

Metody wyznaczania kątów z żyroskopów dla filtru komplementarnego na potrzeby określania orientacji IMU

Streszczenie. W pracy zaprezentowano sposób estymacji orientacji obiektu w przestrzeni trójwymiarowej z wykorzystaniem filtru komplementarnego. Wykorzystano konstrukcję filtru komplementarnego dla każdego z trzech kątów Eulera. Fuzja danych w tej filtracji polega na poprawie kątów wyznaczonych z układu akcelerometrów i magnetometrów oraz kątów z żyroskopów, zakładając rozdzielność częstotliwościową zakłóceń w tych dwóch kanałach pomiarowych. Celem opracowania jest analiza metod wyznaczania kątów z żyroskopu na potrzeby filtru komplementarnego i ich wpływu na dokładność estymacji orientacji. Zaproponowano metodę niezależnego całkowania pomiarów z żyroskopów, całkowania prędkości kątowych po uprzednim przeliczeniu ich do układu nawigacyjnego oraz macierzowego całkowania równania rotacji. Analizę wykonano na danych z symulatora czujnika IMU oraz dla danych pomiarowych z rzeczywistego sensora IMU.

Abstract. In the paper complementary filter is presented for estimating 3D orientation. The main aim of this paper is to analyze methods of determining the angles from gyroscopes. Angles from gyro are calculated by integration measurements directly in sensor frame, by integration angles velocity after transformation to navigation frame and by strapdown integration. Analysis of the complementary filter is presented for data from real IMU sensor and for data from IMU signal simulator. (**Angles from gyroscope to complementary filter in IMU**)

Słowa kluczowe: orientacja 3D, IMU, filtr komplementarny, całkowanie żyroskopów, całkowanie bezkardanowe.

Keywords: 3D orientation, IMU, complementary filter, gyroscope integration, strapdown integration.

doi:10.12915/pe.2014.09.52

Wprowadzenie

W pracy zaprezentowano sposób wyznaczania orientacji obiektu w przestrzeni wykorzystujący filtr komplementarny w jej podstawowej formie [1]. Klasyczną, jednowymiarową postać filtru komplementarnego stosuje się do estymacji sygnału z dwóch niezależnych kanałów pomiarowych, charakteryzujących się wzajemnym dopełnianiem zakłóceń w dziedzinie częstotliwości. Nieliniowy opis orientacji w przestrzeni 3D teoretycznie wyklucza bezpośrednio zastosowanie trzech jednowymiarowych tego typu filtrów. Eliminację zakłóceń uwzględniającą ich komplementarność można zastosować do poprawy określania orientacji w przestrzeni trójwymiarowej jednakże wymaga to właściwego opisu matematycznego [3, 4, 5] lub odpowiedniego przygotowania sygnałów pomiarowych, co jest celem niniejszego opracowania. Zaprezentowano zatem, różne podejścia do estymacji sygnałów wejściowych dla trójosiowego filtru komplementarnego, ze szczególnym uwzględnieniem konstrukcji bazującej na wykorzystaniu założeń podobnych jak dla naiwnego klasyfikatora bayesowskiego [6, 7]. Ponadto, zaprezentowano ideę uogólnionego filtru komplementarnego.

Znajomość orientacji w przestrzeni, zdefiniowanej jako kąty Eulera w odpowiednim układzie odniesienia, jest niezbędna do sterowania obiektami a także jako źródło informacji o ich aktualnym stanie. Informacja o orientacji wykorzystywana jest w bardzo różnych gałęziach nauki, przemysłu i urządzeniach życia codziennego. Pomocna jest ona przy analizie chodu ludzkiego [2], określaniu zakresu i ruchomości kończyn oraz wizualizacji segmentów ciała ludzkiego [9, 10, 11]. Znajomość orientacji szczególnie pożądana jest w lotnictwie a przede wszystkim w bardzo popularnym w ostatnim czasie sterowaniu i nawigacji obiektami typu UAV [4, 12, 13, 14]. Orientacja wykorzystywana jest także w smartfonach [8]. Miniaturyzacja czujników wykonanych w technologii MEMS używanych do budowy IMU (ang. *Inertial Measurement Unit*) sprawia wręcz nieograniczone możliwości implementacji tego typu układów w rozwiązaniach technicznych, biologicznych czy nawet sportowych [15].

Podstawowy układ czujników IMU do określenia pełnej orientacji w przestrzeni stanowi zestaw trzech trójosiowych czujników przyspieszenia liniowego (akcelerometry),

prędkości kątowej (żyroskopy) oraz pola magnetycznego (magnetometry). Z odpowiednio przygotowanych sygnałów pomiarowych należy określić orientację (kąty). W literaturze znaleźć można różne algorytmy oferujące wyznaczenie orientacji w postaci kątów Eulera ϕ , θ , ψ nazywanych odpowiednio kątem przechylenia, pochylenia oraz odchylenia. Rozwiązania te wykorzystują rachunek kwaternionów, filtry komplementarne oraz filtry Kalmana, także w wersjach nieliniowych, ale przede wszystkim ich wzajemne hybrydy [3, 4, 16, 17, 18]. Filtr Kalmana wymaga zapisania dla procesu jego modelu, który w przeważających przypadkach bazuje na nieliniowych równaniach kinematyki ruchu obrotowego bryły sztywnej. Kwaterniony oraz filtry komplementarne wymagają zazwyczaj przekształceń macierzowych.

W pracy przedstawiono sposób estymacji kątów Eulera wykorzystujący pierwotną ideę filtracji komplementarnej [1]. Przy takim sposobie przetwarzania sygnałów, poszukiwane kąty wyznaczone są na podstawie filtracji wysokoczęstotliwościowej kątów z akcelerometrów i magnetometrów oraz filtracji dolnoprzepustowej kątów z żyroskopów. W metodzie tej istotny jest sposób wyznaczania kątów z żyroskopów na drodze odpowiedniego całkowania prędkości kątowej. Jest to główny aspekt poruszany w niniejszym opracowaniu. W rezultacie analizie poddano metody z całkowaniem naiwnym [19], z całkowaniem w układzie nawigacyjnym oraz z bezkardanowym całkowaniem macierzowym [20, 21, 25].

Do oceny skuteczności działania filtru komplementarnego wykorzystano średni maksymalny błąd MAE (ang. *Mean Absolute Error*) oraz przebiegi czasowe. Badania przeprowadzono dla danych wygenerowanych z symulatora wskazań czujników oraz dla danych z rzeczywistego czujnika IMU jak w [19]. Stworzony na potrzeby analizy ilościowej z wykorzystaniem wskaźnika MAE symulator dla zadanych kątów Eulera wyznacza odpowiadające im wskazania akcelerometrów, żyroskopów i magnetometrów.

Układ nawigacyjny (referencyjny)

W problemach wyznaczania orientacji obiektu w przestrzeni 3D wykorzystywane są różne układy odniesienia związane z przestrzenią, w której odbywa się ruch. Definiuje się układy bazowe oraz związane z

obiektem. Układ referencyjny (bazowy) definiowany jest jako nieruchomy układ przestrzeni nawigacyjnej (ang. *n-frame*; *navigation-frame*) [20,21] np.: ECI, ECEF, LTP w tym: ENU oraz NED [22,20]. Druga grupa układów są to układy związane z obiektem (ang. *b-frame*; *body-frame*) [21,23] lub układem pomiarowym umieszczonym na nim (ang. *s-frame*; *sensor-frame*) [9]. W analizowanym problemie jako układ referencyjny (ang. *n-frame*) zaproponowana została konstrukcja o strukturze NWU (ang. *North-West-Up*) (rys. 3). Jako układ przestrzeni ruchomej, dla której wyznaczana jest orientacja względem układu referencyjnego, przyjęta została postać umożliwiająca określenie kąta obrotu wokół trzech osi R-P-Y (ang. *Roll-Pitch-Yaw*). Przyjęto też, że układ związany z obiektem (ang. *b-frame*) jest tożsamy z układem pomiarowym sensorów IMU (ang. *s-frame*). W badaniach na potrzeby określenia orientacji obiektu estymuje się kąty przechylenia (ang. *Roll*), pochylenia (ang. *Pitch*) oraz odchylenia (ang. *Yaw*) oznaczane w pracy odpowiednio jako ϕ , θ , ψ .

Związek pomiędzy układem bazowym (referencyjnym) a układem pomiarowym opisuje macierz R określająca transformację obrotu w przestrzeni trójwymiarowej jednego układu względem drugiego. W nawigacji inercyjnej, szczególnie w lotnictwie, macierz przekształcenia jednorodnego (1) odpowiadająca obrotom o kąty Y-P-R [24, 25] (odpowiednio o kąty R-P-Y względem pierwotnego/bazowego układu odniesienia NWU) może zostać zdefiniowana z wykorzystaniem elementarnych macierzy obrotów wokół poszczególnych osi [9, 20, 26, 27]. Macierz rotacji określająca transformację obrotu układu nieruchomego NWU do układu ulegającego rotacji RPY zdefiniowana jest następująco [20, 26, 21, 25]:

$$(1) \quad R_{RPY}^{NWU} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}$$

$$c_\alpha = \cos(\alpha), s_\alpha = \sin(\alpha)$$

Pozwala ona na określenie orientacji obiektu w układzie bazowym NWU na podstawie znajomości wartości kątów R-P-Y oraz informacji o obiekcie wyrażonej w układzie pomiarowym IMU. Natomiast przekształcenie odwrotne rotacji, w notacji kątów Eulera XYZ (RPY), można zdefiniować jako obroty w przeciwnym (odwrotnym) kierunku wokół osi Z-Y-X układu pierwotnego/ruchomego RPY związanego z układem pomiarowym IMU:

$$(2) \quad R_{NWU}^{RPY} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}$$

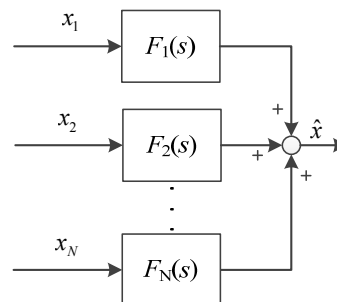
$$c_\alpha = \cos(\alpha), s_\alpha = \sin(\alpha)$$

Powyższe transformacje (1) i (2) często określane są jako macierze kosinusów kierunkowych DCM (ang. *Direction Cosine Matrix*) [22, 28, 21, 25], powiązane są ze sobą w następującej zależności:

$$(3) \quad R_{RPY}^{NWU} = \begin{bmatrix} I_R & I_P & I_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_N^T \\ I_W^T \\ I_U^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_N & I_W & I_U \end{bmatrix}^T = \left(R_{NWU}^{RPY} \right)^{-1}$$

Filtr komplementarny

Zasada komplementarności polega na wzajemnym uzupełnianiu lub dopełnianiu. Zasadę tę wykorzystuje się w konstrukcji filtrów, które integrują informacje pochodzące z różnych, kanałów i czujników pomiarowych. Celem tej filtracji jest wykorzystanie najistotniejszej informacji, którą transportuje dany sygnał pomiarowy, przy jednoczesnym pominięciu części będącej jego zakłóceniem. Filtracja ta umożliwia połączenie pomiarów z różnych czujników i uzyskanie informacji o lepszych własnościach. Czujniki powinny zatem cechować się różną charakterystyką częstotliwościową błędów pomiarowych. Idea filtracji komplementarnej przedstawiona została na rysunku 1. Akwizycja oraz przetwarzanie sygnału pomiarowego w celu wyodrębnienia z niego informacji użytecznej polega na wykorzystaniu różnego rodzaju filtrów: dolnoprzepustowych, górnoprzepustowych lub pasmowo przepustowych.

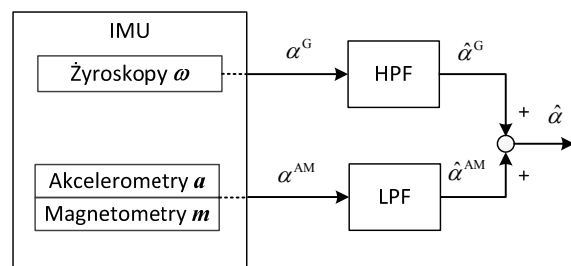


Rys. 1. Ogólna idea filtru komplementarnego

Konstrukcja takiego filtru powinna spełniać ogólną zależność:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^N F_i(s) = 1$$

W pracy, do poprawnego określenia orientacji w przestrzeni wykorzystuje się pomiary z akcelerometrów oraz magnetometrów, zakłócone sygnałem wysokoczęstotliwościowym (szumy) oraz pomiary z żyroskopów skażone głównie sygnałem wolnozmiennym (błędy zera). Do wyeliminowania zakłóceń szybkochylnych wykorzystano filtry dolnoprzepustowe (ang. *low-pass filter* - LPF) natomiast do usunięcia wolnozmiennego dryftu zera użyto filtru górnoprzepustowego (ang. *high-pass filter* - HPF). Filtry te można zrealizować w technice ciągłej (np. czwórniki typu RLC) lub cyfrowej (o skończonej lub nieskończonej odpowiedzi impulsowej). Wykorzystano zatem filtr komplementarny o schemacie blokowym przedstawionym na rysunku 2 z którego wynika, iż estymowany kąt $\hat{\alpha}$ jest sumą dwóch ocen: kąta z żyroskopu $\hat{\alpha}^G$ oraz kąta z akcelerometru i magnetometru $\hat{\alpha}^{AM}$.



Rys. 2. Filtr komplementarny dla estymacji kąta z wykorzystaniem pomiarów z IMU

W związku z tym, iż układ wyznaczający orientację zaimplementowano w technice cyfrowej, obliczenia przeprowadzone są w jednostce centralnej, a więc docelowo filtry zrealizowano w postaci algorytmu wykonywanego przez program komputerowy. Jednakże, syntezę filtra zapoczątkowano w dziedzinie czasu ciągłego, mając na uwadze klasyczne jego ujęcia w postaci filtrów: Butterwortha, Besela czy Chebyszewa. W pracy wykorzystano filtr dolnoprzepustowych w postaci inercji I rzędu:

$$(5) \quad LPF = \frac{1}{1 + Ts}$$

gdzie T jest stałą czasową elementu inercyjnego i określa dynamikę filtra. Tak więc, zgodnie z zasadą komplementarności wynikającą z zależności (4), filtr górnoprzepustowy będzie miał postać:

$$(6) \quad HPF = 1 - LPF = \frac{Ts}{1 + Ts}$$

W celu zaimplementowania algorytmu filtra komplementarnego o elementach dynamicznych (5) i (6) w układzie mikroprocesorowym, należy je zapisać w postaci równań różnicowych a więc zdyskretyzować w dziedzinie czasu. W pracy wykorzystano przybliżenie operacji różniczkowania w czasie schematem różnicy wstecznej (ang. *backward Euler method*):

$$(7) \quad s \triangleq \frac{df(t)}{dt} \cong \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t},$$

który prowadzi do uzyskania podstawienia:

$$(8) \quad s \triangleq \frac{1}{\Delta t} \frac{z - 1}{z} = \frac{1}{\Delta t} (1 - z^{-1})$$

gdzie z^{-1} jest operatorem opóźnienia o jeden okres próbkowania Δt .

Oznaczając jako:

$$(9) \quad LPF = \frac{\hat{\alpha}_k^{AM}}{\alpha_k^{AM}}; \quad HPF = \frac{\hat{\alpha}_k^G}{\alpha_k^G}$$

oraz wstawiając do transmitancji filtrów (5) i (6) zależność (8) otrzymuje się dyskretne transmitancje filtrów:

$$(10) \quad \hat{\alpha}_k^G = \frac{\frac{T}{\Delta t} (1 - z^{-1})}{\left(1 + \frac{T}{\Delta t}\right) - \frac{T}{\Delta t} z^{-1}} \cdot \alpha_k^G$$

$$\hat{\alpha}_k^{AM} = \frac{1}{\left(1 + \frac{T}{\Delta t}\right) - \frac{T}{\Delta t} z^{-1}} \cdot \alpha_k^{AM}$$

Uwzględniając równanie filtra komplementarnego:

$$(11) \quad \hat{\alpha}_k = \hat{\alpha}_k^{AM} + \hat{\alpha}_k^G$$

otrzymuje się pełny jej opis:

$$(12) \quad \hat{\alpha}_k = \frac{\Delta t}{(\Delta t + T) - Tz^{-1}} \alpha_k^{AM} + \frac{T(1 - z^{-1})}{(\Delta t + T) - Tz^{-1}} \alpha_k^G =$$

$$= \frac{T}{\Delta t + T} \hat{\alpha}_{k-1} + \frac{\Delta t}{\Delta t + T} \alpha_k^{AM} + \frac{T}{\Delta t + T} (\alpha_k^G - \alpha_{k-1}^G)$$

Zastosowanie podstawienia $p = \frac{T}{\Delta t + T}$ prowadzi do zależności:

$$(13) \quad \hat{\alpha}_k = p \hat{\alpha}_{k-1} + (1 - p) \alpha_k^{AM} + p (\alpha_k^G - \alpha_{k-1}^G)$$

którą przedstawić można w postaci wektorowej:

$$(14) \quad \hat{\mathbf{a}}_k = p \hat{\mathbf{a}}_{k-1} + (1 - p) \boldsymbol{\alpha}_k^{AM} + p (\boldsymbol{\alpha}_k^G - \boldsymbol{\alpha}_{k-1}^G)$$

gdzie $\hat{\mathbf{a}}_k$, $\boldsymbol{\alpha}_k^G$, $\boldsymbol{\alpha}_k^{AM}$ są odpowiednio wektorami kątów estymowanych, wektorami kątów wyznaczonych z żyroskopów oraz wektorami kątów wyznaczonych z układu akcelerometry-magnetometry:

$$(15) \quad \hat{\mathbf{a}}_k = [\hat{\phi}_k \quad \hat{\theta}_k \quad \hat{\psi}_k]^T$$

$$(16) \quad \boldsymbol{\alpha}_k^{AM} = [\phi_k^{AM} \quad \theta_k^{AM} \quad \psi_k^{AM}]^T$$

$$(17) \quad \boldsymbol{\alpha}_k^G = [\phi_k^G \quad \theta_k^G \quad \psi_k^G]^T$$

Orientacja obiektu

Układ pomiarowy IMU zbudowany został z wykorzystaniem technologii MEMS [20, 28]. Wyposażony został w trzy trójosiowe układy pomiarowe zdefiniowane w konfiguracji NWU układu odniesienia związanego z układem bazowym Ziemi.

Akcelerometry i magnetometry

Model sygnału mierzonego przyspieszenia przez układ akcelerometrów definiowany jest jako suma rzeczywistej wartości przyspieszenia obiektu $\tilde{\mathbf{a}}$, wektora grawitacji \mathbf{g} oraz składowej \mathbf{w}_a modelującej zakłócenie w postaci białego szumu gaussowskiego [9, 10]:

$$(18) \quad \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{g} + \mathbf{w}_a$$

Podobnie sygnał mierzony przez układ magnetometrów modelowany jest jako suma wektora natężenia pola magnetycznego Ziemi $\tilde{\mathbf{b}}$ oraz wektora \mathbf{w}_m modelującego szum pomiarowy [9]:

$$(19) \quad \mathbf{m} = \tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{w}_m$$

Rozpatrując przypadek idealny (bez zakłóceń) układ trójosiowego akcelerometru mierzy wartość przyspieszenia

$$\mathbf{a}^A = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T$$

z uwzględnieniem rzutów wektora przyspieszenia na osie układu pomiarowego w przestrzeni RPY [24]. Również w przypadku zastosowanego w IMU trójosiowego układu magnetometrów zwracana jest

informacja o rozkładzie znormalizowanego $\left(\|\mathbf{b}\| = \left\|\frac{\tilde{\mathbf{b}}}{B}\right\| = 1\right)$

wektora pola magnetycznego Ziemi

$$\mathbf{b} = [\cos(\gamma) \quad 0 \quad -\sin(\gamma)]^T$$

w układzie RPY obiektu [10]. Kąt γ definiuje odchylenie (inklinację) wektora pola magnetycznego od płaszczyzny XY układu odniesienia. Trójosiowy magnetometr mierzy więc wartości rzutów

$$\mathbf{m}^M = [m_x \quad m_y \quad m_z]^T$$

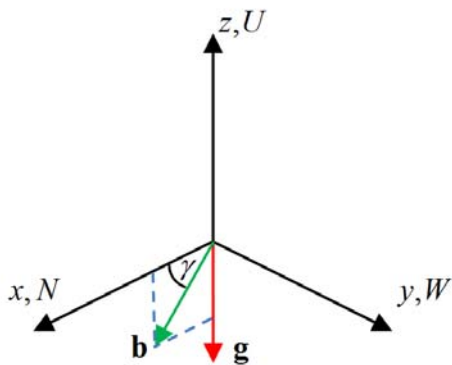
znormalizowanego wektora pola magnetycznego [24] w układzie RPY [9]. Budowa czujników przyspieszenia oraz magnetometrów układu IMU jest

zgodna z konfiguracją układu bazowego Ziemi NWU (rys. 3). Wielkości mierzone przez te układy można zdefiniować poniższymi zależnościami:

$$(20) \quad \mathbf{a}^A = \mathbf{R}_{NWU}^{RPY} \cdot (\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{g})$$

$$(21) \quad \mathbf{m}^M = \mathbf{R}_{NWU}^{RPY} \cdot \mathbf{b}$$

gdzie $\tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{g} = [0 \ 0 \ -g]^T$ oraz \mathbf{b} to odpowiednio wektor przyspieszenia obiektu, wektor przyspieszenia ziemskiego ($g \approx 9,81 [\text{m/s}^2]$) oraz znormalizowany wektor pola magnetycznego Ziemi (rys. 3) wyrażone w układzie odniesienia NWU.



Rys. 3. Położenie wektorów przyspieszenia ziemskiego \mathbf{g} oraz pola magnetycznego Ziemi \mathbf{b} w układzie odniesienia NWU

Przyjmując, że wartość przyspieszenia związanego z ruchem obiektu jest pomijalnie mała ($\tilde{\mathbf{a}} \approx \mathbf{0}$) [27] można w przybliżeniu założyć, że układ akcelerometrów mierzy wartości rzutów stałego wektora przyspieszenia ziemskiego wyrażonego w układzie pomiarowym IMU. Założenie takie może zostać poczynione w przypadku gdy ruch obiektu i związanego z nim czujnika IMU jest zbliżony do ruchu pozbawionego nagłych i gwałtownych zmian. Wykorzystując więc powyższe założenie oraz operator rotacji \mathbf{R}_{NWU}^{RPY} (2) można wektor przyspieszenia ziemskiego \mathbf{g} wyrazić w układzie RPY:

$$(22) \quad \mathbf{R}_{NWU}^{RPY} \cdot (-\mathbf{g}) = \begin{bmatrix} -s_\theta g \\ s_\phi c_\theta g \\ c_\phi c_\theta g \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \mathbf{a}^A$$

Podobnie przekształcając równanie (21) otrzymano [29]:

$$(23) \quad \mathbf{R}_Y(\theta) \cdot \mathbf{R}_X(\phi) \cdot \mathbf{m}^M = \mathbf{R}_Z(\psi)^T \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} c_\theta m_x + s_\theta s_\phi m_y + c_\phi s_\theta m_z \\ c_\phi m_y - s_\phi m_z \\ -s_\theta m_x + s_\phi c_\theta m_y + c_\phi c_\theta m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi \\ -s_\theta c_\psi \\ -s_\psi \end{bmatrix}$$

gdzie $\mathbf{R}_K(\alpha)$ to odpowiednio elementarna macierze rotacji wokół osi $K \in \{X, Y, Z\}$ o kąt $\alpha \in \{\varphi, \theta, \psi\}$.

Wykorzystując zależność (22) oraz (23) można, w oparciu o uzyskany pomiar przyspieszenia liniowego \mathbf{a}^A [27, 30] oraz pomiar wektora pola magnetycznego \mathbf{m}^M

[29, 30], wyznaczyć wartości kątów rotacji obiektu ϕ, θ oraz ψ :

$$(24) \quad \phi^{AM} = \arctan\left(\frac{a_y}{a_z}\right)$$

$$(25) \quad \theta^{AM} = \arcsin\left(\frac{-a_x}{g}\right)$$

$$(26) \quad \psi^{AM} = \arctan\left(\frac{s_\phi m_z - c_\phi m_y}{c_\theta m_x + s_\phi s_\theta m_y + c_\phi s_\theta m_z}\right)$$

Uwzględniając zakres zmienności poszczególnych kątów zapewniający jednoznaczność rozwiązania [26] ($\{\phi \sim \pm\pi\}$, $\{\theta \sim \pm\pi/2\}$, $\{\psi \sim \pm\pi\}$) w procesie wyznaczania wartości kątów ϕ^{AM} oraz ψ^{AM} wykorzystana została funkcja $\arctan2(Y, X)$ zwracająca wartości kątów w zakresie $\pm\pi$.

Ze względu na pojawiające się zakłócenia w układzie pomiarowym akcelerometrów (18) oraz magnetometrów (19) wartości wyznaczonych kątów rotacji α^{AM} charakteryzują się gwałtownymi, szybkozmiennymi oraz krótkotrwałymi zmianami wartości w czasie. Z tego też powodu, w celu wyeliminowania zakłóceń wysokoczęstotliwościowych z sygnału α_k^{AM} wykorzystano jeden z kanałów w filtracji komplementarnej – LPF.

Żyroskopy

Trzecim układem czujników wykorzystywanym w IMU jest trójosiowy układ żyroskopów. Sygnał mierzony przez układ żyroskopów modelowany jest jako suma wektora prędkości kątowych $\tilde{\omega}$, wektora wartości podporowych (biasu) β oraz białego szumu gaussowskiego \mathbf{w}_ω [9, 24]:

$$(27) \quad \omega^G = \tilde{\omega} + \beta + \mathbf{w}_\omega$$

W przypadku idealnym (bez biasu oraz zakłóceń) układ ten, skonfigurowany zgodnie z układem bazowym NWU, zwraca informację o zmianie kąta obrotu wokół danej osi układu obracanego RPY. W rezultacie sygnał z układu żyroskopów można zdefiniować jako wektor prędkości kątowych $\omega^G = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ poszczególnych osi układu pomiarowego IMU. Sygnał ten można więc wykorzystać do

wyznaczenia wartości kątów $\alpha^G = [\phi^G \ \theta^G \ \psi^G]^T$ rotacji w procesie całkowania prędkości kątowych ω^G .

• Całkowanie naiwne

W przypadku sygnałów skalarnych (rotacji wokół jednej osi) problem wyznaczenia kąta obrotu w oparciu o informację o prędkości kątowej jest problemem trywialnie prostym. Związek pomiędzy zmianą kąta a prędkością kątową można zdefiniować jak w zależności:

$$(28) \quad \omega(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} \approx \frac{\alpha(t) - \alpha(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\alpha(t)}{\Delta t}$$

Z równania (28) można wprost wyprowadzić zależność pozwalającą określić wartość kąta rotacji:

$$(29) \quad \alpha(t) \approx \alpha(t - \Delta t) + \omega(t) \cdot \Delta t$$

Taki sposób całkowania w ogólnym przypadku wyznaczania orientacji w przestrzeni 3D jest niepoprawny. Jednak w prezentowanej pracy podejście przedstawione w (29) zostało rozszerzone na przypadek trójwymiarowy. Rozszerzenie takie było możliwe przy założeniu o niezależności poszczególnych składowych wektora prędkości kątowych zwracanych przez układ żyroskopów podobnie jak w systemach klasyfikacji bayesowskiej [6, 7]. Definiuje się w nich konstrukcje tzw. naiwnego klasyfikatora. Bazuje on na założeniu, że prawdopodobieństwo wystąpienia wektora zdarzeń (wielowymiarowej zmiennej losowej) w analizowanym procesie jest równe iloczynowi prawdopodobieństw wystąpienia zdarzeń elementarnych. Konsekwencje te wynikają z założenia o niezależności zdarzeń elementarnych definiujących wielowymiarową zmienną losową. Tak więc, dla analizowanego przypadku poczynione zostało założenie, że wektor prędkości kątowej ω^G modelujący zdarzenie losowe, może być analizowany jako składający się z trzech zdarzeń niezależnych. Bazując na takim założeniu można powyższą zależność (29) rozszerzyć na przypadek trójwymiarowy:

$$(30) \quad \alpha^G(t) \approx \alpha^G(t - \Delta t) + \omega^G(t) \cdot \Delta t$$

- *Całkowanie w układzie nawigacyjnym*

W ogólnym przypadku 3D sposób całkowania prędkości kątowych przedstawiony w (29) jest niepoprawny ze względu na fakt, że trójosiowy układ żyroskopów mierzy prędkości kątowe w układzie pomiarowym RPY sensora IMU. Kąty R-P-Y natomiast definiują rotację obiektu względem układu bazowego NWU. Rozwiązaniem tego problemu jest więc przeliczenie prędkości kątowych żyroskopów ω^G wyrażonych w układzie sensora do układu bazowego. Transformacji takiej można dokonać według zależności [21, 31, 32, 33]:

$$(31) \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi s_\theta / c_\theta & c_\phi s_\theta / c_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi / c_\theta & c_\phi / c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

W rezultacie otrzymuje się prędkości kątowe określające zmianę kąta obrotu wokół osi układu bazowego NWU. Dla tak zdefiniowanych sygnałów można już w sposób poprawny przeprowadzić operację całkowania prędkości kątowych w układzie NWU w trzech niezależnych kanałach:

$$(32) \quad \alpha^G(t) \approx \alpha^G(t - \Delta t) + \frac{d\alpha(t)}{dt} \cdot \Delta t$$

Uzyskane w ten sposób kąty obrotu będą wyrażały rotację obiektu względem układu referencyjnego. W przypadku braku zakłóceń otrzymane wartości kątów są tożsame z wynikami uzyskiwanymi z rozwiązania równania różniczkowego opisującego ruch obrotowy.

- *Całkowanie macierzowe (bezgardanowe)*

Wartości kątów rotacji R-P-Y możliwe są do wyznaczenia z macierzy rotacji R_{RPY}^{NWU} (3). Wykorzystując wektor prędkości kątowych ω^G można go traktować jako pseudowektor rotacji [22, 25] wokół którego obrócony zostaje układ przestrzeni RPY związany z układem IMU. W takim przypadku macierz rotacji R_{RPY}^{NWU} oraz związane z nią

wartości kątów ϕ , θ , ψ można wyznaczyć rozwiązując poniższe równanie różniczkowe generujące rotację [10, 25]:

$$(33) \quad \frac{d}{dt} R_{RPY}^{NWU} = R_{RPY}^{NWU} \cdot [\omega^G \times]$$

gdzie $[\omega^G \times]$ jest macierzą skośnie-symetryczną [34].

Zakładając, że wektor pseudorotacji jest równy wektorowi prędkości kątowych mierzonych przez układ żyroskopów ω^G , wówczas tensor skośnie-symetryczny o wektorze osiowym ω^G [34] zdefiniowany jest następująco [20, 22, 28, 35]:

$$(34) \quad [\omega^G \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Analizując równanie różniczkowe rotacji (33) można wyprowadzić iteracyjne równanie umożliwiające wyznaczenie macierzy $R_{RPY}^{NWU}(t)$ w kolejnych chwilach czasu [9, 25, 30]:

$$(35) \quad R_{RPY}^{NWU}(t) \approx R_{RPY}^{NWU}(t - \Delta t) \cdot (I_{3 \times 3} + [\omega^G \times] \cdot \Delta t)$$

gdzie Δt jest okresem próbkowania w układzie IMU.

Wykorzystując informację o wyznaczonej macierzy przekształcenia jednorodnego $R_{RPY}^{NWU}(t)$ (35) można określić, z porównania odpowiednich elementów (wiersz,kolumna) macierzy:

$$\begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

wartości kątów rotacji obiektu α^G [20, 25] w następujący sposób:

$$(36) \quad \phi^G = \arctan\left(\frac{r_{32}}{r_{33}}\right)$$

$$(37) \quad \theta^G = \arcsin(-r_{31})$$

$$(38) \quad \psi^G = \arctan\left(\frac{r_{21}}{r_{11}}\right)$$

Podobnie jak w przypadku kątów (24)-(26) uzyskiwanych z akcelerometrów i magnetometrów uwzględniając zakres zmienności poszczególnych kątów zapewniający jednoznaczność rozwiązania [26] w procesie wyznaczania wartości kąta ϕ^G oraz ψ^G wykorzystać można funkcję $\arctan2(Y,X)$ zwracającą wartość kąta w zakresie $\pm\pi$.

Ze względu na występujący w pomiarach z żyroskopów błąd zera, zamodelowany w postaci sygnału β (27), na skutek operacji całkowania, w trzech wyżej opisanych wariantach, wyznaczone na jej podstawie kąty rotacji α^G wykazują silny efekt powolnego płynięcia (dryftu) ich wartości. W celu wyeliminowania błędu zera wykorzystuje

się komplementarny kanał filtru - HPF. Efekt zakłóceń szybkozmiennych jest w tym przypadku pomijalnie mały.

Przykładowe eksperymenty

Na potrzeby przeprowadzenia testów zaprojektowany został symulator sensora IMU, który dla zdefiniowanych i zadanych przebiegów czasowych wartości kątów rotacji określa przebiegi sygnałów zwracanych przez układy czujników przyspieszenia liniowego (\mathbf{a}_k^A), prędkości kątowych (żyroskopów) ($\boldsymbol{\omega}_k^G$) oraz wektora pola magnetycznego (magnetometrów) (\mathbf{m}_k^M):

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_k^A &= \tilde{\mathbf{a}}_k^A - \mathbf{g}_k^A + \mathbf{w}_{a,k}^A \\ \boldsymbol{\omega}_k^G &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k^G + \boldsymbol{\beta}_k + \mathbf{w}_{\omega,k}^G \\ \mathbf{m}_k^M &= \tilde{\mathbf{d}}_k^M + \mathbf{d}_k^M + \mathbf{w}_{m,k}^M\end{aligned}$$

Generalnie symulator IMU realizuje zadanie określone zależnością:

$$\left(\mathbf{a}_k^A, \boldsymbol{\omega}_k^G, \mathbf{m}_k^M\right) = f_{\text{IMU}}\left(\boldsymbol{\alpha}_k, \tilde{\mathbf{a}}_k, \boldsymbol{\beta}_k, \mathbf{d}_k, \boldsymbol{\sigma}_{\text{sensor}}\right)$$

gdzie: $\boldsymbol{\alpha}_k$ - wartości zadane kątów rotacji, $\tilde{\mathbf{a}}_k$ - przyspieszenie liniowe obiektu w układzie nawigacyjnym, $\boldsymbol{\sigma}_{\text{sensor}} = \{\sigma^A, \sigma^G, \sigma^M\}$ - zbiór wartości wariancji sensorów.

Na potrzeby testów wygenerowane zostały przebiegi sygnałów z sensorów symulatora IMU przy założeniu o braku zakłócenia pola magnetycznego ($\mathbf{d}_k = \mathbf{0}$) oraz przyspieszenia liniowego obiektu ($\tilde{\mathbf{a}}_k = \mathbf{0}$) przy jednocześnie występującym biasie na żyroskopach:

$$\boldsymbol{\beta}_k = [0.01 \ 0.01 \ 0.01]^T \text{ [rad / s]}$$

Dla ilościowej analizy dokładności estymacji zastosowano wskaźnik MAE, a więc średni bezwzględny błąd oszacowania zdefiniowany, jako:

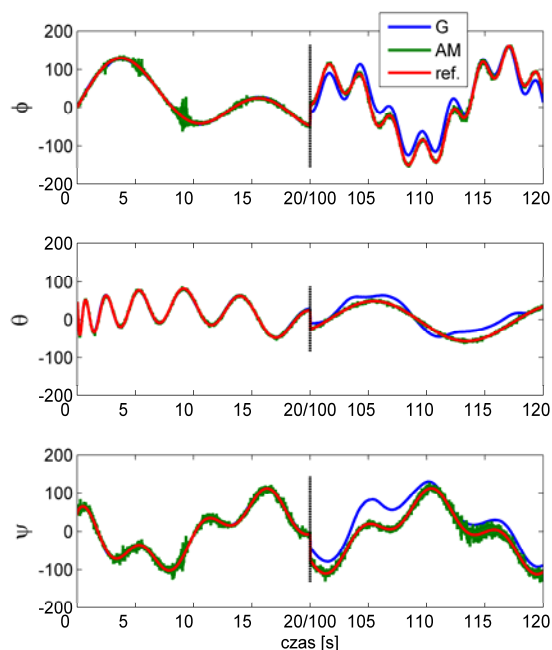
$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\hat{\alpha}_k - \alpha_k|$$

gdzie $\hat{\alpha}_k$ to estymowana wartość kąta, a α_k to referencyjna wartość kąta.

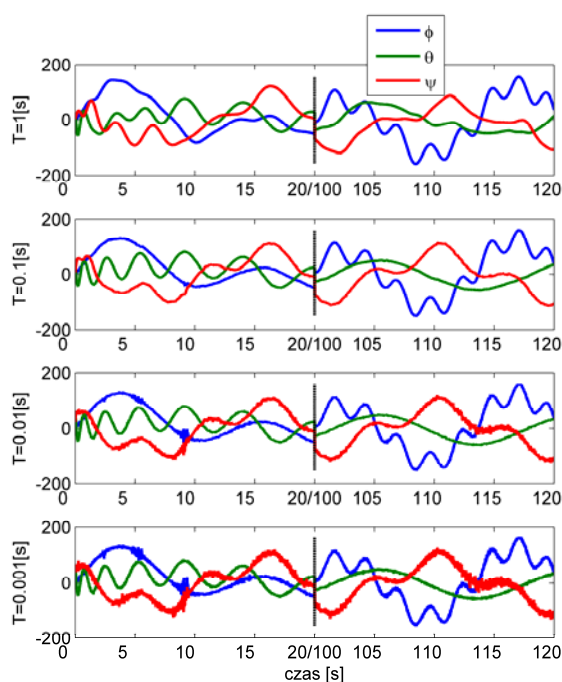
W celu dokładniejszej i przejrzystszej analizy symulacji przebiegi zaprezentowano w dwóch zakresach czasowych: 0-20 [s] oraz 100-120 [s] eksperymentu, sklejając je w jeden wykres. Na rysunku 3 zaprezentowano przykładowy, zadany w symulatorze, schemat zmiany kątów Eulera ϕ , θ , ψ wraz z ich estymacją na podstawie żyroskopów oraz na podstawie układu akcelerometrii-magnetometrii. Kąty z żyroskopów w zakresie 100-120 [s] charakteryzują się błędem wynikającym z sumowania błędu zera natomiast kąty z akcelerometrów i magnetometrów skażone są w całym horyzoncie czasu błędami wysokoczęstotliwościowymi. Wykorzystanie filtru komplementarnego (rys.(4)), w układzie z naiwnym całkowaniem prędkości kątowych z żyroskopów, prowadzi do usunięcia błędu zera oraz pozbycia się szumów pomiarowych. Zaprezentowana na tym rysunku analiza jakości ze względu na stałą czasową filtru wskazuje, że jakościowo najlepsze przebiegi uzyskano dla wartości

$T=0.1$ [s]. W tabeli 1 zaprezentowano wartości MAE dla wszystkich metod całkowania odczytów z żyroskopów oraz stałych czasowych T , które potwierdzają tę obserwację.

Na rysunku 5 zaprezentowano natomiast porównanie przebiegów czasowych z filtracji komplementarnej przy zastosowaniu podejścia naiwnego (30) z prawidłowym całkowaniem macierzowym równania rotacji (35). Z przeprowadzonych doświadczeń wynika ponadto, że przebiegi czasowe z całkowaniem w układzie nawigacyjnym (31) i (32) nie różnią się od tych uzyskanych dla całkowania macierzowego (35). Ze względów na czytelność rysunku nie zostały one na nich zamieszczone.



Rys. 3. Przebiegi czasowe kątów Eulera ϕ, θ, ψ estymowane z żyroskopów (G), akcelerometrów (AM) i kąty referencyjne z symulatora (ref.)

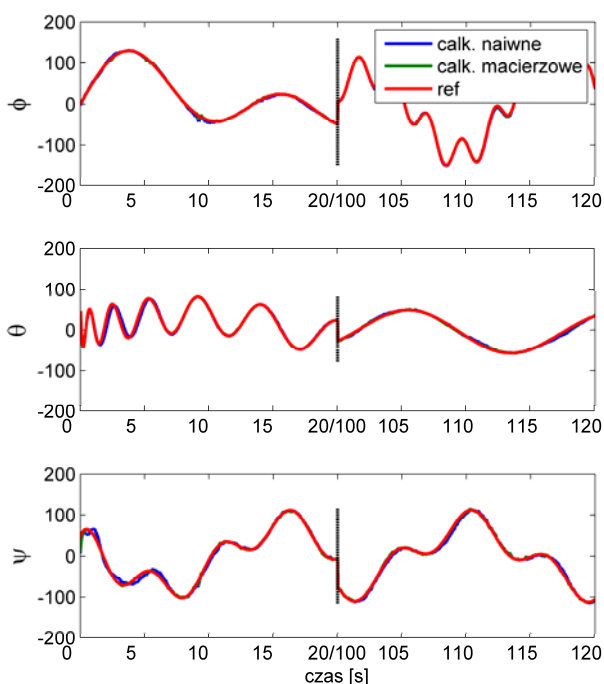


Rys. 4. Przebiegi czasowe estymowanych kątów dla całkowania naiwnego prędkości kątowej dla czterech wartości stałych czasowych T filtru komplementarnego

Tabela 1. Wartości średniego absolutnego błędu (MEA) dla estymacji kątów Eulera z wykorzystaniem różnych metod całkowania prędkości kątowej.

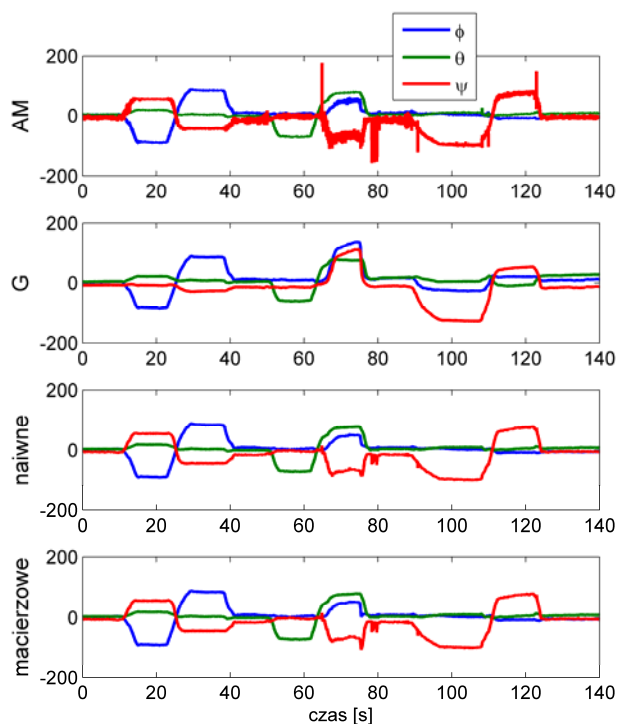
Metoda		R - MAE	P - MAE	Y - MAE
AM		3,1781	2,3067	5,7622
G		12,8030	8,8333	18,1268
Całkowanie nawne	T=1[s]	11,2566	15,7283	16,4908
	T=0,1[s]	1,5809	2,2173	2,7230
	T=0,01[s]	1,8473	1,3685	3,3481
	T=0,001[s]	2,9041	2,1073	5,2581
Całkowanie w ukl. nawig.	T=1[s]	4,9839	3,4766	4,7002
	T=0,1[s]	1,0452	0,7628	1,5168
	T=0,01[s]	1,8433	1,3447	3,3400
	T=0,001[s]	2,9041	2,1073	5,2585
Całkowanie macierzowe	T=1[s]	4,7655	3,3262	4,5254
	T=0,1[s]	1,0214	0,7493	1,4937
	T=0,01[s]	1,8430	1,3445	3,3394
	T=0,001[s]	2,9041	2,1072	5,2584

Proponowane rozwiązania filtru komplementarnego zastosowano także do odczytów z rzeczywistych czujników wbudowanych w IMU, co zostało zaprezentowane na rysunku 6. Prezentowane w pracy trzy metody wyznaczania kątów z żyroskopów prowadzą do podobnych wartości kątów $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\psi}$.



Rys. 5. Przebiegi czasowe kątów ϕ, θ, ψ dla całkowania naiwnego oraz macierzowego dla $T=0,1[s]$ w odniesieniu do kątów prawidłowych z symulatora

Podsumowując, wykorzystanie całkowania naiwnego dla filtru komplementarnego, które jest implementacyjnie najprostszą metodą oszacowania kątów z żyroskopów, prowadzi do zadawalających wyników wyznaczania orientacji w przestrzeni. Uzyskane wyniki nie ustępują jakościowo wynikom uzyskanym przy wykorzystaniu poprawniejszej teoretycznie metody macierzowego całkowania równania rotacji.



Rys. 6. Przebiegi czasowe estymowanych kątów z akcelerometrów, żyroskopów oraz z wykorzystaniem całkowania naiwnego oraz macierzowego dla stałej czasowej filtra $T=0,1[s]$ dla danych pomiarowych rzeczywistych z IMU

Podsumowanie

W pracy zaprezentowano klasyczny filtr komplementarny do estymacji orientacji czujnika IMU w przestrzeni trójwymiarowej. Opis orientacji w bazowym układzie odniesienia np. Ziemi bazuje na nieliniowych zależnościach opisujących rotacje wokół osi tego układu. Zastosowanie idei filtracji komplementarnej do oceny orientacji na podstawie pomiarów z żyroskopów oraz układu akcelerometrów i magnetometrów wymaga zatem wykorzystania nieliniowego opisu zjawiska oraz odpowiedniego aparatu matematycznego jak na przykład kwaternionów. Innym rozwiązaniem, rozważanym w niniejszej pracy jest odpowiednie przygotowanie sygnałów pomiarowych w celu wykorzystania klasycznego filtru komplementarnego w trzech niezależnych kanałach wyznaczających poszukiwane kąty Eulera.

W pracy zaprezentowano trzy sposoby wyznaczania kątów Eulera z trójosiowego żyroskopu. Powołując się na założenia podobne jak w systemach klasyfikacji bayesowskich, zaproponowano metodę naiwnego (niezależnego) całkowania prędkości kątowych wyznaczonych w układzie sensora. Metoda ta wydaje się być niepoprawna teoretycznie. Ponadto, pokazano prawidłowe metody całkowania: prędkości kątowych w układzie bazowym po wcześniejszym przeliczeniu tych prędkości do układu nawigacyjnego oraz macierzowego równania rotacji.

Z przeprowadzonych analiz, wyestymowane przebiegi czasowe kątów są bardzo zbliżone dla trzech prezentowanych metod całkowania. Najistotniejszy wpływ na jakość estymacji ma odpowiedni dobór stałej czasowej filtra. Wnioski wyciągnięto na podstawie analizy serii pomiarów syntetycznych, wygenerowanych z symulatora działania IMU oraz rzeczywistych danych pomiarowych uzyskanych z fizycznego czujnika IMU. Do analiz wykorzystano przebiegi czasowe zrealizowanych scenariuszy zmian orientacji oraz wartości wskaźnika MAE.

Publikacja powstała w ramach projektu:

Kostium do akwizycji ruchu człowieka oparty na sensorach IMU z oprogramowaniem gromadzenia, wizualizacji oraz analizy danych. Projekt dofinansowany w ramach I Programu Badań Stosowanych przez Narodowe Centrum Badań i Rozwoju. (projekt ID 178438 ścieżka A)

LITERATURA

- [1] Higgins W.T., jr., *A comparison of complementary and Kalman filtering*, IEEE Transactions On Aerospace And Electronic Systems Vol. AES-1 1, NO. 3 MAY 1975
- [2] Scapellato S., Cavallo F., Martelloni Ch., Sabatini A.M., *In-use calibration of body-mounted gyroscopes for applications in gait analysis*, Sensors and Actuators A: Physical, 123–124 (2005) 418–422
- [3] Mahony R., Hamel T., Pflimlin J.-M., *Nonlinear Complementary Filters on the Special Orthogonal Group*, IEEE Transactions On Automatic Control, VOL.53,NO.5, June 2008
- [4] Euston E., Coote P., Mahony R., Kim J., and Hamel T., *A complementary filter for attitude estimation of a fixed-wing uav*, 2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, France, Sept, 22-26, 2008.
- [5] Yoo T.S., Hong S.K., Yoon H.M. and Park S., *Gain-Scheduled Complementary Filter Design for a MEMS Based Attitude and Heading Reference System*, Sensors 2011, 11, 3816-3830
- [6] Theodoridis S., Koutroumbas K., *Pattern Recognition*, 3rd edition, Academic Press, Elsevier, (2006)
- [7] Koronacki J., Ćwik J., *Statystyczne systemy uczące się*, wydanie drugie, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, (2008)
- [8] Ayub S., Bahraminisab A., Honary B., *A sensor fusion method for smart phone orientation estimation*, The 13th Annual PostGraduate Symposium on The Convergence of Telecommunications, Networking and Broadcasting, 25th June 2012
- [9] Roetenberg D., *Inertial and Magnetic Sensing of Human Motion*, PhD Thesis, University of Twente, (2006)
- [10] Roetenberg D., Henk J. Luinge H.J., Chris T. M. Baten Ch.T.M., Veltink P.H., *Compensation of Magnetic Disturbances Improves Inertial and Magnetic Sensing of Human Body Segment Orientation*, IEEE Transactions On Neural Systems And Rehabilitation Engineering, 13, (2005), 3, 305-405
- [11] Luinge H.J., Veltink P.H., Baten C.T.M., *Ambulatory measurement of arm orientation*, Journal of Biomechanics 40 (2007) 78–85,
- [12] Wendel J., Meister O., Schlaile Ch., Trommer G.F., *An integrated GPS/MEMS-IMU navigation system for an autonomous helicopter*, Aerospace Science and Technology 10 (2006) 527–533
- [13] Hyo-Sung Ahn, Chang-Hee Won, *DGPS/IMU integration-based geolocation system: Airborne experimental test Results*, Aerospace Science and Technology 13 (2009) 316–324
- [14] Hang Guo, Min Yu, Chengwu Zou, Wenwen Huang, *Kalman filtering for GPS/magnetometer integrated navigation system*, Advances in Space Research 45 (2010) 1350–1357
- [15] K. King, S.W. Yoon, N.C. Perkins, K. Najafi, *Wireless MEMS inertial sensor system for golf swing dynamics*, Sensors and Actuators A 141 (2008) 619–630
- [16] E. Foxlin, *Inertial head-tracker sensor fusion by a complementary separate-bias kalman filter*, In Proc. Virtual Reality Annual International Symposium the IEEE 1996, str 185-194, 267, March 30 - April 3, 1996.
- [17] Yun X., Bachmann E.R., *Design, Implementation, and Experimental Results of a Quaternion-Based Kalman Filter for Human Body Motion Tracking*, IEEE Transactions on Robotics, vol.22, no.6, pp.1216-1227, (2006)
- [18] Sabatini A.M., *Quaternion-Based Extended Kalman Filter for Determining Orientation by Inertial and Magnetic Sensing*, IEEE Tran. Biomedical Eng., VOL. 53, NO. 7, 2006, 1346-1356.
- [19] Bieda R., Grygiel R., *Wyznaczanie orientacji obiektu w przestrzeni z wykorzystaniem naiwnego filtru Kalmana*, Przegląd Elektrotechniczny, ISSN 0033-2097, R. 90 NR 1, (2014), str. 34-41
- [20] Titterton D.H., Weston J.L., *Strapdown Inertial Navigation Technology - 2nd Ed.*, The Institution of Electrical Engineers, (2004)
- [21] Pusa J., *Strapdown inertial navigation system aiding with nonholonomic constraints using indirect Kalman filtering*, MSc Thesis, Tampere University of Technology, (2009)
- [22] Grewal M.S., Weill L.R., Andrews A.P., *Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration*, John Wiley & Sons, (2001)
- [23] J.S. Medith, *Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych*, WNT, Warszawa 1975.
- [24] Fux S., *Development of a planar low cost Inertial Measurement Unit for UAVs and MAVs*, MSc Thesis, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, (2008)
- [25] Bieda R., *Wyznaczanie orientacji IMU w przestrzeni 3D z wykorzystaniem macierzy tensora rotacji oraz niestacjonarnego filtru Kalmana*, Przegląd Elektrotechniczny, ISSN 0033-2097, R. 89 NR 12, (2013), str. 68-78
- [26] LaValle S.M., *Planning algorithms*, Cambridge University Press, (2006)
- [27] Pedley M., *Tilt Sensing Using a Three-Axis Accelerometer*, Freescale Semiconductor Application Note, (2013), n.AN3461, rev.5
- [28] Gućma M., Montewka J., *Podstawy morskiej nawigacji inercyjnej*, Akademia Morska w Szczecinie, Szczecin (2006)
- [29] Ozyagcilar T., *Implementing a Tilt-Compensated eCompass using Accelerometer and Magnetometer Sensors*, Freescale Semiconductor Application Note, (2012), n.AN4248, rev.3
- [30] Kim K., Park C.G., *A New Initial Alignment Algorithm for Strapdown Inertial Navigation System Using Sensor Output*, Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control (IFAC), (2008), 13034-13039
- [31] Kim J., *Autonomous Navigation for Airborne Applications*, PhD Thesis, Department of Aerospace, Mechanical and Mechatronic Engineering, The University of Sydney, (2004)
- [32] Bachmann E.R., *Inertial And Magnetic Angle Tracking Of Limb Segments For Inserting Humans Into Synthetic Environments*, PhD Thesis, Naval Postgraduate School Monterey, California, (2000)
- [33] Quoc Phuong N.H., Kang H.-J., Suh Y.S., Ro Y.-S., *A DCM Based Orientation Estimation Algorithm with an Inertial Measurement Unit and a Magnetic Compass*, Journal of Universal Computer Science, vol. 15, no. 4 (2009), 859-876
- [34] Sadłowski P., *Parametryzacja rotacji i algorytmy rozwiązywania równań dynamiki z rotacyjnymi stopniami swobody*, Praca doktorska, Polska Akademia Nauk, (2007)
- [35] Woodman O.J., *An introduction to inertial navigation*, Technical Report 696, University of Cambridge, (2007)

Autorzy: dr inż. Rafał Grygiel, dr inż. Robert Bieda, Instytut Automatyki, Politechnika Śląska w Gliwicach ul. Akademicka 2A, 44-100 Gliwice, Polska, email: robert.bieda@polsl.pl, rafal.grygiel@polsl.pl.