

## Modelowanie ścieżki wirowej von Karmana przy użyciu pakietu ANSYS FLUENT

**Streszczenie.** Przedmiotem artykułu jest numeryczne modelowanie ścieżki wirowej von Karmana. Przedstawiono wyniki symulacji dla przeszkody w kształcie walca ze szczeliną umieszczonego w rurociągu. Przeanalizowano zmienność amplitudy ciśnienia wzdłuż osi rurociągu i wzdłuż jego promienia. Uzyskane wyniki mogą być użyteczne w kontekście optymalizacji usytuowania ciśnieniowego detektora wirów w przepływomierzu wirowym.

**Abstract.** Numerical modelling of von Karman vortex street is the subject of the article. Results of simulation for circular cylinder with the slit as the bluff body located in the pipe are presented. Changeability of the pressure fluctuations along the pipe axis as well as along the pipe radius has been analysed. The results can be used in the optimization of the pressure sensor location in the vortex flow meter. (Von Karman vortex street modelling with ANSYS FLUENT package application).

**Słowa kluczowe:** ścieżka wirowa von Karmana, modelowanie numeryczne

**Keywords:** von Karman vortex street, numerical modelling

doi:10.12915/pe.2014.08.46

### Wstęp

Artykuł jest poświęcony zagadnieniom związanym z modelowaniem numerycznym zjawiska generacji ścieżki wirowej von Karmana. Zjawisko to polega na generacji wirów na przeszkodzie umieszczonej prostopadle do przepływającego medium (ciecz lub gaz) i jest przedmiotem obserwacji od setek lat, o czym mogą świadczyć na przykład szkice przedstawiające wiry formujące się na rzece narysowane przez samego Leonardo da Vinci. Cechą charakterystyczną zjawiska jest to, że wiry powstają naprzemiennie raz z jednej raz z drugiej strony przeszkody a częstotliwość ich generacji jest wprost proporcjonalna do prędkości strugi. Właściwość tę odkrył w 1878 r. Strouhal [1] obserwując zmianę wysokości dźwięków generowanych na drucie wystawionym na działanie wiatru. Doszedł on do wniosku, że wysokość dźwięku rośnie wraz ze wzrostem prędkości wiatru i maleje wraz ze wzrostem średnicy drutu. Rok później tj. w 1879 r. lord Rayleigh [2] odkrył, że zjawisku generacji wirów towarzyszy prostopadła do strugi siła nośna. Istotnym krokiem w rozwoju mechaniki płynów było zdefiniowanie w 1883 r. przez O. Reynoldsa [3] warunków, przy których przepływ laminarny zmienia się w turbulentny. Na podstawie obserwacji przepływu wody w rurce szklanej, do której jednocześnie doprowadzony był barwnik, zdefiniował on bezwymiarową liczbę kryterialną pozwalającą oszacować stabilność przepływu. Liczba ta, nazwana później liczbą Reynoldsa, jest zdefiniowana jako stosunek sił bezwładności do sił lepkości i wyraża się zależnością:

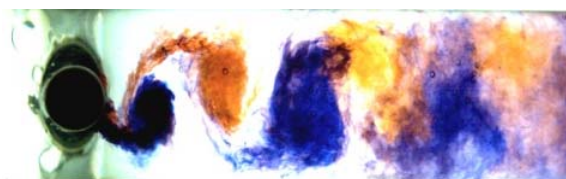
$$(1) \quad Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{v d}{\nu}$$

gdzie:  $\rho$  – gęstość płynu,  $v$  – prędkość strugi,  $d$  – wymiar charakterystyczny,  $\mu$  – dynamiczny współczynnik lepkości,  $\nu$  – kinematyczny współczynnik lepkości,

Przyjmuje się, że dla:

- $Re < \sim 2300$  – przepływ jest laminarny
- $\sim 2300 < Re < \sim 10000$  – przepływ jest przejściowy (częściowo turbulentny)
- $Re > \sim 50000$  – przepływ jest turbulentny (burzliwy).

Kamieniem milowym w badaniach nad poznaniem zjawiska generacji wirów była opublikowana w 1911 r. praca von Karmana [4].

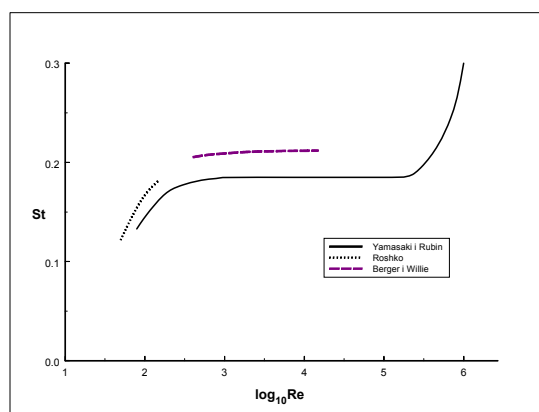


Rys.1. Ścieżka wirowa von Karmana

Sformułował on wniosek, że generacja wirów ma charakter regularny a częstotliwość ich powstawania daje się zapisać równaniem:

$$(2) \quad f = S_T \frac{v}{d}$$

gdzie:  $d$  – wymiar charakterystyczny przeszkody,  $S_T$  – stała Strouhala (bezwymiarowa liczba kryterialna podobieństwa przepływu)



Rys.2. Zależność liczby Strouhala od liczby Reynoldsa [5]

Bardzo istotną właściwością zjawiska jest fakt, że częstotliwość wirów generowanych na przeszkodzie nie zależy od właściwości fizycznych płynu, a jedynie od jego prędkości. Zatem wynik pomiaru prędkości nie zależy od takich parametrów jak np. temperatura czy skład chemiczny medium. Z równania (2) widać, że decydujący wpływ na liniowość zjawiska ma stałość współczynnika proporcjonalności  $S_T$ . Jego zależność od prędkości przepływu oraz lepkości medium (a więc liczby Reynoldsa)

była przedmiotem badań opisanych w publikacjach różnych autorów [5,6,7]. Prezentowane w nich wyniki pokazują jednoznacznie, że liczba Strouhala ( $St$ ) jest niezmienna w bardzo szerokim zakresie liczb Reynoldsa. Bardzo wyraźnie to widać na wykresie przedstawionym na rys. 2, zaczerpniętym z publikacji Yamasaki i Rubina z 1974 r. [5].

Z przedstawionego wykresu wynika, że liczba  $S_T$  jest praktycznie stała w zakresie liczb Reynoldsa od  $3 \times 10^2$  do  $1,5 \times 10^5$ . Na podstawie swoich badań Roshko [6] wyznaczył analityczną zależność liczby  $S_T$  w funkcji liczby Reynoldsa w zakresie od 50 do 150:

$$(3) \quad S_T = 0,212 \left( 1 - \frac{21,2}{Re} \right)$$

Natomiast Breger i Willie [7] przeprowadzili podobne badania dla liczb  $Re$  z zakresu od 300 do 15000 i zależność  $S_T = f(Re)$  opisali wzorem:

$$(4) \quad S_T = 0,212 \left( 1 - \frac{12,7}{Re} \right)$$

Z zależności (3) i (4) wynika, że wrażliwość liczby  $S_T$  na liczbę  $Re$  (a więc dla danej przeszkody ostatecznie na prędkość przepływu) zmniejsza się wraz ze wzrostem liczby  $Re$ . Dla zakresu liczb  $Re$  badanego przez Bergera i Willie'go zmiany są bardzo nieznaczne. Zapewnia to właśnie liniowość charakterystyki częstotliwości generowanych wirów w funkcji prędkości przepływu

### Modelowanie numeryczne zjawiska

Ruch lepkiego płynu newtonowskiego, nieposiadającego zdolności do akumulowania momentów skręcających można zapisać następująco (5):

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

gdzie:  $v_x, v_y, v_z$  – składowe jednostkowe wektora prędkości,  $X, Y, Z$  – składowe jednostkowe wektora siły masowej,  $\rho$  – gęstość płynu,  $\nu$  – kinematyczny współczynnik lepkości

Przedstawiony układ równań (5) określany jest mianem równań Naviera-Stokesa i w wersji ogólnej wektorowej można go zapisać następująco:

$$(6) \quad \frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \nu \nabla^2 v + \frac{\nu}{3} \text{grad}(\text{div}(v))$$

gdzie:  $F$  – wektor siły masowej

Uwzględniając równanie ciągłości (7):

$$(7) \quad \frac{dp}{dt} + \rho \text{div}(v) = 0$$

oraz fakt, że dla płynu nieściśliwego  $\rho = \text{const.}$ , otrzymuje się:

$$(8) \quad \text{div}(v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Po podstawieniu zależności (8) do równania (6) otrzymuje się ogólne równanie przepływu dla nieściśliwego płynu newtonowskiego (9):

$$(9) \quad \frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \nu \nabla^2 v$$

Równanie (9) wraz z równaniem ciągłości oraz odpowiednimi warunkami brzegowymi, daje zamknięty układ równań. Nie oznacza to jednak, że taki układ równań daje się łatwo rozwiązać. Clay Mathematics Institute zaliczył problem analitycznego rozwiązania równań Naviera-Stokesa do siedmiu najważniejszych nierozwiązanych problemów matematycznych i wyznaczył nagrodę w wysokości 1 mln USD za podanie kompletnego rozwiązania lub kontrprzykładu. Jak dotąd istnienie rozwiązania zostało udowodnione dla przypadku dwuwymiarowego [8]. Rozwiązanie ogólne zaproponowane przez Otelbaev'a [9] w dalszym ciągu czeka na weryfikację. Bazując na dowodzie przedstawionym w 1971 roku przez Rulle'a i Takens'a, równania te dają się rozwiązywać metodami numerycznymi. Najlepsze rezultaty daje metoda DNS (ang. Direct Numerical Simulation), w wyniku której otrzymuje się pełne chwilowe pole prędkości analizowanego przepływu.

### Badania

Symulowano przepływ wody w rurociągu o średnicy 40mm z umieszczoną wewnątrz, prostopadle do kierunku przepływu, przeszkodą o kształcie walca o średnicy 12mm ze szczeliną o szerokości 1mm (rys.3). Analiza numeryczna została wykonana przy użyciu środowiska FLUENT v.13.0.0. Przepływ modelowano w dwóch wymiarach poprzez bezpośrednie rozwiązanie dwuwymiarowego układu równań Naviera-Stokesa metodą DNS.



Rys.3. Model, dla którego przeprowadzono symulacje

Przyjęto następujące założenia:

- płyn jest nieściśliwy
- przepływ na wlocie rurociągu jest laminarny
- $\nu$  – lepkość kinematyczna płynu, w tym przypadku wody –  $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
- $u$  – prędkość na wlocie rurociągu – 3 m/s
- $p$  – ciśnienie na wlocie rurociągu – 1000 hPa (średnie ciśnienie atmosferyczne)
- występuje brak poślizgu na ścianie przeszkody i ścianach rurociągu –  $u_0 = 0$

Dla tak dobranych parametrów przepływu wyznaczono współczynnik dyssypacji lepkiej  $\varepsilon$ :

$$(10) \quad \varepsilon = \frac{\left( 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^3}{12 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 2250 \text{ m}^2 / \text{s}^2$$

oraz na jego podstawie obliczono skalę długości  $\eta$  oraz skalę czasu  $\tau$ :

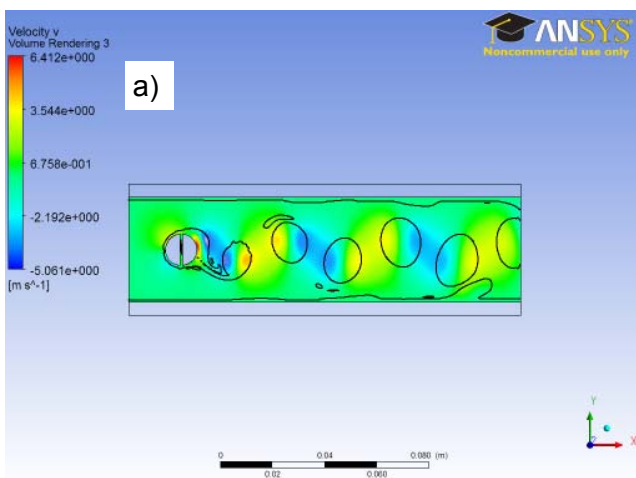
$$(11) \quad \eta = \left( \frac{\left( 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s} \right)^3}{2250 \text{ m}^2 / \text{s}^2} \right)^{\frac{1}{4}} = 4,6 \mu\text{m}$$

$$(12) \quad \tau = \left( \frac{(10^{-6} \text{ m}^2 / \text{ s}^3)^3}{2250 \text{ m}^2 / \text{ s}^3} \right)^{\frac{1}{2}} = 21 \mu\text{s}$$

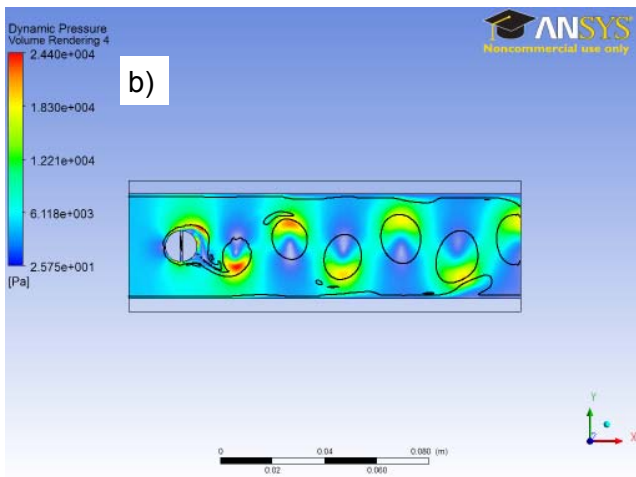
Ze względu na ograniczenia związane z zasobami mocy obliczeniowej komputera oraz fakt, że większość energii przenoszona jest przez duże wiry, zdecydowano się na generację siatki niestrukturalnej, w której odstęp pomiędzy węzłami wynosił nie więcej niż 0,4 mm. Siatkę wygenerowano z wykorzystaniem programu Gambit przy użyciu metody elementów skończonych. Ostatecznie składała się ona z 47 808 węzłów i 23 465 komórek.

Biorąc pod uwagę, że przy prędkości przepływu rzędu 3 m/s, częstotliwość generowanych wirów wynosi około 50 Hz (co daje okres 20 ms) przyjęto krok czasowy równy 1 ms. Taka rozdzielczość czasowa okazała się wystarczająca do wyznaczenia przebiegów czasowych zarówno prędkości jak i ciśnienia w dowolnym punkcie pola przepływu.

Na rys. 4 przedstawiono pole prędkości poprzecznej.



Rys. 4. Pole składowej poprzecznej prędkości

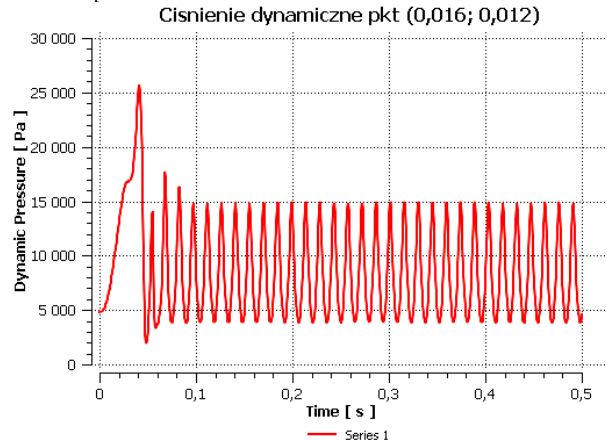


Rys. 5. Pole ciśnienia dynamicznego

Na podstawie uzyskanych wyników symulacji, program umożliwił wygenerowanie konturów wirów. Jak widać na rys. 4, mają one znaczne rozmiary i tworzą prawie wzorcową „ścieżkę wirową”. Bardzo istotnym jest fakt, że w analizowanym obszarze nie występuje zjawisko ich zanikania.

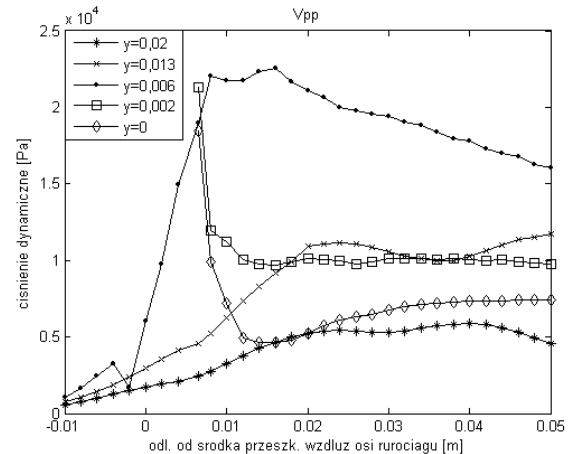
Wyznaczono również pole ciśnienia dynamicznego (rys. 5). Widać, że jest ono spójne z wynikami uzyskanymi dla badań pola prędkości.

Przedstawione na rys. 4 i 5 wyniki symulacji pokazują jakościowo istnienie wirów, ich rozwój i stabilność po okresie wzrostu. Znacznie większe znaczenie mają jednak wyniki w postaci ilościowej. Na rys. 6 przedstawiono przykładowe wyniki symulacji przebiegu czasowego ciśnienia dynamicznego w punkcie ( $x=0,016\text{m}$ ,  $y=0,012\text{m}$ ), czyli 12mm powyżej osi rurociągu oraz 10mm za przeszkodą.



Rys. 6. Przebieg czasowy ciśnienia dynamicznego dla  $x=0,016\text{m}$ ,  $y=0,012\text{m}$

Jak widać na rys 6, w początkowym okresie przepływu, zjawisko jest niestabilne i dopiero po upływie około 100 ms zmienia swój charakter na bardziej regularny. Przedmiotem badań był okres, w którym zjawisko było stabilne – w związku z tym wszystkie wyniki symulacji dla  $t < 100\text{ms}$  w dalszych analizach nie był brane pod uwagę. Dla ciśnienia dynamicznego z zakresu czasu  $100\text{ms} < t < 500\text{ms}$  wyznaczono wartość minimalną, maksymalną oraz międzyszczytową. Zwłaszcza ten ostatni parametr jest interesujący z punktu widzenia konstrukcji przepływomierza wirowego, ponieważ ilustruje dynamikę zmian ciśnienia, a więc potencjalną amplitudę sygnału pomiarowego. Znajomość tego parametru może być niezwykle użyteczna przy projektowaniu detektora wirów oraz może być cenną wskazówką w poszukiwaniach optymalnego miejsca detekcji. Zważywszy na często stosowane w przepływomierzach wirowych ciśnieniowe detektory wirów, przeanalizowano zmienność amplitudy ciśnienia w różnych punktach przestrzeni rurociągu. Na rys.7 przedstawiono wykresy obrazujące zmienność wartości międzyszczytowej ciśnienia dynamicznego w funkcji odległości od przeszkody.



Rys.7. Wartość międzyszczytowa ciśnienia dynamicznego w funkcji odległości od przeszkody wzdłuż osi rurociągu

Objaśnienia do rys. 7.

$y=0$  – oś przeszkody.

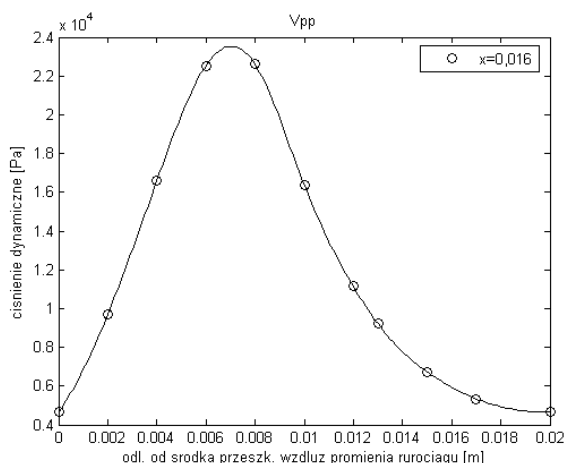
$y=0,002$  – oś 2 mm powyżej osi przeszkody.

$y=0,006$  – oś na granicy przeszkody, (6 mm powyżej osi przeszkody).

$y=0,013$  – oś w połowie odległości pomiędzy ścianą przeszkody a ścianą rurociągu (13 mm powyżej osi przeszkody).

$y=0,02$  – oś na granicy ściany rurociągu (20 mm powyżej osi przeszkody).

Przedstawione na rys. 7 wyniki pokazują, że amplituda fluktuacji ciśnienia związanego z generowanymi i przepływającymi wirami zmienia się w zależności od miejsca pomiaru. Największą wartość tego parametru uzyskano dla  $y=0,006$  m i  $x \in <0,01$  m;  $0,02$  m>, tzn. dla odległości od osi rurociągu równej promieniowi przeszkody i dla stosunkowo niewielkiej odległości za przeszkodą. Warto zauważyć, że fluktuacje ciśnienia występują również w obszarze przed przeszkodą, chociaż są one znacznie słabsze. Z punktu widzenia praktycznego – optymalnego usytuowania detektora wirów – istotną jest analiza fluktuacji ciśnienia występujących na ścianie rurociągu. Jak widać największy poziom sygnału występuje tu dla  $x \in <0,02$  m;  $0,042$  m>.



Rys.8. Wartość międzyszczytowa ciśnienia dynamicznego w funkcji odległości od przeszkody wzdłuż promienia rurociągu

Na rys. 8 przedstawiono charakterystykę zmian wartości międzyszczytowej ciśnienia dynamicznego w funkcji odległości od przeszkody (w poprzek rurociągu dla  $x = 0,016$ m). Punktami „o” oznaczono wartości wyznaczone za pomocą oprogramowania ANSYS FLUENT, natomiast linia ciągła jest wynikiem interpolacji metodą funkcji sklepanych wykonaną za pomocą oprogramowania Matlab. Wartości parametru  $x$  wybrano ze względu na występowanie w tym

miejscu maksimum wartości międzyszczytowej ciśnienia dynamicznego wzdłuż rurociągu (patrz rys. 7). Należy zauważyć, że fluktuacje ciśnienia związane z wirami występują w całym przekroju rurociągu a ich dynamika (max/min) osiąga nawet wartość 5. Największe wartości występują oczywiście w śladzie ścieżki, ale również na ścianie rurociągu sygnał ciśnieniowy uzyskuje akceptowalną, z punktu widzenia praktycznych zastosowań, amplitudę.

## Podsumowanie

Uzyskane wyniki, pomimo wprowadzenia znacznych uproszczeń w budowie modelu, zarówno w skali przestrzennej jak i czasowej, wykazały dużą zgodność z wynikami przeprowadzonych wcześniej badań laboratoryjnych. Z praktycznego punktu widzenia szczególne znaczenie posiadają obliczone rozkłady ciśnienia dynamicznego. Mogą one stanowić silną przesłankę do usytuowania detektora wirów w przepływomierzu wirowym.

## LITERATURA

- [1] Strouhal V., Über eine besondere art der tonerregung, *Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge*, vol 5, 1878, pp. 126-251.
- [2] Rayleigh, *Phil Mag.*, vol. 6 (1915-16), p. 433.
- [3] N. Rott, Note on the history of the Reynolds Number, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22, 1990, pp 1-11.
- [4] von Karman T., Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erzeugt, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klass.*, 1911, pp. 509-517.
- [5] Yamasaki H., Rubin M.: The vortex flowmeter, *Flow its Measurement and Control in Science and Industry*, USA 1974, pp. 975-985
- [6] Roshko A., On the development of turbulent wakes from vortex streets, *NACA Report*, No 1191, 1954.
- [7] Berger E., Willie R.: Periodic flow phenomena, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 4, 1972, pp. 313-340
- [8] Temam R., Navier-Stokes Equations, *North-Holland*, 2<sup>nd</sup> ed. 1977
- [9] Otelbaev M., The existence of a strong solution to the Navier-Stokes equations, ISSN 1682-0525, *Mathematical Journal*. 2013. Vol 13, Num 4 (50)

Autorzy: mgr inż. Artur Kulińczak, Instytut Systemów Elektronicznych, Politechnika Warszawska, ul. Nowowiejska 15/19, 00-665 Warszawa, E-mail: [akulincz@o2.pl](mailto:akulincz@o2.pl); prof. nzw. dr hab. inż. Grzegorz Pankanin, Instytut Systemów Elektronicznych, Politechnika Warszawska, ul. Nowowiejska 15/19, 00-665 Warszawa, E-mail: [GP227@ise.pw.edu.pl](mailto:GP227@ise.pw.edu.pl)