

Zastosowanie rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu do modelowania dynamiki superkondensatorów

Streszczenie. Artykuł omawia modelowanie impedancji superkondensatorów przy zastosowaniu rachunku różniczkowo-całkowym ułamkowych rzędów oraz modelu relaksacji dielektrycznej Cole'a-Cole'a. Podstawą modelowania są zidentyfikowane charakterystyki częstotliwościowe. Modelowaniu ułamkowego rzędu przeciwstawia modelowanie z zastosowaniem transmitancji rzędu całkowitego. Prezentuje dokładność obu metod modelowania oraz trudności obliczeniowe podczas optymalizacji wartości parametrów modeli, a także aplikację tych modeli do celów sterowania.

Abstract. The paper describes the modeling of supercapacitor impedance with fractional order calculus and Cole-Cole relaxation model application. The basis of the modeling are frequency responses. The fractional order models are compared with integer order transfer functions. The accuracy of both methods of modeling and difficulties of the optimization of parameters values of the models are discussed. The applications of both types of transfer function in control circuits are presented. **The Application of Fractional Calculus for Supercapacitor Dynamics Modeling.**

Słowa kluczowe: superkondensator, modelowanie, ułamkowy rząd
Keywords: supercapacitor, modeling, fractional order

doi:10.12915/pe.2014.08.03

Wstęp

Superkondensatory stanowią specyficzną grupę kondensatorów, które mają cechy pośrednie pomiędzy kondensatorami elektrolitycznymi, a akumulatorami. Osiągają one pojemność kilku tysięcy faradów. Ponadto charakteryzują się gęstością zmagazynowanej energii przekraczającą 10 Wh/kg masy oraz mogą dostarczyć lub przyjąć moc przekraczającą 10 kW/kg masy. Cechy te uzyskują dzięki możliwości magazynowania dużych ładunków elektrycznych wokół porowatych elektrod, wykonanych z aktywnego węgla, grafenu, nanorurek węglowych, węglowego aerożelu itp. Z racji wymienionych właściwości superkondensatory stosowane są jako zabezpieczenia komputerów przed zanikiem energii zasilającej, w układach zasilających roboty, zabawki, elektryczne szczoteczki do zębów itp. Ostatnio są stosowane coraz szerzej, obok akumulatorów, w pojazdach elektrycznych dla przejmowania energii hamowania oraz dostarczania jej podczas gwałtownego przyspieszania. W dziedzinie tej trwa szybki rozwój [14]. Ostatnie doniesienia mówią o uzyskaniu żelu grafenowego, przy pomocy którego będzie można zbudować superkondensatory, magazynujące energię do 60 Wh/l [1].

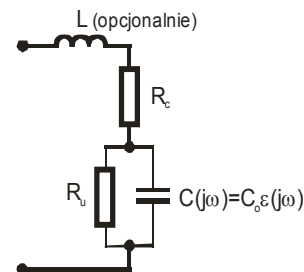
Ogólnie, dokładniejszy opis impedancji typowego rzeczywistego kondensatora wymaga uwzględnienia jego stratności. W związku z tym wprowadzono schematy zastępcze, w których idealny kondensator jest połączony z równoległymi i szeregowymi rezystancjami. W przypadku rozważania wyższych częstotliwości pracy wprowadza się także indukcyjność szeregową. Specyficzna konstrukcja oraz sposób działania superkondensatorów wymagają przy opisie ich właściwości dynamicznych uwzględnienia zjawisk, związanych z poruszaniem się jonów elektrolitu wokół porowatych elektrod o relatywnie dużej powierzchni. Zjawiska te opisują modele relaksacji jonowej. Prowadzi to do konieczności zastosowania bardziej złożonego modelu zastępczego impedancji superkondensatorów, niż wspomniany model typowego kondensatora. Artykuł dotyczy praktycznych aspektów modelowania superkondensatorów z wykorzystaniem modeli dynamicznych ułamkowego rzędu w porównaniu do zastosowania modeli rzędu całkowitego.

Modele impedancji superkondensatorów

Impedancję kondensatorów często przedstawia się zazwyczaj za pomocą schematu zastępczego, przedstawionego na rysunku 1. Schemat ten zawiera

rezystancje szeregową R_c i równoległą R_u oraz indukcyjność szeregową L . Dla typowego kondensatora pojemność, występującą na rysunku 1, można uznać za stałą w funkcji częstotliwości. Przy opisie impedancji superkondensatorów, ze względu na zjawisko relaksacji, należy dodatkowo uwzględnić zmienność tego parametru w funkcji częstotliwości.

W przypadkach analizy sygnałów o szerokości widma częstotliwościowego ograniczonej do 10 kHz indukcyjność L można pominąć. Niniejszy artykuł obejmuje ten przypadek, gdyż koncentruje się na wpływie zjawiska relaksacji jonowej w superkondensatorach. Typowe charakterystyczne stałe czasowe relaksacji dla tych elementów wynoszą od kilku do kilkudziesięciu sekund [2], co powoduje, że istotny wpływ zjawiska relaksacji na charakterystykę częstotliwościową impedancji występuje w zakresie od ok. 0.001 Hz do kilkudziesięciu Hz.



Rys 1. Ogólny schemat zastępczy kondensatora rzeczywistego

Zjawisko relaksacji dielektrycznej dla przypadku idealnego opisuje model Debye'a. W praktyce stosuje się doświadczalne modyfikacje tego modelu [3]. Opis zespolonej wartości przenikalności dielektrycznej najogólniej opisuje np. model Haviliaka-Negamiego o postaci

$$(1) \quad \varepsilon_{HN}(j\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{[1 + (j\omega T)^{\delta}]^{\gamma}}, \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad 0 \leq \delta < 1,$$

gdzie: ω – pulsacja, ε_{∞} – przenikalność dielektryczna dla wysokich częstotliwości, ε_s – statyczna przenikalność dielektryczna, T – charakterystyczna stała czasowa relaksacji, γ , δ – współczynniki dobrane empirycznie.

Dla modelu Debye'a w równaniu (1) współczynniki $\gamma=1$ oraz $\delta=1$. Jeżeli jest spełniony warunek $\gamma=1$ oraz $\delta < 1$, otrzymuje się model Cole'a-Cole'a opisany równaniem

$$(2) \quad \varepsilon_{CC}(j\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{1 + (j\omega T)^{\delta}} \quad 0 \leq \delta < 1,$$

zaś dla $\gamma < 1$ oraz $\delta = 1$ uzyskuje się równanie Cole'a-Davidsona

$$(3) \quad \varepsilon_{CD}(j\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{(1 + j\omega T)^{\gamma}} \quad 0 \leq \gamma < 1,$$

Współczynniki γ oraz δ są określane doświadczalnie.

Impedancję superkondensatora, zgodnie ze schematem zastępczym przedstawionym na rysunku 1, przy uwzględnieniu rezystancji szeregowej R_c i równoległej R_u oraz pominięciu indukcyjności L , można zapisać

$$(4) \quad Z(j\omega) = R_c + \frac{R_u \frac{1}{j\omega C(j\omega)}}{R_u + \frac{1}{j\omega C(j\omega)}}$$

przy czym wartość pojemności zespolonej $C(j\omega)$ jest proporcjonalna do przenikalności dielektrycznej, opisanej równaniami (1) – (3). Impedancję tę można potraktować jako transmitancję z sygnałem prądowym na wejściu i napięciowym na wyjściu. Zastępując przekształcenie Fouriera przekształceniem Laplace'a impedancja ta dla modelu Cole'a-Cole'a ma postać transmitancji

$$(5) \quad G_{CC}(s) = \frac{\left(1 + \frac{R_c}{R_u}\right) + s^{\delta} \left(1 + \frac{R_c}{R_u}\right) T^{\delta} + s R_c C}{\frac{1}{R_u} + s^{\delta} \frac{T^{\delta}}{R_u} + s C}$$

Wyrażenie (5) można też przedstawić w ogólnej postaci [3]

$$(6) \quad G(s) = \frac{b_0 s^{\beta_0} + b_1 s^{\beta_1} + \dots + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + b_m s^{\beta_m}}{a_0 s^{\alpha_0} + a_1 s^{\alpha_1} + \dots + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + a_n s^{\alpha_n}}$$

Wykładniki transmitancji (6) są liczbami zarówno całkowitymi jak i ułamkowymi. W efekcie jest to opis związany z rachunkiem różniczkowo-całkowym ułamkowych rzędów [5,6]. Do obliczeń transmitancji układów zawierających superkondensatory o impedancji w postaci (5) można wykorzystać specjalizowane pakiety obliczeniowe, np. FOTF [10,4], opracowany jako uzupełnienie oprogramowania Matlab. Pakiet ten umożliwia połączenie bloków o różnych transmitancjach, sprzężenie zwrotne, generowanie charakterystyk Bodego i Nyquista, badanie stabilności układu sterowania, symulację odpowiedzi czasowych na pobudzenia itp. Przykład wykorzystania tego pakietu do opisu i symulacji pracy układu sterowania z superkondensatorem jest opisany np. w [4].

W przypadku zastosowania modeli (1) oraz (3) do opisu impedancji superkondensatorów uzyskuje się wyrażenia z dwumianami, podniesionymi do ułamkowej potęgi, co uniemożliwia zapis ich impedancji w standardowej postaci (6). W efekcie utrudnia to wykorzystanie tych impedancji w celach obliczeniowych [9,4]. Trudności te zadecydowały, że w niniejszym artykule, jako reprezentanta opisu dynamiki superkondensatora równaniami ułamkowego rzędu, przyjęto transmitancję z modelem Cole'a-Cole'a.

Dla wartości współczynników, opisujących typowe superkondensatory, w równaniu (5) można dokonać pewnych uproszczeń. Można uwzględnić w tym celu fakt, że szeregową rezystancję R_c jest kilka rzędów wielkości mniejsza od równoległej rezystancji upływu R_u . Ponadto, jak to wykazano w [4], pominięcie drugiego z wyrazów mianownika transmitancji (5) w nieistotnym stopniu zmienia dopasowanie tej transmitancji do wyników pomiarów charakterystyki częstotliwościowej rzeczywistego superkondensatora. W efekcie uproszczoną postać transmitancji (5) można przedstawić w ogólnej postaci

$$(7) \quad G_{CC}(s) = \frac{1 + s^{\delta} T^{\delta} + s R_c C}{\frac{1}{R_u} + s C} = \frac{1 + b_1 s^{\delta} + b_2 s}{a_0 + a_2 s}$$

Równania dynamiki obiektów, używane w automatyce są z reguły opisane układami równań różniczkowych zwyczajnych lub w postaci transmitancji, związanymi z tymi układami równań. Transmitancje te stanowią iloczyny wielomianów o całkowitych wykładnikach potęgowych

operatorów s . Formę tę można również zastosować do aproksymacji charakterystyk superkondensatorów. Modele tego rodzaju w postaci szeregu struktur elementów RC o pożądanej transmitancji przedstawia literatura [10,11]. Ogólnie transmitancje superkondensatorów, opisane do częstotliwości 10 kHz, a więc z pominięciem indukcyjności szeregowej, można przedstawić w postaci

$$(8) \quad G_0(s) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i s^i}{\sum_{i=0}^N a_i s^i} = \frac{1 + b_1 s + \dots + b_N s^N}{a_0 + a_1 s + \dots + a_2 s^N}$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że zwiększenie rzędu N równania (8), przy poprawie dokładności aproksymacji pomierzonych charakterystyk częstotliwościowych, znacznie zwiększa trudności obliczeniowe podczas identyfikacji parametrów modelu ze względu na wzrost liczby optymalizowanych parametrów.

Niniejszy artykuł dotyczy zastosowania do celów obliczeniowych układów sterowania impedancji superkondensatorów rzędu ułamkowego (7) i całkowitego (8), o parametrach określanych na podstawie wyników identyfikacji częstotliwościowej. Ze względu na przeznaczenie opisywanych modeli zakłada się ograniczenie liczby optymalizowanych parametrów do niezbędnego minimum. Przy określaniu warunków niezbędnej dokładności aproksymacji należy wziąć pod uwagę czynniki, które mają wpływ na zmienność charakterystyk tych elementów. Należą do nich rozrzuty wartości zastosowanych elementów, ich zmienność w czasie oraz zmienność pod wpływem różnych warunków pracy i otoczenia, np. przy zmianach temperatury.

Aproksymacja charakterystyk częstotliwościowych

Dla określenia dokładności aproksymacji impedancji superkondensatorów dokonano obliczeń na podstawie wyników pomiarów charakterystyk częstotliwościowych superkondensatorów o pojemności nominalnej w zakresie 0,1F – 2700F. Podstawą aproksymacji była minimalizacja wskaźnika jakości o postaci

$$(9) \quad J_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{|G_a(j\omega_i) - G_p(j\omega_i)|}{|G_p(j\omega_i)|} \right)^2$$

gdzie: G_a – transmitancja, aproksymująca impedancję superkondensatora (7) lub (8), G_p – zmierzona wartość impedancji superkondensatora, ω_i – wartość pulsacji dla i -tego punktu pomiarowego, N – liczba punktów pomiarowych.

Wskaźnik J_f odpowiada wariancji względnego błędu aproksymacji w punktach pomiarowych charakterystyki częstotliwościowej.

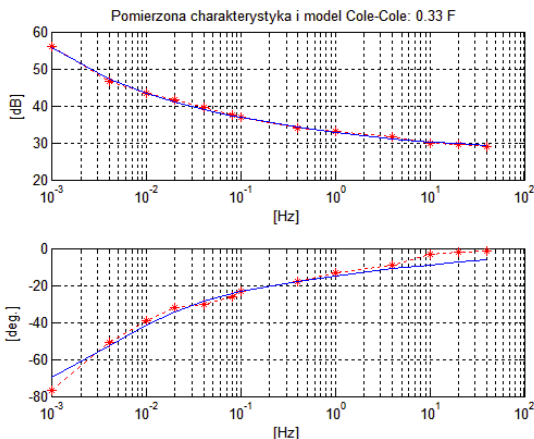
Aproksymację charakterystyk częstotliwościowych impedancji superkondensatorów, określonych w punktach ω_i , oparto na metodzie sympleks Naldera-Meada, zaimplementowanej w pakiecie obliczeniowym Matlab.

Transmitancja (7) zawiera 5 parametrów: a_0 , a_2 , b_1 , b_2 oraz δ jednak, ze względów praktycznych, z procesu optymalizacji na podstawie charakterystyki częstotliwościowej należy wyłączyć parametr a_0 , który jest odwrotnością rezystancji upływu R_c . Wartość tej rezystancji jest związana ze stałą czasową samorozładowywania się superkondensatora o bardzo dużej wartości. Można wartość parametru a_0 wyznaczyć niezależnie, na podstawie krzywej rozładowywania się superkondensatora oraz jego pojemności C . W efekcie optymalizacji podlegają 4 parametry: a_2 , b_1 , b_2 oraz δ .

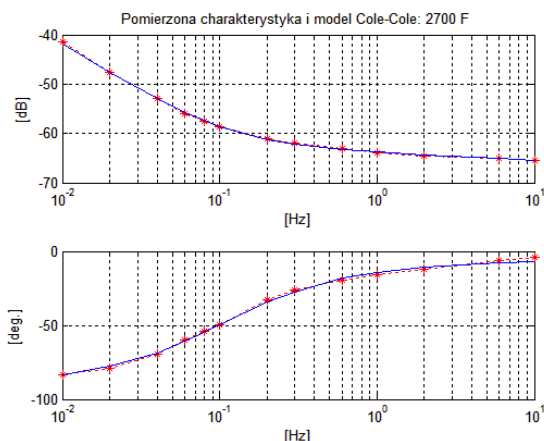
Ponieważ wskaźnik jakości optymalizacji (9) jest funkcją wielomodalną, optymalizacja wymaga wybrania odpowiedniego punktu startowego. W przypadku zastosowania modelu Cole'a-Cole'a (2) przybliżone wartości parametrów transmitancji (7) można oszacować na

podstawie znajomości nominalnej wartości pojemności C oraz charakterystycznej stałej czasowej relaksacji T, bazując na właściwościach fizycznych [2]. Ponadto można bazować także na fakcie, że dla typowych superkondensatorów wykładnik ułamkowej potęgi $0.5 < \delta < 1$. Wartość rezystancji szeregowej R_c można przyjąć na podstawie danych katalogowych lub oszacować np. na podstawie wartości początkowego skoku napięciowego przy skokowym pobudzeniu prądowym.

Przykładowe wyniki aproksymacji pomierzonych charakterystyk częstotliwościowych superkondensatorów o pojemności 0,33F oraz 2700F przedstawiają rysunek 2 i rysunek 3.



Rys.2. Aproxymacja pomierzonej charakterystyki superkondensatora (gwiazdki) 0.33F transmitancją ułamkową na bazie modelu Cole'a-Cole'a



Rys.3. Aproxymacja pomierzonej charakterystyki superkondensatora (gwiazdki) 2700F transmitancją ułamkową na bazie modelu Cole'a-Cole'a

Zestawienie wartości wskaźników jakości J_f (9) dla aproksymacji wyników pomiarowych różnych superkondensatorów znajduje się w tab. 1. Jak wspomniano wskaźnik J_f odpowiada wariancji względnego błędu aproksymacji w punktach pomiarowych charakterystyki częstotliwościowej.

Tabela 1. Porównanie dokładności aproksymacji charakterystyk rzeczywistych

Lp.	Charakterystyka superkondensatora	Odchylenie standardowe błędu aproksymacji modelem		
		2. rzędu	3. rzędu	Cole'a-Cole'a
a)	0,047 F [8]	9,8%	5,3%	5,2%
b)	0,1 F [8]	10,5%	4,4%	4,9%
c)	0,33 F [8]	16,6%	7,8%	5,6%
d)	0,6 F (CAP-XX) [12]	13,7%	10,0%	10,4%
e)	2700 F (PC-2500) [13]	3,2%	1,9%	3,6%

Wyniki, przedstawione w tabeli 1, określają dokładność aproksymacji. Z punktu widzenia zastosowania analizowanych charakterystyk dla celów sterowania, uzyskana dokładność dla transmitancji z modelem Cole'a-Cole'a jest wystarczająca. Powodem tego są między innymi specyficzne właściwości superkondensatorów. Na przykład rezystancja szeregowa R_c superkondensatora firmy Maxwell o pojemności 2700F, według informacji producenta [13], zmienia się w zakresie zmian jego temperatury 0-60°C o ok. 12%. Ponadto jego pojemność przy napięciu 2,5V po 2000 godz. pracy spada o 12%, zaś przy napięciu 2,7V spada o 25%. W przypadku superkondensatora CAP-XX o pojemności 0.6F zmiana rezystancji szeregowej w zakresie temperatury 0-60°C wynosi ok. 40% [12]. Tak więc, wyznaczenie krótkotrwałych wartości parametrów modelu superkondensatora, dokładniejsze niż kilka procent, mija się z celem.

Poprzednio wspomniano o zakresie częstotliwości, w którym daje się zauważyć istotny wpływ zjawiska relaksacji jonowej na właściwości superkondensatorów. Pomiary charakterystyk powinien w pełni obejmować ten zakres. Dla ilustracji tego zagadnienia można posłużyć się transmitancją (7), którą można rozłożyć na ułamki proste

$$(10) \quad G_{cc}(s) = \frac{1+b_1s^\delta+b_2s}{a_0+a_2s} = G_{cc1}(s) + G_{cc2}(s) + G_{cc3}(s)$$

gdzie

$$(11) \quad G_{cc1}(s) = R_c;$$

$$(12) \quad G_{cc2}(s) = \frac{R_u}{1+sR_uC}$$

$$(13) \quad G_{cc3}(s) = \frac{s^\delta T^\delta R_u}{1+sR_uC}$$

Na rysunku 4 przedstawione są moduły poszczególnych czynników transmitancji (11)-(13). Moduły te stanowią asymptoty transmitancji (10). Nachylenie $Q_{cc}(\omega)$ wykresu logarytmicznego G_{cc}

$$(14) \quad Q_{cc}(\omega) = \frac{d(\log(|G_{cc}(\omega)|))}{d(\log(\omega))}$$

można przybliżać tymi asymptotami. Nachylenie tych asymptot wynosi początkowo -20 dB/dekadę zmiany częstotliwości, by przejść w środkowym zakresie częstotliwości w nachylenie $-20 \cdot (1-\delta)$ dB/dekadę, zaś ostatni odcinek ustala się na stałej wartości R_c . Porównując ten wykres z wykresem na rysunku 2 można stwierdzić, że częstotliwościowy zakres pomiarowy w pełni objął odcinek o nachyleniu charakterystyki logarytmicznej modułu istotnie zależnym od wartości współczynnika δ .

W przypadku aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej transmitancją o całkowitych potęgach operatora s, opisanej równaniem (8), można przeprowadzić optymalizację na analogicznych zasadach. Liczba optymalizowanych parametrów w zależności (8), z analogicznym pominięciem parametru a_0 , dla $N=2$ wynosi 4, a więc tyle samo, co dla zależności (7). Dla $N=3$ liczba optymalizowanych parametrów wynosi 6. Jak wynika z tabeli 1, aby uzyskać dokładność aproksymacji, zbliżoną do aproksymacji transmitancją ułamkową i modelem Cole'a-Cole'a należy użyć transmitancji całkowitego co najmniej rzędu $N=3$. Wymaga to oszacowania odpowiedniego punktu startowego optymalizacji, jednak parametry transmitancji (8), w odróżnieniu od transmitancji (7), nie mają oczywistej interpretacji fizycznej. Ponadto optymalizacja w przestrzeni 6-wymiarowej jest trudniejsza do przeprowadzenia.

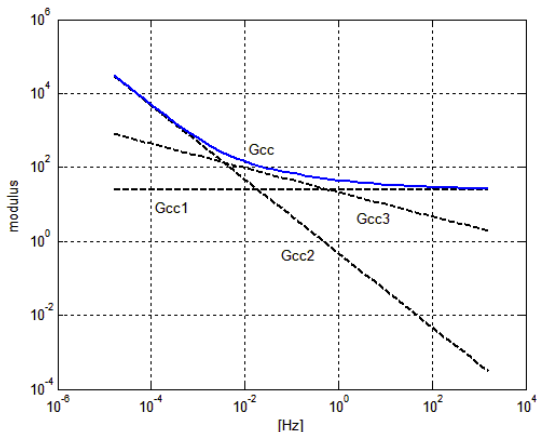
Optymalizacja w przestrzeni 6-wymiarowej przy wybranym wskaźniku jakości J_f jest zagadnieniem wielomodalnym. Podstawą akceptacji obliczonej transmitancji powinno być to, aby obliczona transmitancja,

oprócz bieguna związanego ze dużą stałą czasową samorozładowywania się, miała bieguny i zera w zakresie częstotliwości, w którym nachylenie modułu wykresu logarytmicznego zawierało się w zakresie

$$(15) \quad -\frac{20db}{dek} < Q_{cc}(\omega) < 0$$

zaś faza $\varphi_{cc}(\omega)$ tej transmitancji zawierała się w zakresie

$$(16) \quad -90^\circ < \varphi_{cc}(\omega) < 0$$



Rys. 4. Moduły składowych transmitancji (22) dla superkondensatora 0.33 F

W trakcie optymalizacji z niewłaściwego punktu startowego można uzyskać transmitancję np. niewiele różniącą się charakterystyką częstotliwościową od przypadku $N=2$, transmitancję nieminimalnofazową, lub wręcz rozwiązanie niestabilne. W takim przypadku należy zmienić punkt startowy. Dla znalezienia najlepszej aproksymacji można przeprowadzić szereg obliczeń z losową modyfikacją wartości punktu startowego, a następnie wybrać najlepsze rozwiązanie spełniające kryteria (15) i (16) oraz charakteryzujące się najmniejszą wartością wskaźnika jakości (9).

Dla charakterystyki częstotliwościowej, przedstawionej na rysunku 2 oraz rysunku 4 w wyniku optymalizacji otrzymano transmitancję

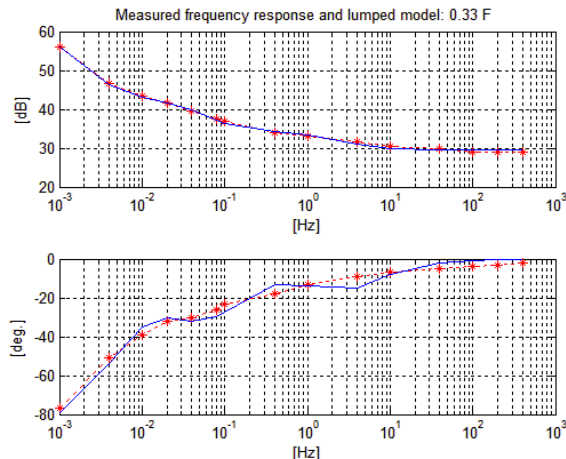
$$(17) \quad G_a(s) = \frac{1+34.9s+56.1s^2+2.48s^3}{1.65E-07+0.253s+1.10s^2+0.083s^3}$$

Zaprezentowana jest ona w formie wykresu na rysunku 5. Częstotliwości punktów załamania asymptot modułu transmitancji, odpowiadające jej zerom i biegunom, określone zgodnie z zasadami tworzenia wykresów Bodego, są przedstawione na rysunku 6. Zgodnie z przedstawionymi powyżej warunkami właściwej aproksymacji (15) – (16), można wartości tych częstotliwości porównać z przebiegami wykresów na rysunku 2 i rysunku 4.

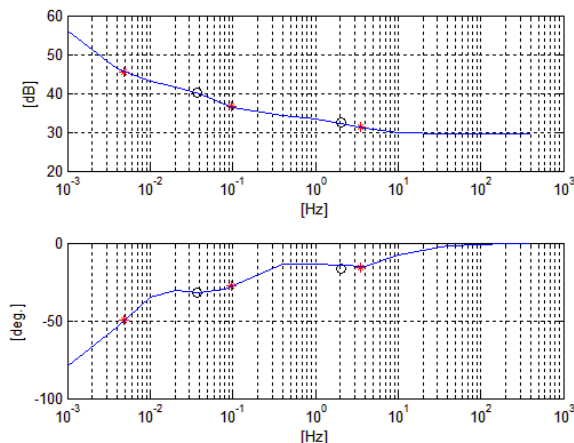
Jak można zauważyć, wykres na rysunku 5 jest nieco pofalowany w stosunku do wykresu na rysunku 2, przedstawiającego transmitancję ułamkową. Porównawcza ocena jakości aproksymacji, przedstawiona w tabeli 1 wskazuje, że przy wyborze transmitancji (7) odchylenie standardowe błędu aproksymacji wynosi 7,8%, zaś dla (8) przy $N=3$ wynosi 7,2%. Są to zbliżone wyniki. Podobne relacje zachodzą dla innych badanych superkondensatorów.

Podsumowując można stwierdzić, że aproksymacja transmitancją ułamkową wymaga mniej parametrów do optymalizacji, zaś punkt startowy jest powiązany z łatwymi do oszacowania wartościami wielkości fizycznych, przez co operacja ta jest prostsza w realizacji niż przy transmitancji całkowitego rzędu. Wadą transmitancji ułamkowej jest

konieczność stosowania niestandardowych narzędzi obliczeniowych, które są jednak ogólnie dostępne.



Rys. 5. Aproksymacja pomierzonej charakterystyki superkondensatora (gwiazdki) 0.33F transmitancją całkowitego rzędu 3



Rys. 6. Załamania wykresu transmitancji (10), związane z biegunami (kółko) i zerami (gwiazdka)

Aproksymacja przebiegów czasowych

Do oceny jakości aproksymacji, przy zastosowaniu porównywanych modeli impedancji superkondensatorów, jako pomocniczy wskaźnik został przyjęty wskaźnik czasowy o postaci

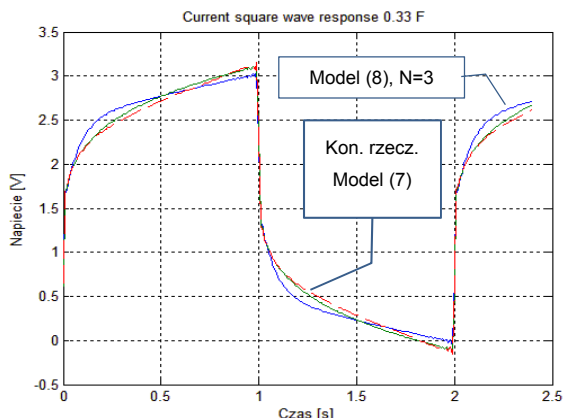
$$(18) \quad J_t = \frac{\sqrt{\int_0^T (y(t) - y_p(t))^2 dt}}{\sqrt{\int_0^T y_p(t)^2 dt}}$$

gdzie: t – czas, $y_p(t)$ – odpowiedź napięciowa w stanie ustalonym układu rzeczywistego na wymuszenie prostokątną prądową falą o okresie $T=2s$, $y(t)$ – analogiczna odpowiedź dla modelu (7) lub (8), T – okres fali prostokątnej prądu pobudzającego.

Okres $T=2s$ przyjęto ze względu na występujące w tym czasie istotne różnice kształtu początkowej części przebiegu odpowiedzi superkondensatorów na skokowe wymuszenie w stosunku do kształtu odpowiedzi typowych kondensatorów o tej samej nominalnej pojemności. Dla modelu zastępczego, przedstawionego na rys. 1, przy $C(\omega)=const$, odpowiedzi na to wymuszenie prostokątne stanowiłyby superpozycję fali prostokątnej i quasi-liniowej piły.

Problem braku zarejestrowanych odpowiedzi rzeczywistych superkondensatorów rozwiązano na bazie dokładnej znajomości modułu i fazy ich impedancji w zakresie częstotliwości 0,5 Hz – 150 Hz. Przebieg charakterystyk

pomiędzy punktami pomiarowymi obliczono metodą interpolacji. Dzięki temu można było obliczyć wartości składowych harmonicznnych fali prostokątnej od pierwszej do trzeczej, a następnie zsumować je. Symulację odpowiedzi modeli oparto na obliczeniach z wykorzystaniem pakietów Matlab Control Box oraz FOTF [9].



Rys. 7. Symulacja odpowiedzi na wymuszenie prądowe superkondensatora rzeczywistego oraz jego modeli o stałych całkowych i ułamkowych

Tabela 2. Porównanie wskaźników czasowych

Lp.	Charakterystyka superkondensatora	Wskaźnik jakości J_t przy aproksymacji modelem		
		2. rzędu	3. rzędu	Cole-Cole
a)	0,047 F [8]	11,2%	6,3%	5,2%
b)	0,1 F [8]	16,4%	4,9%	2,3%
c)	0,33 F [8]	25,5%	8,2%	3,0%
d)	0,6 F (CAP-XX) [12]	13,4%	8,8%	9,9%
e)	2700 F (PC-2500) [13]	2,0%	1,2%	5,0%

Symulację odpowiedzi dla superkondensatora 0,33 F dla modeli (7) oraz (8) przy $N=3$ przedstawia rysunek 7. Odpowiedzi superkondensatora rzeczywistego oraz modelu ułamkowego praktycznie pokrywają się, przy czym wskaźnik jakości J_t wynosi 3,0%. Przebieg dla aproksymacji transmitancją (8) przy $N=3$ odbiega nieco więcej od przebiegu rzeczywistego, co odpowiada wskaźnikowi jakości J_t równemu 8,2%.

Zestawienie czasowych wskaźników jakości J_t , określonych dla szeregu badanych superkondensatorów znajduje się w tabeli 2. Można stwierdzić, że efekty aproksymacji odpowiedzi czasowych superkondensatorów przy użyciu modelu ułamkowego (7) oraz modelu o stałych całkowych (8) dla $N=3$ są zbliżone. Porównując te wyniki z ewentualnymi odchyłkami przebiegów, wynikających ze zmian parametrów superkondensatorów w czasie pracy, różnice te można uznać za mało istotne.

Podsumowanie

Wnioski z zaprezentowanych wyników badań aproksymacji charakterystyk częstotliwościowych impedancji superkondensatorów transmitancjami całkowitego rzędu $N=3$ oraz ułamkowego rzędu z wykorzystaniem modelu Cole'a-Cole'a relaksacji jonowej są następujące:

1. Dokładność aproksymacji charakterystyk częstotliwościowych, wyrażona odchyleniem standardowym względnego błędem dla pomierzonych punktów charakterystyki częstotliwościowej dla obu rodzajów rozpatrywanych transmitancji jest zbliżona.
2. Odchylenia standardowe tej aproksymacji wynoszą na ogół kilka procent, co wobec zmienności parametrów superkondensatorów w zakresie temperatury pracy oraz podczas ich starzenia się, jest wartością do przyjęcia dla

efektywnej syntezy układów sterowania, zawierających te elementy.

3. Wskaźniki jakości, bazujące na całkach różnicy odpowiedzi czasowych superkondensatorów względem modeli, dla obu rodzajów rozpatrywanych transmitancji są również zbliżone, zaś dokładność tych odpowiedzi jest również do przyjęcia do celów syntezy układów sterowania.
4. Optymalizacja parametrów transmitancji jest dużo łatwiejsza dla modelu ułamkowego ze względu na mniejszą ich liczbę oraz możliwość oszacowania wartości punktu startowego optymalizacji na podstawie parametrów fizycznych superkondensatorów.
5. Narzędzia do syntezy układów sterowania z elementami opisanymi równaniami różniczkowymi ułamkowego rzędu oraz symulacji pracy tych układów są dostępne i łatwe w użyciu.
6. Podsumowując można stwierdzić, że opis impedancji superkondensatorów, jako transmitancji w postaci ilorazu wielomianów ułamkowego rzędu, jest ważnym i godnym polecenia narzędziem do syntezy układów sterowania.

LITERATURA

- [1] Xiaowei Yang, Chi Cheng, Yufei Wang, Lin Qiu, Dan Li, *Liquid-Mediated Dense Integration of Graphene Materials for Compact Capacitive Energy Storage*, Science, 2 August, 2013, vol. 341, No 6145, pp. 534-537
- [2] Farma R., Deraman M., Awitdrus A., Talib I.A. Omar R, Manjunatha J.G., Ishak M.M., Basri N.H. Dola B.N.M., *Physical and Electrochemical Properties of Supercapacitor Electrodes Derived from Carbon Nanotube and Biomass Carbon*, International Journal of Electrochemical Science. Vol. 8, January 2013, pp. 257-273
- [3] Déjardin, J.-L., Jadzyn J., *Determination of the nonlinear dielectric increment in the Cole-Davidson model*, The Journal of Chemical Physics 125, 114503, 2006
- [4] Orzyłowski M., Lewandowski M., *Computer Modeling of Supercapacitor with Cole-Cole Relaxation Model*, Journal of Applied Computer Science Methods, No. 2, Vol. 4, 2013
- [5] Monje, C.A., Chen, Y., Vinagre, B.M., Xue, D., Feliu-Battle, V., *Fractional-Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*, Springer, 2010
- [6] Ostalczyk P., *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów, Teoria i zastosowania w automatyce*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 2008
- [7] Dzieliński A., Sierociuk D., Sarwas G., *Time domain validation of ultracapacitor fractional order model*, 49th IEEE Conference on Decision and Control, December 15-17, 2010, Hilton Atlanta Hotel, Atlanta, GA, USA
- [8] Dzieliński A., Sierociuk D., Sarwas G., *Some Applications of Fractional Order Calculus*, Automatics, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, vol. 58, No. 4, 2010
- [9] Yang Quan Chen, Ivo Petras and Dingyu Xue, *Fractional Order Control – A Tutorial*, 2009 American Control Conference Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA, June 10-12, 2009
- [10] Dougal R.A., Gao L., Liu S., *Ultracapacitor model with automatic order selection and capacity scaling for dynamic system simulation*, Journal of Power Sources No. 126 (2004) pp. 250-257
- [11] Shi L., Crow M. L., *Comparison of Ultracapacitor Electric Circuit*, Power and Energy Society General Meeting - Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century, IEEE Xplore, 2008
- [12] *HS206 supercapacitor Datasheet*, Rev 1.1, CAP-XX, 2008
- [13] *Ultracapacitors Data Sheets and technical information for PC2500TM*, Maxwell
- [14] Szeląg, A. *Efektywność hamowania odzyskowego w zelektryfikowanym transporcie szynowym*, Pojazdy Szynowe, Nr 4/2009, s. 9-16.

Autorzy: dr hab. inż. Marek Orzyłowski, Społeczna Akademia Nauk w Łodzi, Instytut Technologii Informatycznych, ul. Sienkiewicza 9, 90-113 Łódź, Marek.Orzyłowski@gmail.com; dr hab. inż. Mirosław Lewandowski, Politechnika Warszawska, Instytut Maszyn Elektrycznych, pl. Politechniki 1, 00-661 Warszawa, miroslaw.lewandowski@ee.pw.edu.pl