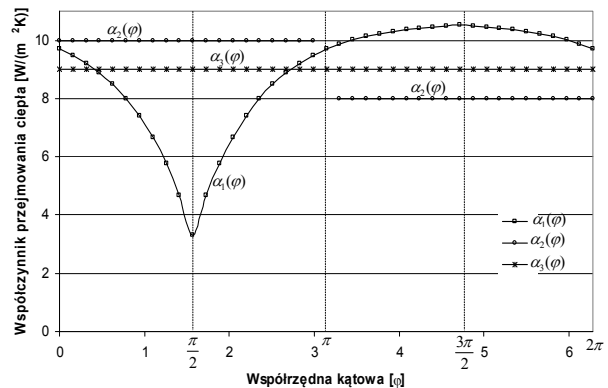
$$\alpha_{\max} = 10,65 \text{ W/(m}^2\text{K)}, \alpha_{\min} = 3,33 \text{ W/(m}^2\text{K)}, B=0,77.$$

Powyższe wzory (12) m. in. uwzględniają średnicę szynoprzewodu jak też odpowiednie liczby kryterialne.

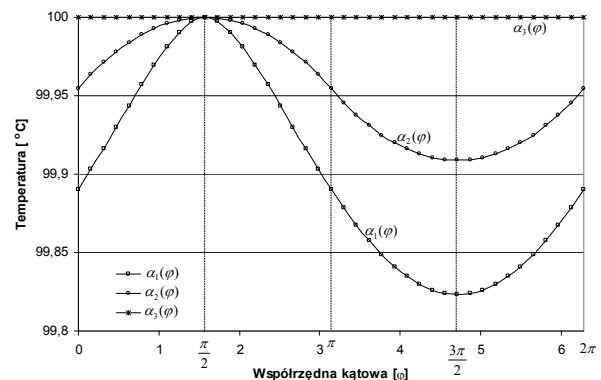
W drugiej aproksymacji $\alpha_2(\varphi)$ przyjęto stałe (lecz różne) wartości współczynnika na górnej i dolnej połowie szynoprzewodu

$$(13) \alpha_2(\varphi) = \begin{cases} 8 \text{ W/(m}^2\text{K)} & \text{dla } 0 < \varphi < \pi \\ 10 \text{ W/(m}^2\text{K)} & \text{dla } \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Powyższa zależność modeluje lepsze oddawanie ciepła przez dolną powierzchnię szynoprzewodu niż przez górną. Jako trzeci przypadek rozpatrzono jednakową wymianę ciepła na powierzchni $r=R_2$ zakładając $\alpha_3(\varphi)=const=9 \text{ W/(m}^2\text{K)}$. We wszystkich wymienionych wyżej współczynnikach przejmowania ciepła, składowa radiacyjna jest stała i wynosi $\alpha_{rad}=2,17 \text{ W/(m}^2\text{K)}$. Wykresy $\alpha_1(\varphi), \alpha_2(\varphi), \alpha_3(\varphi)$ w funkcji współrzędnej kątowej pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Współczynniki przejmowania ciepła $\alpha_1(\varphi)$, $\alpha_2(\varphi)$, $\alpha_3(\varphi)=const$ w funkcji współrzędnej kątowej



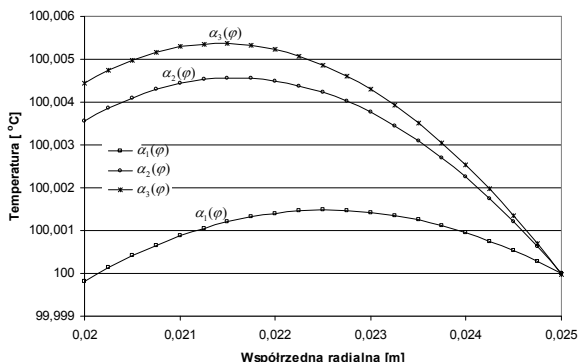
Rys. 3. Rozkłady temperatury na zewnętrznym obwodzie szynoprzewodu ($r=R_2$) w funkcji współrzędnej kątowej przy obciążeniu prądem dopuszczalnie długotrwałym

Ważnym parametrem szynoprzewodu jest dopuszczalny prąd długotrwały. W związku z tym, wyznaczono jego wartości, zakładając maksymalną dopuszczalną temperaturę powierzchni zewnętrznej szynoprzewodu $T_{il}=100^\circ\text{C}$ dla $\alpha_1(\varphi), \alpha_2(\varphi), \alpha_3(\varphi)$. Odpowiedni algorytm wyznaczania wyżej podanego prądu zamieszczono w pracy [4].

W programie Mathematica 7.0 [10] opracowano program wyznaczający rozkłady pola temperatury szynoprzewodu oraz obliczający prądy dopuszczalnie długotrwałe.

Na rys. 3 pokazano rozkłady temperatury na zewnętrznym obwodzie szynoprzewodu ($r=R_2$) w funkcji współrzędnej kątowej przy obciążeniu układu prądem dopuszczalnie długotrwałym. Rys. 4 ilustruje rozkłady

temperatury w funkcji współrzędnej radialnej przy stałej wartości współrzędnej kątowej dla $\varphi=\pi/2$ również przy obciążeniu prądem dopuszczalnie długotrwałym. Z kolei w tab. 1 zestawiono dopuszczalne prądy długotrwałe dla wszystkich rozpatrywanych współczynników przejmowania ciepła.

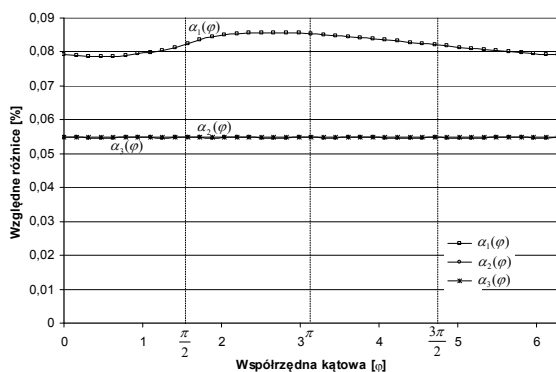


Rys. 4. Rozkłady temperatury w szynoprzewodzie w funkcji współrzędnej radialnej dla $\varphi=\pi/2$ przy obciążeniu prądem dopuszczalnie długotrwałym

Dokonano również weryfikacji opracowanej metody. W tym celu otrzymane wyniki porównano z obliczeniami wykonanymi metodą elementów skończonych FE [11], [12]. Stanowi ona podstawę profesjonalnego programu NISA v.16 [13]. Dwuwymiarowy model szynoprzewodu aproksymowano siatką składającą się z 800 czworokątnych elementów o 2643 węzłach położonych w wierzchołkach i w połowie boków wzmiankowanych figur. Dla modelu z $\alpha_1(\varphi)$, zadawano różne współczynniki przejmowania ciepła na zewnętrznych krawędziach modelu (lecz w obrębie jednej krawędzi zakładano stały obliczony według (12) przy $\Delta\varphi=const.$). Na rys. 5 zilustrowano względne różnice rozkładu temperatury

$$(14) \quad 100\% \frac{T_{FE}(R_2, \varphi) - T_A(R_2, \varphi)}{T_{FE}(R_2, \varphi)}, \text{ gdzie:}$$

$T_{FE}(R_2, \varphi)$ - rozkład temperatury uzyskany metodą elementów skończonych, $T_A(R_2, \varphi)$ - rozkład temperatury uzyskany opracowaną metodą analityczną.



Rys. 5. Względne różnice rozkładów temperatury otrzymanych metodą elementów skończonych i analityczną na obwodzie szynoprzewodu ($r=R_2$) w funkcji współrzędnej kątowej

Wnioski

A) Analizując rozkłady w funkcji współrzędnej kątowej $T(R_2, \varphi)$ obserwuje się dla $\alpha_1(\varphi)$ oraz $\alpha_2(\varphi)$ pewne różnice pomiędzy wartościami temperatury w najwyższej ($\varphi=\pi/2$) i najniższej położonym punkcie ($\varphi=3\pi/2$) (rys. 3). Wynika to z

wplywu przyściennej warstwy powstałej wokół powierzchni zewnętrznej szynoprzewodu. Jak widać z rys. 3, przy dokładniejszym modelowaniu tzn. przy $\alpha_1(\varphi)$, wspomniane wyżej różnice są większe niż przy $\alpha_2(\varphi)$. Przy stałej zaś wartości współczynnika przejmowania ciepła tzn. dla $\alpha_3(\varphi)$, czyli pominięciu wpływu warstwy przyściennej, temperatura powierzchni $r=R_2$ jest równomierna (rys. 3 dla $\alpha_3(\varphi)=const.$). Analizując następnie rozkłady temperatury w funkcji współrzędnej radialnej (przy stałej wartości współrzędnej kątowej) widać, że wykresy (rys. 4) mają kształty parabol, z maksimum wewnątrz szynoprzewodu dla $\alpha_1(\varphi)$, $\alpha_2(\varphi)$, $\alpha_3(\varphi)$. Z przedstawionych rozkładów pola (rys. 3,4) można dostrzec niewielkie zmiany temperatury w modelu, co spowodowane jest dużą wartością cieplnej przewodności aluminium.

Tabela 1. Dopuszczalne prądy długotrwałe dla trzech rozpatrywanych współczynników przejmowania ciepła

Model współczynnika przejmowania ciepła	Dopuszczalny prąd długotrwały I_{II} [A]
$\alpha_1(\varphi)$	1584,3
$\alpha_2(\varphi)$	1592,4
$\alpha_3(\varphi)$	1592,9

B) Z tabeli 1 wynika, że dopuszczalne prądy długotrwałe dla wszystkich rozpatrywanych współczynników przejmowania ciepła $\alpha_1(\varphi)$, $\alpha_2(\varphi)$, $\alpha_3(\varphi)=const.$ są do siebie zbliżone. Jest to głównie spowodowane niemal taką samą średnią wartością funkcji $\alpha_1(\varphi)$ i $\alpha_2(\varphi)$ i $\alpha_3(\varphi)$ na obwodzie szynoprzewodu. Z powyższego wynika, że do obliczeń można przyjmować uśrednioną wartość współczynnika przejmowania ciepła na obwodzie szynoprzewodu. Takie podejście znacznie upraszcza analizę powodując, że dwuwymiarowe modelowe zagadnienie brzegowe staje się jednowymiarowe.

C) Względne różnice (14) rozkładów temperatury obliczonych metodą elementów skończonych (FE) i analityczną (A) są największe przy współczynniku przejmowania ciepła $\alpha_1(\varphi)$ (rys. 5 dla $r=R_2$). Maksimum wynosi ok. 0.088%. Przy pozostałych współczynnikach tzn. przy $\alpha_2(\varphi)$ i $\alpha_3(\varphi)=const.$ rozważane wyżej różnice są mniejsze. Z kolei w innych punktach szynoprzewodu ($R_1 < r < R_2$) rozpatrywane różnice są niemal takie same lub mniejsze od tych pokazanych na rys. 5. Opracowaną metodę należy więc uznać za zweryfikowaną liczbowo.

Niniejszy artykuł przygotowano w ramach projektu S/WE/1/13 realizowanego w Katedrze Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii Politechniki Białostockiej.

Dodatek

A) Wyniki obliczenia całek (9-11) dla współczynnika przejmowania ciepła $\alpha_1(\varphi)$:

$$(A1) \quad I_1(m, n) = \frac{B(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})R_2^n}{\lambda} f(n) \left[\frac{e^{\frac{\pi}{B} \cos \frac{3\pi(m-n)}{2}} - \cos \frac{(m-n)\pi}{2}}{B^2(m-n)^2 + 1} + \frac{e^{\frac{\pi}{B} \cos \frac{3\pi(m+n)}{2}} - \cos \frac{(m+n)\pi}{2}}{B^2(m+n)^2 + 1} \right]$$

dla $m \neq n$,

(A2)

$$I_1(m, n) = f(m) \frac{R_2^m}{\lambda} \frac{e^{-\frac{\pi}{B}}}{4B^2 m^2 + 1} \left[B(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})(1 + 4B^2 m^2 + \cos(3m\pi)) + e^{\frac{\pi}{B}}((4B^2 m^2 + 1)(\pi\alpha_{\max} - B(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})) - B(-1)^m(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})) \right] + \pi m R_2^{m-1} p(m)$$

dla $m = n$,

(A3)

$$I_2(m, n) = \frac{B(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})R_2^n}{\lambda} f(n) e^{-\frac{\pi}{B}} \left[\frac{\sin \frac{\pi(m-n)}{2} (e^{\frac{\pi}{B}} - 1 - 2\cos((m-n)\pi))}{B^2(m-n)^2 + 1} + \frac{\sin \frac{3\pi(m+n)}{2} - e^{\frac{\pi}{B}} \sin \frac{(m+n)\pi}{2}}{B^2(m+n)^2 + 1} \right]$$

$$(A4) \quad I_3(m) = 2Be^{-\frac{\pi}{B}}(\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) \frac{2(-1)^m - 1 - e^{\frac{\pi}{B}}}{B^2 m^2 + 1} \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right),$$

$$(A5) \quad I_4(m, n) = \frac{B(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})R_2^n}{\lambda} f(n) \left[\frac{e^{-\frac{\pi}{B}} \sin \frac{3\pi(m-n)}{2} - \sin \frac{(m-n)\pi}{2}}{B^2(m-n)^2 + 1} + \frac{e^{-\frac{\pi}{B}} \sin \frac{3\pi(m+n)}{2} - \sin \frac{(m+n)\pi}{2}}{B^2(m+n)^2 + 1} \right],$$

$$(A6) \quad I_5(m, n) = \frac{B(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})R_2^n}{\lambda} f(n) \left[\frac{e^{-\frac{\pi}{B}} \cos \frac{3\pi(m-n)}{2} - \cos \frac{(m-n)\pi}{2}}{B^2(m-n)^2 + 1} + \frac{\cos \frac{\pi(m+n)}{2} - e^{-\frac{\pi}{B}} \cos \frac{3\pi(m+n)}{2}}{B^2(m+n)^2 + 1} \right]$$

dla $m \neq n$,

(A7)

$$I_5(m, n) = f(m) \frac{R_2^m}{\lambda} \frac{e^{-\frac{\pi}{B}}}{4B^2 m^2 + 1} \left[B(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})(1 + 4B^2 m^2 - (-1)^m) + e^{\frac{\pi}{B}}(B(-1)^m(\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) + (4B^2 m^2 + 1)(\pi\alpha_{\max} - B(\alpha_{\max} - \alpha_{\min}))) \right] + \pi m R_2^{m-1} p(m)$$

dla $m = n$,

$$(A8) \quad I_6(m) = 2Be^{-\frac{\pi}{B}}(\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) \frac{1 + 2(-1)^m - e^{\frac{\pi}{B}}}{B^2 m^2 + 1} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right),$$

(A9)

$$I_7(n) = \frac{2B(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})R_2^n}{\lambda} f(n) e^{-\frac{\pi}{B}} \frac{2(-1)^n - 1 - e^{\frac{\pi}{B}}}{B^2 n^2 + 1} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

(A10)

$$I_8(n) = \frac{2B(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})R_2^n}{\lambda} f(n) e^{-\frac{\pi}{B}} \frac{1 + 2(-1)^n - e^{\frac{\pi}{B}}}{B^2 n^2 + 1} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$(A11) \quad I_9 = 2B(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})(e^{-\frac{\pi}{B}} - 1) + 2\pi\alpha_{\max}.$$

B) Wyniki obliczenia całek (9-11) dla współczynnika przejmowania ciepła $\alpha_2(\varphi)$:

(A12)

$$I_1(m, n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \neq n \\ \frac{R_2^m}{\lambda} f(m) \frac{\pi(\alpha_{\max} + \alpha_{\min})}{2} + \pi m R_2^{m-1} p(m) & \text{dla } m = n, \end{cases}$$

(A13)

$$I_2(m, n) = \begin{cases} \frac{R_2^n}{\lambda} f(n) \frac{n(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})}{(n^2 - m^2)} ((-1)^{m+n} - 1) & \text{dla } m \neq n \\ 0 & \text{dla } m = n, \end{cases}$$

(A14)

$$I_3(m) = 0,$$

(A15)

$$I_4(m, n) = \begin{cases} \frac{R_2^n}{\lambda} f(n) \frac{m(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})}{(m^2 - n^2)} ((-1)^{m+n} - 1) & \text{dla } m \neq n \\ 0 & \text{dla } m = n, \end{cases}$$

(A16)

$$I_5(m, n) = I_1(m, n),$$

$$(A17) \quad I_6(m) = \frac{2[\alpha_{\max} + \alpha_{\min} + 2(-1)^m \alpha_{\max}] \sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{m},$$

(A18),

$$I_7(n) = 0,$$

$$(A19) \quad I_8(n) = \frac{R_2^n}{\lambda} f(n) \frac{2[\alpha_{\max} + \alpha_{\min} + 2(-1)^n \alpha_{\max}] \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n},$$

(A20)

$$I_9 = \pi(\alpha_{\max} + \alpha_{\min}).$$

C) Wyniki obliczenia całek (9-11) dla współczynnika przejmowania ciepła $\alpha_3(\varphi) = \text{const} = \alpha$:

$$(A21) \quad I_1(m, n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \neq n \\ \frac{R_2^m}{\lambda} f(m) \alpha \pi + \pi m R_2^{m-1} p(m) & \text{dla } m = n, \end{cases}$$

(A22)

$$I_2(m, n) = 0,$$

(A23)

$$I_3(m) = 0,$$

(A24)

$$I_4(m, n) = 0,$$

(A25)

$$I_5(m, n) = I_1(m, n),$$

(A26)

$$I_6(m) = 0,$$

(A27)

$$I_7(n) = I_8(n) = 0,$$

(A28)

$$I_9 = 2\pi\alpha, \text{ gdzie:}$$

$$f(n) = \left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2n} \frac{n\lambda - \alpha_w R_1}{n\lambda + \alpha_w R_1} \right),$$

$$p(m) = \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2m} \frac{m\lambda - \alpha_w R_1}{m\lambda + \alpha_w R_1} \right).$$

LITERATURA

- [1] Kuehn T. H., Goldstein R. J.: Numerical solution to the Navier-Stokes equations for laminar natural convection about a horizontal isothermal circular cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer* (1980), vol. 23, no. 7, 971-979.

- [2] Incropera F. P., de Witt D. P., Bergman T. L., Lavine A. S.: Introduction to heat transfer. *John Wiley and Sons*, USA, Hoboken (2007).
- [3] Gołębiowski J., Bycul R.P.: Modelling of thermal field dynamics in a DC cable with application of parallel computations. Part 1 and Part 2. *Archives of Electrical Engineering* (2008), vol. LVII, no. 3/4, 277-302.
- [4] Gołębiowski J., Zaręba M.: Analytical method of computation of the thermal field in a DC lead with the variable heat transfer coefficient on its surface. *Przegląd Elektrotechniczny* (2012), R. 88, no. 4a, 187-192.
- [5] Baehr M. D., Stephan K.: Heat and mass transfer. *Springer-Verlag*, Berlin, Heidelberg (2006).
- [6] Latif M. J.: Heat conduction. *Springer-Verlag*, Berlin, Heidelberg (2009).
- [7] Kulas S.: Tory prądowe i układy zestykowe. *Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej*, Warszawa (2008).
- [8] Matusiak R. Elektrotechnika Teoretyczna, Tom 2. Teoria pola elektromagnetycznego. *WNT*, Warszawa (1982).
- [9] Gołębiowski J., Kwieckowski S., Zaręba M., Bycul R. P.: Analiza nieustalonego pola termicznego w elektrycznych grzejnikach podłogowych i w kablach prądu stałego. *Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej*, Warszawa-Białystok (2010), Polska Akademia Nauk – Komitet Elektrotechniki.
- [10] Grzymkowski R., Kapusta A., Kumoszek T., Słota D.: Mathematica 6. *Wydawnictwa Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego*, Gliwice (2008).
- [11] Bathe K. J.: Finite-Elemente Methoden. *Springer-Verlag*, Berlin (1990).
- [12] Brenner S., Scott R. L.: The mathematical theory of finite element methods. *Springer*, Berlin (2008).
- [13] Manuals for NISA v. 16. NISA Suite of FEA Software (CD-ROM). *Cranes Software, Inc.*, Troy, MI (2008).

Autor: Marek Zaręba, Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok, e-mail: m.zareba@pb.edu.pl