Konrad HAWRON

Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki Przemysłowej i Informatyki Technicznej

Rachunek operatorowy dla sygnałów impulsowych i okresowych w dziedzinie czasu

Streszczenie. *W artykule przedstawiono podstawy matematyczne rachunku operatorowego w przestrzeniach L^1-impulsów oraz sygnałów okresowych P_T. Umożliwiają one identyfikację zjawisk energetycznych w obwodach elektrycznych bezpośrednio w dziedzinie czasu. Przedstawiono również metodę wyznaczania składowych prądu w dziedzinie czasu za pomocą splotów cyklicznych dla odbiornika energii opisanego operatorem admitancji.*

Abstract*. In the article the mathematical theory of the operational calculus of the L^1-impulses and periodical signals P_T is presented. This allows to identify energy phenomena in electrical circuits in the time domain. It also presents the method of determining the current components in the time domain using a circular convolution for energy receiver described by the admittance operator.* (***Operational calculus for pulse and periodic signals in the time domain***)

Słowa kluczowe: metoda operatorowa impulsów, impulsy, składowe prądu, odbiornik admitancyjny.
Keywords: impulses operational method, impulses, current components, admittance receiver.

doi:10.12915/pe.2014.09.53

Wprowadzenie

Dziedzina częstotliwości dotąd jako jedyna służyła do opisu właściwości energetycznych obwodów elektrycznych. Jednak w [3] udowodniono, że w dziedzinie czasu równie dobrze, a czasem nawet lepiej, niż w dziedzinie częstotliwości, można opisywać zachodzące w obwodach elektrycznych zjawiska energetyczne.

Niniejszy artykuł wprowadza ujednolicony, uniwersalny operator, tzw. „czwórkę elementarną”, w opisie rozkładu operatora immitancyjnego bezpośrednio w dziedzinie czasu. Jest to możliwe dzięki rozdzieleniu operatora immitancyjnego, opisanego funkcją wymierną o rzeczywistych współczynnikach, na składowe: przyczynową i antyprzyczynową. Przedstawiono również metodę wyznaczania składowych prądu w dziedzinie czasu za pomocą splotów cyklicznych. Zawarte w artykule podstawy matematyczne mogą znaleźć zastosowanie w teorii mocy sygnałów okresowych bezpośrednio w dziedzinie czasowej.

Rachunek operatorowy w przestrzeniach sygnałów L^1, P_T

Przestrzeń L^1 jest utworzona z sygnałów absolutnie sumowalnych, tzw. L^1-impulsów, definiowanych jako:

$$L^1 = \left\{ x(t) : \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty \right\}.$$

Przestrzeń L^1 indukuje przestrzeń P_T sygnałów T-okresowych poprzez periodyczne powielenie L^1-impulsów:

$$P_T = \left\{ \tilde{x}(t) : \tilde{x}(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(t+pT), x(t) \in L^1, p \in I \right\}$$

gdzie: I – zbiór liczb całkowitych.

Wprowadza się dwa elementarne układy liniowe opisane transmitancjami:

$$\text{(1)} \quad \frac{1}{\sigma + s}, \qquad \text{(2)} \quad \frac{1}{\sigma - s},$$

gdzie $Re\{\sigma\}>0$, którym odpowiadają dwa wzajemnie sprzężone równania różniczkowe:

$$\sigma h(t) + \frac{dh(t)}{dt} = \delta(t), \tag{3}$$

$$\sigma h(t) - \frac{dh(t)}{dt} = \delta(t). \tag{4}$$

Jedyne rozwiązania równań (3), (4) w przestrzeni L^1 mają postać funkcji wykładniczych, przyczynowej i antyprzyczynowej:

$$\text{(5)} \quad h(t) = e^{-\sigma t} 1(t), \qquad \text{(6)} \quad h(t) = e^{\sigma t} 1(-t),$$

gdzie $1(t)=0$ dla $t<0$ i $1(t)=1$ dla $t\geq 0$; $1(-t)=0$ dla $t>0$ i $1(-t)=1$ dla $t\leq 0$.

W przestrzeni sygnałów okresowych P_T rozwiązanie równań różniczkowych (3), (4) otrzymuje się poprzez T-periodyczne powielenie rozwiązań (5), (6):

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-\sigma(t+pT)} 1(t+pT) = \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\sigma(t+pT)} = \\ &= e^{-\sigma t} \sum_{p=0}^{\infty} \left(e^{-\sigma T}\right)^p \end{aligned} \tag{7}$$

dla $t \in [0, T)$,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{\sigma(t+pT)} 1(-t-pT) = \sum_{p=1}^{\infty} e^{\sigma(t-pT)} = \\ &= e^{\sigma t} \sum_{p=1}^{\infty} \left(e^{-\sigma T}\right)^p \end{aligned} \tag{8}$$

dla $t \in [0, T)$.

Ponieważ szeregi geometryczne (7), (8) są zbieżne, można wyznaczyć ich sumy:

$$\tilde{h}(t) = \frac{e^{-\sigma t}}{1-e^{-\sigma T}}, \tag{9}$$

$$\tilde{h}(t) = e^{\sigma t} \frac{e^{-\sigma T}}{1-e^{-\sigma T}} = \frac{e^{-\sigma(T-t)}}{1-e^{-\sigma T}}. \tag{10}$$

Rozwiązania (9) i (10) stanowią odpowiedzi impulsowe układów (1) i (2) w przestrzeni sygnałów okresowych P_T. Przekształcając wyrażenie (9)

$$\tilde{h}(t) = \frac{e^{-\sigma t}}{1-e^{-\sigma T}} = \frac{e^{-\sigma T\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\sigma \frac{T}{2}\right)}$$

oraz wyrażenie (10)

$$\tilde{h}(t) = \frac{e^{-\sigma(T-t)}}{1-e^{-\sigma T}} = \frac{e^{\sigma T\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\sigma \frac{T}{2}\right)}$$

otrzymuje się odpowiedzi układów dla czasu względnego $\frac{t}{T} \in [0,1)$:

(11) $$\tilde{h}(t) = \frac{1}{2} \frac{e^{-\sigma T\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)}}{sh\left(\sigma \frac{T}{2}\right)}$$

(12) $$\tilde{h}(t) = \frac{1}{2} \frac{e^{\sigma T\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)}}{sh\left(\sigma \frac{T}{2}\right)}$$

Czwórki elementarne

Z punktu widzenia teorii dynamiki układów ważne są funkcje wymierne zmiennej zespolonej o rzeczywistych współczynnikach i biegunach leżących w lewej półpłaszczyźnie. Jednak operatory układów, które biorą udział w teorii mocy opisane są funkcjami wymiernymi, wprawdzie o rzeczywistych współczynnikach, ale z biegunami leżącymi po obu stronach płaszczyzny Gaussa. W rozdziale wcześniejszym dotyczącym rachunku operatorowego pokazano, że takie funkcje wymierne można rozdzielić na składowe przyczynowe odpowiadające biegunom z lewej półpłaszczyzny i składowe antyprzyczynowe odpowiadające biegunom z prawej półpłaszczyzny. Jednak obie składowe są elementami przestrzeni L^1. Wynika stąd, że dowolną transmitancję można przedstawić jako kombinację tzw. „czwórek elementarnych”, tj. funkcji wymiernych postaci:

(13)
$$Q_{\alpha,\beta;a,b}(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\alpha+s} + \frac{a^*}{\alpha^*+s}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{\;} + \frac{b^*}{\;}\right)$$

gdzie: α, β – bieguny układów elementarnych (1), (2), a, b – współczynniki residualne.

Warunek $Re\{\alpha\}>0$ oraz $Re\{\beta\}>0$ musi być spełniony, aby odpowiedź układu opisanego jedną lub więcej czwórek elementarnych była L^1-impulsem. Dodatkowo wprowadzono warunek $Im\{\alpha\}>0$ oraz $Im\{\beta\}>0$ w celu przyjęcia pierwszego kwadrantu płaszczyzny Gaussa jako odniesienia.

Odpowiedź impulsowa czwórki elementarnej w przestrzeni L^1 ma postać:

(14) $$\begin{aligned}\tilde{q}(t) &= \frac{1}{2}\left(a \cdot e^{-\alpha t} 1(t) + a^* \cdot e^{-\alpha^* t} 1(t)\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(b \cdot e^{\beta t} 1(-t) + b^* \cdot e^{\beta^* t} 1(-t)\right)\end{aligned}$$

natomiast w przestrzeni sygnałów okresowych P_T:

(15) $$\begin{aligned}\tilde{q}(t) &= \frac{1}{2}\left(a \frac{e^{-\alpha t}}{1-e^{-\alpha T}} + a^* \frac{e^{-\alpha^* t}}{1-e^{-\alpha^* T}}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(b \frac{e^{-\beta(T-t)}}{1-e^{-\beta T}} + b^* \frac{e^{-\beta^*(T-t)}}{1-e^{-\beta^* T}}\right) = . \\ &= \mathrm{Re}\left(a \frac{e^{-\alpha t}}{1-e^{-\alpha T}} + b \frac{e^{-\beta(T-t)}}{1-e^{-\beta T}}\right)\end{aligned}$$

Realizując część rzeczywistą wyrażenia (15) otrzymuje się:

(16)
$$\begin{aligned}\tilde{q}(t) = |a| e^{-\mathrm{Re}\{\alpha t\}} \frac{\cos\left(\mathrm{Im}\{\alpha t\} - \sphericalangle a\right) - e^{-\mathrm{Re}\{\alpha T\}} \cos\left(\mathrm{Im}\{\alpha(T-t)\} - \sphericalangle a\right)}{1 - 2e^{-\mathrm{Re}\{\alpha T\}} \cos\left(\mathrm{Im}\{\alpha T\}\right) + e^{-2\mathrm{Re}\{\alpha T\}}} + \\ + |b| e^{-\mathrm{Re}\{\beta(T-t)\}} \frac{\cos\left(\mathrm{Im}\{\beta(T-t)\} - \sphericalangle b\right) - e^{-\mathrm{Re}\{\beta T\}} \cos\left(\mathrm{Im}\{\beta t\} - \sphericalangle b\right)}{1 - 2e^{-\mathrm{Re}\{\beta T\}} \cos\left(\mathrm{Im}\{\beta T\}\right) + e^{-2\mathrm{Re}\{\beta T\}}}\end{aligned}.$$

Przekształcając wyrażenie (15) do postaci zawierającej czas względny $\frac{t}{T} \in [0,1)$

(17) $$\begin{aligned}\tilde{q}\left(\frac{t}{T}\right) &= \frac{1}{2}\left(\begin{aligned}& a \frac{e^{-\alpha T\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\alpha \frac{T}{2}\right)} + b \frac{e^{\beta T\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\beta \frac{T}{2}\right)} + \\ &+ a^* \frac{e^{-\alpha^* T\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\alpha^* \frac{T}{2}\right)} + b^* \frac{e^{\beta^* T\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\beta^* \frac{T}{2}\right)}\end{aligned}\right) = . \\ &= \mathrm{Re}\left(a \frac{e^{-\alpha T\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\alpha \frac{T}{2}\right)} + b \frac{e^{\beta T\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\beta \frac{T}{2}\right)}\right)\end{aligned}$$

Aby uczynić wyrażenie (17) bardziej użytecznym trzeba wyeliminować występujące w nim zespolone parametry *α, β; a, b*:

$$\begin{aligned}\tilde{q}\left(\frac{t}{T}\right) = |a| e^{-\mathrm{Re}\left\{aT\frac{t}{T}\right\}} \frac{\cos\left(\mathrm{Im}\left\{\alpha T \frac{t}{T}\right\} - \sphericalangle a\right) - e^{-\mathrm{Re}\{\alpha T\}} \cos\left(\mathrm{Im}\left\{\alpha T\left(1-\frac{t}{T}\right)\right\} - \sphericalangle a\right)}{1 - 2e^{-\mathrm{Re}\{\alpha T\}} \cos\left(\mathrm{Im}\{\alpha T\}\right) + e^{-2\mathrm{Re}\{\alpha T\}}} + \\ + |b| e^{-\mathrm{Re}\left\{\beta T\left(1-\frac{t}{T}\right)\right\}} \frac{\cos\left(\mathrm{Im}\left\{\beta T\left(1-\frac{t}{T}\right)\right\} - \sphericalangle b\right) - e^{-\mathrm{Re}\{\beta T\}} \cos\left(\mathrm{Im}\left\{\beta T \frac{t}{T}\right\} - \sphericalangle b\right)}{1 - 2e^{-\mathrm{Re}\{\beta T\}} \cos\left(\mathrm{Im}\{\beta T\}\right) + e^{-2\mathrm{Re}\{\beta T\}}}\end{aligned}$$

(18)

Przypadki szczególne

Operatory teorii mocy są jednak przypadkami szczególnymi złożonymi z czwórek hermitowskich:

(19) $Q(s) = Q(-s)$,

albo antyhermitowskich:

(20) $Q(s) = -Q(-s)$.

W ten sposób czasowe oryginały operatorów w P_T przyjmują postać:

(21) $$\tilde{q}\left(\frac{t}{T}\right) = \mathrm{Re}\left(a \frac{ch\left[\alpha T\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)\right]}{sh\left(\alpha \frac{T}{2}\right)}\right),$$

(22) $$\tilde{q}\left(\frac{t}{T}\right) = -\mathrm{Re}\left(a\frac{sh\left[\alpha T\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)\right]}{sh\left(\alpha\frac{T}{2}\right)}\right),$$

ponieważ wówczas $\alpha=\beta$ i $a=b$ dla czwórki hermitowskiej oraz $\alpha=\beta$ i $a=-b$ dla czwórki antyhermitowskiej.

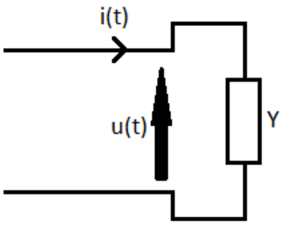
W sytuacji gdy bieguny α i β oraz współczynniki residualne a i b są rzeczywiste wyrażenia (21), (22) przyjmują postać:

(23) $$\tilde{q}\left(\frac{t}{T}\right) = a\frac{ch\left[\alpha T\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)\right]}{sh\left(\alpha\frac{T}{2}\right)},$$

(24) $$\tilde{q}\left(\frac{t}{T}\right) = -a\frac{sh\left[\alpha T\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)\right]}{sh\left(\alpha\frac{T}{2}\right)}.$$

Zastosowanie do teorii przesyłu energii

Rozpatrzono przypadek, w którym odbiornik energii elektrycznej opisany jest operatorem admitancyjnym (rys. 1):



Rys.1. Fragment obwodu zawierający odbiornik admitancyjny

(25) $i = Yu$.

Energia przesyłana do odbiornika

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)i(t)dt$$

bądź moc czynna w przypadku sygnałów okresowych

$$P = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} u(t)i(t)dt$$

jest wyrażona iloczynem skalarnym sygnału napięciowego i prądowego (u,i).

Wprowadzając pojęcie operatora sprzężonego H^* do operatora H, tj. takiego, że dla dwóch sygnałów x, y:

$$(Hx, y) = (x, H^* y)$$

zależność (25) można wyrazić jako:

$$(u,i) = (Yu,u) = (Y^*u,u) = \frac{1}{2}\left[(Yu,u)+(Y^*u,u)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}(Yu+Y^*u,u) = \left(\frac{1}{2}(Y+Y^*)u, u\right) = (Gu,u)$$

gdzie: $G = \frac{1}{2}(Y+Y^*)$.

Zatem przedstawienie iloczynu skalarnego (u,i) w postaci formy kwadratowej napięcia z operatorem admitancyjnym jest następująca:

$$(Yu,u) = (Gu,u).$$

Z drugiej strony operator admitancji ma jednoznaczny rozkład:

(26) $$Y = \frac{1}{2}(Y+Y^*) + \frac{1}{2}(Y-Y^*) = G + B$$

gdzie: $G=G^*$ – operator hermitowski, $B=-B^*$ – operator antyhermitowski;

albo:

$$Y(s) = \frac{1}{2}\left[Y(s)+Y(-s)\right] + \frac{1}{2}\left[Y(s)-Y(-s))\right] = G(s) + B(s)$$

gdzie: $G(s)=G(-s)$, $B(s)=-B(-s)$.

Jednocześnie rozkład (26) jest równoważny rozkładowi prądu i na dwie składowe, tzw. czynną i_G i bierną i_B:

$$i = (G+B)u = Gu + Bu = i_G + i_B$$

wzajemnie ortogonalne, bo

$$\left(i_G, i_B\right) = \left(Gu, Bu\right) = \left(GBu, u\right) = -\left(GBu, u\right) = 0 .$$

Zatem kwadrat normy prądu wynosi:

$$\|i\|^2 = \left(i_G + i_B, i_G + i_B\right) = \|i_G\|^2 + \|i_B\|^2 ,$$

z czego wynika, że

$$\|i\| \geq \|i_G\| .$$

Iloczyn skalarny napięcia i składowej biernej prądu wynosi:

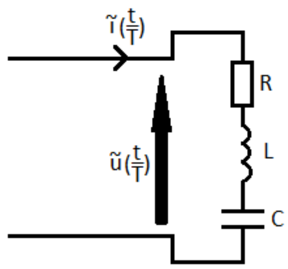
$$\left(u, i_B\right) = \left(Bu, u\right) = -\left(Bu, u\right) = 0 ,$$

stąd korzystne byłoby skompensowanie prądu i_B.

Zatem prąd i_B nie przenosząc energii do odbiornika powoduje szkodliwe powiększanie normy prądu całkowitego i.

Przykład zastosowania do wyznaczania składowych prądu

Na rysunku 2 przedstawiono przykład odbiornika RLC przy szeregowym połączeniu elementów.



Rys.2. Fragment obwodu z odbiornikiem RLC

Operator admitancji

$$Y(s) = \frac{1}{\frac{1}{sC} + R + sL}$$

można wyrazić poprzez

$$Y(s) = \frac{1}{L}\frac{s}{\omega_0^2 + 2\alpha s + s^2}$$

gdzie: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\alpha = \frac{R}{2L}$.

W zależności od znaku wyróżnika admitancji:

$$\Delta = 4\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)$$

bieguny operatora admitancji są rzeczywiste lub zespolone. W przypadku biegunów rzeczywistych wynoszą one:

$$s_1 = -\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right) = -a_1 ,$$

$$s_2 = -\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right) = -a_2 ,$$

gdzie: $a_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, $a_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$.

Natomiast w przypadku biegunów zespolonych:

$$s_1 = -\left(\alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\right) = -a_1 ,$$

$$s_1 = -\left(\alpha - j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\right) = -a_2 ,$$

gdzie: $a_1 = \alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, $a_2 = \alpha - j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, $a_1=a_2$*.

Zatem operator admitancji można przedstawić w postaci:

$$Y(s) = 2\left(\frac{b_1}{a_1 + s} + \frac{b_2}{a_2 + s}\right),$$

gdzie: $b_1 = \frac{1}{2L}\frac{a_1}{a_1 - a_2}$, $b_2 = \frac{1}{2L}\frac{a_2}{a_2 - a_1}$, $b_1 = b_2*$.

Wyodrębniając operatory G i B

$$Y(s) = \frac{1}{2}\left[Y(s) + Y(-s)\right] + \frac{1}{2}\left[Y(s) - Y(-s)\right] = G(s) + B(s)$$

otrzymuje się:

$$G(s) = b_1\left(\frac{1}{a_1 + s} + \frac{1}{a_1 - s}\right) + b_2\left(\frac{1}{a_2 + s} + \frac{1}{a_2 - s}\right),$$

$$B(s) = b_1\left(\frac{1}{a_1 + s} - \frac{1}{a_1 - s}\right) + b_2\left(\frac{1}{a_2 + s} - \frac{1}{a_2 - s}\right).$$

Cykliczne odpowiedzi impulsowe w czasie względnym w przypadku występowania biegunów rzeczywistych dla $\frac{t}{T} \in [0,1)$ wynoszą:

$$\tilde{g}\left(\frac{t}{T}\right) = b_1 \frac{ch\left[a_1 T\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\right]}{sh\left(a_1 \frac{T}{2}\right)} + b_2 \frac{ch\left[a_2 T\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\right]}{sh\left(a_2 \frac{T}{2}\right)},$$

$$\tilde{b}\left(\frac{t}{T}\right) = -\left(b_1 \frac{sh\left[a_1 T\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\right]}{sh\left(a_1 \frac{T}{2}\right)} + b_2 \frac{sh\left[a_2 T\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\right]}{sh\left(a_2 \frac{T}{2}\right)}\right),$$

natomiast w przypadku biegunów zespolonych:

$$\tilde{g}\left(\frac{t}{T}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(b_1 \frac{ch\left[a_1 T\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\right]}{sh\left(a_1 \frac{T}{2}\right)}\right),$$

$$\tilde{b}\left(\frac{t}{T}\right) = -2\,\mathrm{Re}\left(b_1 \frac{sh\left[a_1 T\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\right]}{sh\left(a_1 \frac{T}{2}\right)}\right).$$

Składowe i_G oraz i_B prądu są zatem splotami cyklicznymi

$$\tilde{i}_G\left(\frac{t}{T}\right) = \left[G\tilde{u}\right]\left(\frac{t}{T}\right) = \left(\tilde{g} \circledast \tilde{u}\right)\left(\frac{t}{T}\right),$$

$$\tilde{i}_B\left(\frac{t}{T}\right) = \left[B\tilde{u}\right]\left(\frac{t}{T}\right) = \left(\tilde{b} \circledast \tilde{u}\right)\left(\frac{t}{T}\right),$$

które wynoszą:

$$\tilde{i}_G\left(\frac{t}{T}\right) = \int_0^{\frac{t}{T}} \tilde{g}\left(\frac{t}{T} - \frac{\tau}{T}\right)\tilde{u}\left(\frac{\tau}{T}\right)d\left(\frac{\tau}{T}\right) + \int_{\frac{t}{T}}^{1} \tilde{g}\left(\frac{t}{T} - \frac{\tau}{T} + 1\right)\tilde{u}\left(\frac{\tau}{T}\right)d\left(\frac{\tau}{T}\right),$$

$$\tilde{i}_B\left(\frac{t}{T}\right) = \int_0^{\frac{t}{T}} \tilde{b}\left(\frac{t}{T} - \frac{\tau}{T}\right)\tilde{u}\left(\frac{\tau}{T}\right)d\left(\frac{\tau}{T}\right) + \int_{\frac{t}{T}}^{1} \tilde{b}\left(\frac{t}{T} - \frac{\tau}{T} + 1\right)\tilde{u}\left(\frac{\tau}{T}\right)d\left(\frac{\tau}{T}\right).$$

Podsumowanie

Przedstawiony w artykule rachunek operatorowy znajduje szerokie zastosowanie w energetycznej teorii mocy. Wiele układów elektrycznych, opisanych funkcjami wymiernymi o rzeczywistych współczynnikach, które poddaje się zadaniom optymalizacyjnym można przedstawić w postaci szczególnych przypadków opisanych „czwórek elementarnych”, tj. czwórek hermitowskich lub antyhermitowskich.

LITERATURA

[1] Siwczyński M., Jaraczewski M.: The L1-impulse method as an alternative to the Fourier series In the Power theory of continuous time systems, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, 57 (2009), n.1, 79-85

[2] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu – podstawy matematyczne, metoda operatorowa, *Przegląd Elektrotech.* 87 (2011), nr 4, 134-141

[3] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu – obwody jednofazowe, *Przegląd Elektrotechniczny*, 86 (2010), nr 6, 196-201

[4] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny, prąd niesymetrii w dziedzinie czasu – obwody trójfazowe, *Przegl. Elektrotechniczny*, 86 (2010), nr 8, 210-213

[5] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu dyskretnego, *Przegląd Elektrotechniczny*, 86 (2010), nr 7, 338-341

[6] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu – podstawy matematyczne, metoda splotowa, *Przegląd Elektrotechniczny*, 87 (2011), nr 3, 254-257

[7] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Rozkład admitancji odbiornika na składową czynną i bierną w dziedzinie czasu, *Wiadomości Elektrotechniczne*, 79 (2011), nr 10, 36-39

[8] Czarnecki L.S.: Uwagi do artykułu „Możliwość przedstawienia jednolitej, nowej koncepcji mocy biernej prądu niesinusoidalnego w dziedzinie czasu”, *Przegląd Elektrotechniczny*, 85 (2009), nr 6, 164-166

[9] Czarnecki L.S.: Moce w obwodach elektrycznych z niesinusoidalnymi przebiegami napięć i prądów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005

[10] Czarnecki L.S., Ieee F.: Składowe fizyczne prądu i moce w obwodach z impulsowym przepływem energii, *Przegląd Elektrotechniczny*, 80 (2004), nr 6, 560-568

[11] Walczak J., Pasko M.: Minimalizacja strat mocy czynnej i symetryzacja przepływu mocy w układach z przebiegami niesinusoidalnymi. *Jakość i Użytkowanie Energii Elektrycznej*, 5 (1999), nr 1, 55-59

[12] Pasko M.: Opis właściwości energetycznych, energetyczno jakościowych obwodów elektrycznych przebiegami niesinusoidalnymi okresowymi. *Przegląd Elektrotechniczny*, 78 (2002), nr 5s, 23-40

[13] Pasko M., Maciążek M.: Zjawiska energetyczne w obwodach elektrycznych i ich interpretacja. *Wiadomości Elektrotechniczne*, 2005, nr 4, 18-25

[14] Pasko M.: Wybrane metody poprawy współczynnika mocy źródła w układach jednofazowych i wielofazowych z przebiegami okresowymi odkształconymi. *Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej. Elektryka*, 35 (2000), 116-129

***Autorzy**: mgr inż. Konrad Hawron, Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki Przemysłowej i Informatyki Technicznej, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, E-mail: konhawpk@gmail.com.*