

## Niepewność korekcji oddziaływań systematycznych oraz dryftów czasowych

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono analizę niepewności podstawowych metod korekcji oddziaływań systematycznych oraz dryftów czasowych występujących w torach pomiarowych. Przeanalizowano metody korekcji oddziaływań addytywnych i multiplikatywnych oraz dryftów bazujących na dodatkowych pomiarach wielkości referencyjnych oraz odwróconej wartości wielkości mierzonej. Wykazano, że podstawowymi przyczynami ograniczenia skuteczności korekcji są: ograniczona rozdzielczość przetwornika analogowo-cyfrowego, niestabilność wyników pomiaru, nieliniowość funkcji przetwarzania toru pomiarowego oraz niedoskonałość układów przełączających. Wykazano również, że składowe przemienne zewnętrzne i wewnętrzne w różny sposób wpływają na niepewność skorygowanego wyniku. Przedstawiono wzory na szacowanie standardowej niepewności skorygowanych wyników w funkcji niepewności wielkości referencyjnych, wartości cyfry najmniej znaczącej miernika oraz składowych okresowych i szumowych. Zaproponowano zaawansowaną korekcję łącznie dryftu oraz oddziaływań addytywnego i multiplikatywnego. Na przykładzie liczbowym wykazano skutki wpływu rozdzielczości miernika oraz składowych zmiennych na niepewność skorygowanego wyniku.

**Abstract.** The paper presents results of analysis of the influences of quantization in analog-to-digital converter, random and regular noises onto uncertainty of correction systematic effects and drift occurring in measuring channel. The standard and advanced methods of correction of additive and multiplicative influences and drifts based on additional measurements of reference values and reversed of the measured and reference values are analyzed in paper. It has been shown that the main constraints in efficiency of correction are: limited resolution of the ADC, instability of measurement observations, non-linearity of the function of measuring channel and also not ideal parameters of switching system. It has been shown that external and internal noises and periodic components in different ways affected onto uncertainty of the corrected result. The formulas for the evaluation of the standard uncertainty of the corrected results as a function of the last significant digit and parameters of noises and periodic components are presented. Advanced method of combine correction of drift and additive and multiplicative systematic influences is proposed and analyzed. Numerical example of the analysis of impact of the resolution and the variable components in measurement results onto uncertainty of the corrected result is added. (**Uncertainty of correction systematic effects and time drifts**).

**Słowa kluczowe:** oddziaływania systematyczne, regularne i losowe, dryfty czasowe, korekcja, niepewność.

**Keywords:** systematic, regular and random influences, drifts, correction, uncertainty.

### Wstęp

W każdym torze pomiarowym, w którym realizuje się ciąg przetwarzań wielkości mierzonej  $x$ , występują różnego rodzaju oddziaływania niekorzystne, które w różny sposób zniekształcają wynik pomiaru [1] - [3]. Niektóre oddziaływania bezpośrednio związane są z niestabilnością parametrów elementów samego toru pomiarowego a inne przychodzą razem z sygnałem wejściowym. Na ogół oddziaływania związane z torem pomiarowym można przedstawić w postaci sumy kilku składników, z których najważniejsze są następujące:

- systematyczne, stałe w czasie:  $\zeta_s(x) = \Delta_0 + \delta_m \cdot x + \lambda_{nl}(x)$ , gdzie  $\Delta_0$  jest oddziaływaniem addytywnym (niezależnym od wartości mierzonej  $x$ ),  $\delta_m \cdot x$  - jest oddziaływaniem multiplikatywnym (liniowo zależnym od wartości mierzonej  $x$ );  $\lambda_{nl}(x)$  - jest oddziaływaniem nieliniowo zależnym od wartości mierzonej  $x$ ;

- wolnozmiennie dryfty czasowe  $d_i(t)$ , zmieniające się w czasie w przybliżeniu liniowo:  $d_i(t) = s_i \cdot (t - t_0)$  (gdzie  $s_i$  jest szybkością zmiany wskazania miernika po upływie czasu  $t$  od momentu początkowego  $t_0$ ) lub zmieniające się w czasie nieliniowo;

- zmienne w czasie zakłócenia wewnętrzne regularne (quasi okresowe)  $\zeta_{T,int}(t)$  o częstotliwości  $f_{int}$  i amplitudzie  $X_{m,int}$  oraz szumy losowe wewnętrzne  $\eta_{int}(t)$ , które zwykle charakteryzują się gęstością widmową  $N_{int}(f)$ .

Oprócz oddziaływań bezpośrednio związanych z elementami toru pomiarowego, razem z sygnałem wejściowym przychodzą też zmienne zakłócenia zewnętrzne regularne (okresowe)  $\zeta_{T,ext}(t)$  o częstotliwości  $f_{ext}$  i amplitudzie  $X_{m,ext}$  (na przykład zakłócenia sieciowe) oraz szumy losowe zewnętrzne  $\eta_{ext}(t)$  o gęstości  $N_{ext}(f)$ .

W ogólnym przypadku model oddziaływań może być przedstawiony w postaci sumy składowych:

$$(1) \quad \varepsilon(t) = \zeta_s(x) + d_i(t) + \zeta_{T,int}(t) + \eta_{int}(t) + \zeta_{T,ext}(t) + \eta_{ext}(t).$$

W celu zwiększenia dokładności wyniku pomiaru oddziaływania systematyczne i dryfty należy skorygować a szumy i zakłócenia regularne należy stłumić. W przewodniku [1] odnośnie korekcji oddziaływań systematycznych specjalnie zaznaczono: "Zakłada się, że wynik pomiaru został skorygowany dla wszystkich rozpoznanych istotnych oddziaływań systematycznych i dłożono wszelkich starań, aby takie oddziaływania rozpoznać". Głównym problemem, związanym z oddziaływaniami systematycznymi, jest to, że podczas pomiaru takie oddziaływania mogą być nierozpoznane, ponieważ nie powodują one zauważalnych zmian na odczytach przyrządów pomiarowych.

Wybór metody korekcji zależy od tego, jakie składniki w (1) najbardziej istotne. Jednakże należy zauważyć, że w praktyce często brakuje gruntownej znajomości parametrów składników w (1) a ich wartości należy obliczać z tych samych wyników pomiarów lub należy przeprowadzić dodatkowe badania w celu ustalenia ich parametrów. Procedury te nie mogą być realizowane absolutnie dokładnie i dlatego korekcja oddziaływań systematycznych nigdy nie jest idealna. Innymi słowy, skuteczność korekcji jest zawsze ograniczona. W przewodniku [1] tę sytuację przedstawiono następująco: "Wynik pomiaru po korekcji rozpoznanych oddziaływań systematycznych pozostaje wciąż tylko estymatą wartości wielkości mierzonej, z powodu niepewności wynikającej z oddziaływań przypadkowych i z niedoskonałej korekcji oddziaływań systematycznych".

W [2] zbadano przyczyny ograniczenia skuteczności korekcji oddziaływań systematycznych i wymieniono większość przyczyn o charakterze nielosowym: (i) niejednoznaczność menzurandu; (ii) niepełna lista wielkości wpływających; (iii) niedoskonała znajomość wartości wielkości wejściowych.

### Składowe niepewności skorygowanego wyniku

W ogólnym przypadku przy niezależnych czynnikach wpływających w modelu (1) niepewność skorygowanego wyniku może być opisana wzorem:

$$(2) \quad u^2(x_{cor}) = c_{ref}^2 u^2(X_{ref}) + c_q^2 u^2(q) + c_s^2 u^2(\zeta_s) + c_{nl}^2 u^2(\lambda_{x,nl}) + c_{sw}^2 u^2(p_{sw}) + c_d^2 u^2(d_t) + c_{\xi_{T,int}}^2 u^2(\xi_{T,int}) + c_{\eta,int}^2 u^2(\eta_{int}) + c_{\xi_{T,ext}}^2 u^2(\xi_{T,ext}) + c_{\eta,ext}^2 u^2(\eta_{ext}),$$

gdzie  $c_{ref}, c_q, c_s, c_{nl}, c_{sw}, c_d, c_{\xi_{T,int}}, c_{\eta,int}, c_{\xi_{T,ext}}, c_{\eta,ext}$  - są współczynnikami wpływu składowych od: niepewności  $u(X_{ref})$  wielkości referencyjnych  $X_{ref}$ , efektu kwantowania  $u(q)$ ,  $u(p_{sw})$ , oddziaływań systematycznych stałych  $u(\zeta_s)$ , nieliniowości funkcji przetwarzania  $u(\lambda_{x,nl})$ , nieidealności parametrów układów przełączających, dryftu czasowego  $u(d_t)$ , zakłócenia okresowego wewnętrznego  $u(\xi_{T,int})$ , oraz zewnętrznego  $u(\xi_{T,ext})$ , szumu wewnętrznego  $u(\eta_{int})$  oraz zewnętrznego  $u(\eta_{ext})$ .

W każdym konkretnym przypadku pewne składowe niepewności mogą nie występować.

**Niepewność wielkości referencyjnych** związana jest z względną wartością graniczną  $\delta_{ref,gr}$  możliwych odchyłek  $X_{ref}$  od wartości nominalnej  $X_{ref,nom}$  i przy założeniu jednostajnego rozkładu jest równa:

$$(3) \quad u(x_{ref}) = \frac{\delta_{ref,gr} \cdot X_{ref,nom}}{\sqrt{3} \cdot 100\%}.$$

**Niepewność od efektu kwantowania** związana jest z wartością kwantu  $q$  przetwornika A/C:  $u(q) = q/2\sqrt{3}$ .

**Niepewność od nieliniowości funkcji przetwarzania** związana jest ze składową  $\lambda_{nl}(x)$ . W najprostszym przypadku monotonicznych funkcji przetwarzania nieliniowość można opisać funkcją paraboliczną  $\lambda_{nl}(x) = \varepsilon_{nl} \cdot x^2$ , gdzie  $\varepsilon_{nl}$  jest współczynnikiem nieliniowości. Przy założeniu jednostajnego rozkładu (wartości graniczne  $\pm \varepsilon_{nl,gr}$ ) składowa standardowej niepewności od nieliniowości funkcji przetwarzania może być obliczona ze wzoru:

$$(4) \quad u(\lambda_{x,nl}) = \frac{\varepsilon_{nl,gr}}{\sqrt{3}} x^2.$$

**Niepewność od niedoskonałości układów przełączających.** Korekcja zazwyczaj realizowana jest poprzez kilka dodatkowych pomiarów wielkości referencyjnych lub przetworzonych w pewien sposób wielkości mierzonej i dlatego na wejściu toru pomiarowego wykorzystywane są układy przełączające (multiplexer) [4]. Różnice wartości parametrów (rezystancja, różnica potencjałów kontaktów, prądy upływu, pasożytnicze pojemności etc.) różnych kanałów multiplexera oraz styków w miejscach podłączenia kabli może powodować dodatkową składową niepewności skorygowanego wyniku, której wartość zależy także od poziomu sygnałów mierzonych, rezystancji wejściowej toru pomiarowego oraz rezystancji wyjściowej źródła sygnału [4].

**Wpływ składowych przemiennych** (okresowych i szumowych) zależy nie tylko od ich poziomu i charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej  $A_m(f)$  samego miernika, ale także od charakterystyk amplitudowo-

częstotliwościowych odpowiadających algorytmowi korekcji:  $A_{ext}(f)$  - względem zewnętrznych składowych oraz  $A_{int}(f)$  - względem wewnętrznych.

**Wpływ szumu.** Podczas pomiarów najczęściej występują szумы w paśmie dolnoprzepustowym z gęstością widmową  $N_{ext(int)}(f)$ . Wariancja wyników pomiaru od wpływu tych szumów (zakładając ich niezależność) może być obliczona jako suma wariancji:

$$(5) \quad \sigma^2(\eta) = \sigma_{ext}^2 + \sigma_{int}^2 = 2 \int_0^\infty [N_{ext}(f) A_{ext}^2(f) + N_{int}(f) A_{int}^2(f)] A_m^2(f) df.$$

**Oddziaływania okresowe zewnętrzne i wewnętrzne.** Ich wpływ też zależy od charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej  $A_m(f)$  miernika oraz charakterystyk  $A_{ext(int)}(f_{ext(int)})$  dla odpowiednich częstotliwości  $f_{ext(int)}$ . Przy założeniu arcsinusoidalnego rozkładu wartości chwilowych zakłócenia oddziaływania te dają standardową niepewność wyniku pomiaru:

$$(6) \quad u(\xi_T) = \frac{X_{m,ext(int)}}{\sqrt{2}} A_{ext(int)}(f_{ext(int)}) \cdot A_m(f_{ext(int)}).$$

**Wpływ nieskorygowanych oddziaływań systematycznych oraz dryftu.** W praktyce często wykonuje się korekcję tylko pewnych niekorzystnych składowych, na przykład tylko addytywnych, lub addytywnych i multiplikatywnych, lub dryftu. Składowe, które nie są korygowane, powodują dodatkową niepewność skorygowanego wyniku. Oddziaływanie multiplikatywne powoduje składową niepewności, której wartość zależy od względnej wartości granicznej  $\delta_{m,gr}$ . Przy założeniu jednostajnego rozkładu składowa ta może być obliczona ze wzoru:

$$(7) \quad u(\zeta_s) = \frac{\delta_{m,gr} \cdot |x|}{\sqrt{3}}.$$

W przypadku braku korekcji dryftu czasowego składowa standardowej niepewności zależy od wartości granicznej szybkości zmian  $s_{t,gr}$  dryftu oraz odstępu czasowego  $T$  pomiędzy pomiarami a także od algorytmu korekcji.

### Niepewność skorygowanego wyniku w wybranych metodach korekcji

W następnej części pracy są analizowane niepewności skorygowanych wyników w podstawowych metodach korekcji oddziaływań addytywnych i multiplikatywnych oraz dryftów czasowych, bazujących na dodatkowych pomiarach wielkości referencyjnych oraz odwrotnej wartości wielkości mierzonej.

**(A) Standardowa metoda korekcji oddziaływań stałych addytywnych i multiplikatywnych,** bazuje na dwóch dodatkowych pomiarach wartości referencyjnych  $X_{ref,1}$  (zwykle  $X_{ref,1} = 0$ ) – wynik pomiaru  $N_0$  oraz  $X_{ref,2} = X_{ref}$  – wynik pomiaru  $N_{ref}$ . Skorygowana wartość wyniku pomiaru obliczana jest według wzoru:

$$(8) \quad x_{cor} = \frac{N_x - N_0}{N_{ref} - N_0} \cdot X_{ref} = x.$$

Współczynniki wpływu niepewności każdego wyniku pomiaru jako odpowiednie pochodne [1] są równe:

$$(9.1) \quad c_{N_x} = \frac{\partial x_{kor}}{\partial N_x} = \frac{X_{ref}}{N_{ref} - N_0} \approx \frac{X_{ref}}{N_{ref}} \approx 1;$$

$$(9.2) \quad c_{N_0} = \frac{\partial x_{kor}}{\partial N_0} = \frac{N_x - N_{ref}}{(N_{ref} - N_0)^2} X_{ref} \approx \frac{x_{cor}}{X_{ref}} - 1;$$

$$(9.3) \quad c_{N_{ref}} = \frac{\partial x_{kor}}{\partial N_{ref}} = -\frac{N_x - N_0}{(N_{ref} - N_0)^2} X_{ref} \approx -\frac{x_{cor}}{X_{ref}};$$

$$(9.4) \quad c_{X_{ref}} = \frac{\partial x_{kor}}{\partial X_{ref}} = \frac{N_x - N_0}{N_{ref} - N_0} \approx \frac{x_{cor}}{X_{ref}}.$$

W końcowych wyrażeniach dla tych współczynników uwzględniono, że  $N_x \approx x \approx x_{cor}$ ,  $N_0 \approx 0$  oraz  $N_{ref} \approx X_{ref}$ .

Dryft czasowy podczas dodatkowych pomiarów powoduje zmianę wyników:  $N_0$  o wartość  $s_t \cdot T$  a  $N_{ref}$  - o wartość  $2s_t \cdot T$ . Po uwzględnieniu tych zmian w wyrażeniu dla skorygowanej wartości (8) uzyskamy  $x_{kor} = \frac{x - s_t T}{X_{ref} + 2s_t T - s_t T} \cdot X_{ref} = \frac{x - s_t T \cdot (1 + x/X_{ref})}{1 + s_t T/X_{ref}}$  i składową standardowej niepewności skorygowanego wyniku od wpływu dryftu można obliczyć według wzoru ( $|s_t T| \ll X_{ref}$ ):

$$(10) \quad u(x_{kor})_d \approx \frac{|s_t| \cdot T}{\sqrt{3}} \cdot \left| 1 + \frac{x_{cor}}{X_{ref}} \right|.$$

Nieliniowość toru przy założeniu modelu parabolicznego powoduje zmianę wyniku pomiaru  $N_x$  o wartość  $\varepsilon_{nl} \cdot x^2$ , a  $N_{ref}$  - o wartość  $\varepsilon_{nl} \cdot X_{ref}^2$ . Dlatego w (8)

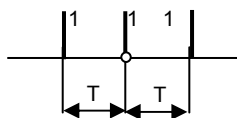
$$x_{kor} = \frac{x + \varepsilon_{nl} x^2}{X_{ref} + \varepsilon_{nl} X_{ref}^2} \cdot X_{ref} = \frac{1 + \varepsilon_{nl} x}{1 + \varepsilon_{nl} X_{ref}} x \approx (1 + \varepsilon_{nl} (x - X_{ref})) \cdot x.$$

Zakładając jednostajny rozkład współczynnika nielineowości  $\varepsilon_{nl}$  składową standardowej niepewności skorygowanego wyniku można obliczyć według wzoru:

$$(11) \quad u(x_{kor})_{nl} \approx \frac{\varepsilon_{nl,gr}}{\sqrt{3}} |x_{cor} \cdot (x_{cor} - X_{ref})|.$$

Z ostatniego wzoru widać, że w celu minimalizacji wpływu nielineowości wartość referencyjną należy wybierać bliską wartości mierzonej, tak żeby  $X_{ref} = x \approx x_{cor}$ .

W tej metodzie zewnętrzne szumy oraz zakłócenia harmoniczne (obecne w sygnale wejściowym) wpływają tylko na wynik pierwszego pomiaru – pomiaru wielkości  $x$ . Dlatego charakterystyka amplitudo-częstotliwościowa  $A_{ext}(f) = 1$ . Natomiast szumy oraz zakłócenia wewnętrzne wpływają na wszystkie trzy wyniki pomiaru. Względem wielkości mierzonych:  $x$ ,  $0$ ,  $X_{ref}$ . Współczynniki wpływu tych składowych na wyniki pomiarów przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Współczynniki wpływu składowych wewnętrznych na wyniki pomiaru w metodzie korekcji (8).

Na rysunku 1 (oraz następnym) na osi poziomej podano odstępy czasowe ( $T$ ) pomiędzy kolejnymi pomiarami, a na osi pionowej podano współczynniki, według których są uwzględniane składowe przemienne w odpowiednich wynikach pomiaru. Początek osi czasu jest usytuowany w punkcie środkowym pomiędzy momentami pierwszego i ostatniego pomiaru. Stosując interpretację zespoloną składowe przemienne wewnętrzne o amplitudzie  $X_m$  w kolejnych wynikach pomiaru można zapisać następująco:  $N_{x1} = x + X_m \cdot e^{-j\omega T}$ ,  $N_0 = X_m \cdot e^{-j0}$ ,  $N_{ref} = X_{ref} + X_m \cdot e^{j\omega T}$ . Po podstawieniu tych wartości do wzoru (8) po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$(12) \quad x_{cor}(jf) = \frac{x - X_m(1 - \cos(\omega T)) + j \sin(\omega T)}{1 - j \frac{X_m}{X_{ref}}(1 - \cos(\omega T)) - j \sin(\omega T)}.$$

Charakterystykę amplitudo-częstotliwościową wyznaczmy jako:

$$(13) \quad A_{int}(f) = \frac{|x_{cor}(jf) - x|}{X_m} = 2 \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{x}{X_{ref}}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) + \left(1 - \frac{x}{X_{ref}}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(1 - \frac{X_m}{X_{ref}}(1 - \cos(\omega T))\right)^2 + \frac{X_m^2}{X_{ref}^2} \sin^2(\omega T)}}.$$

Jak widać, charakterystyka  $A_{int}(f)$  względem składowych wewnętrznych zależy od amplitudy tych składowych, czyli algorytm korekcji (8) jest nieliniowy względem zmiennych składowych wewnętrznych. Związane jest to z tym, że w mianowniku (8) występują dwie wartości ( $N_{ref}$  oraz  $N_0$ ) zniekształcone wewnętrznymi szumami i zakłóceniami okresowymi. Jednak w rzeczywistych pomiarach praktycznie zawsze składowa przemienne w porównaniu z wartością referencyjną jest pomijalnie mała ( $X_m \ll X_{ref}$ ), dlatego w przybliżeniu charakterystyka amplitudo-częstotliwościowa (13) może być opisana wzorem ( $x \approx x_{cor}$ ):

$$(14) \quad A_{int}(f) = 2 \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{x_{cor}}{X_{ref}}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) + \left(1 - \frac{x_{cor}}{X_{ref}}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{1}}.$$

Zakładając, że wpływ szumów losowych a także efektów kwantowania w trzech wynikach pomiaru można uznać za wzajemnie niezależne, na podstawie obliczonych współczynników wpływu (9), wzorów (10) i (11) a także charakterystyki amplitudo-częstotliwościowej (14) złożoną standardową niepewność skorygowanego wyniku można przedstawić w postaci:

$$(15) \quad u^2(x_{cor}) \approx \frac{x_{cor}^2 \delta_{ref,gr}^2}{3} + 2 \left(1 - \frac{x_{cor}}{X_{ref}} + \frac{x_{cor}^2}{X_{ref}^2}\right) \left(\frac{q^2}{12} + \sigma_n^2\right) + \frac{X_{m,ext}^2 A_m^2(f_{ext})}{2} + \frac{X_{m,int}^2 A_{int}^2(f_{int}) A_m^2(f_{int})}{2} + \frac{s_{t,gr}^2 T^2}{3} \left(1 + \frac{x_{cor}}{X_{ref}}\right)^2 + \frac{\varepsilon_{gr}^2}{3} [x_{cor} (x_{cor} - X_{ref})]^2.$$

**(B) Niepewność korekcji addytywnego dryftu czasowego liniowego.** Istnieje kilka metod korekcji dryftu addytywnego, które różnią się liczbą pomiarów (minimalnie trzy pomiary) i bazują na dodatkowych pomiarach zerowej wartości lub odwróconej wartości wielkości mierzonej [5]. Zwykle pomiary są wykonywane w równych odstępach czasowych  $T$ .

**Metoda korekcji dryftu addytywnego B1** bazuje na trzech pomiarach: 1) wielkości wejściowej  $x$  - wynik pomiaru  $N_1 = x + d_1$ , 2) zerowej wielkości  $x = 0$  - wynik pomiaru  $N_2 = N_0 = d_1 + s_t T$  oraz 3) ponownie wielkości wejściowej  $x$  - wynik pomiaru  $N_3 = x + d_1 + 2s_t T$ .

**Metoda korekcji dryftu addytywnego B2**, podobnie jak pierwsza, bazuje też na trzech pomiarach, tylko w drugim pomiarze mierzona jest odwrócona wartość wielkości wejściowej  $-x$  - wynik pomiaru  $N_2 = -x + d_1 + s_t T$ .

**Metoda korekcji dryftu addytywnego B3** bazuje na czterech pomiarach: 1) wielkości wejściowej  $x$  - wynik  $N_1 = x + d_1$ ; 2) odwróconej wielkości wejściowej  $-x$  - wynik  $N_2 = -x + d_1 + s_t T$ ; 3) drugi raz odwróconej wielkości

wejściowej  $-x$  - wynik:  $N_3 = -x + d_1 + 2s_1T$ ; 4) wielkości wejściowej  $x$  - wynik:  $N_4 = x + d_1 + 3s_1T$  [5].

Wartości skorygowane w tych metodach są równe:

$$(16) \quad x_{cor,1} = \frac{N_1 + N_3 - 2N_0}{2}; \quad x_{cor,2} = \frac{N_1 + N_3 - 2N_2}{4};$$

$$x_{cor,3} = \frac{N_1 - N_2 - N_3 + N_4}{4}.$$

Współczynniki wpływu niepewności wyników pomiaru na niepewności skorygowanych wyników są równe:

$$(17) \quad c_{N_1} = c_{N_3} = \frac{1}{2}; \quad c_{N_0} = -1 \quad (B1); \quad c_{N_1} = c_{N_3} = \frac{1}{4}, \quad c_{N_2} = -\frac{1}{2} \quad (B2);$$

$$c_{N_1} = c_{N_4} = \frac{1}{4}, \quad c_{N_2} = c_{N_3} = -\frac{1}{4} \quad (B3).$$

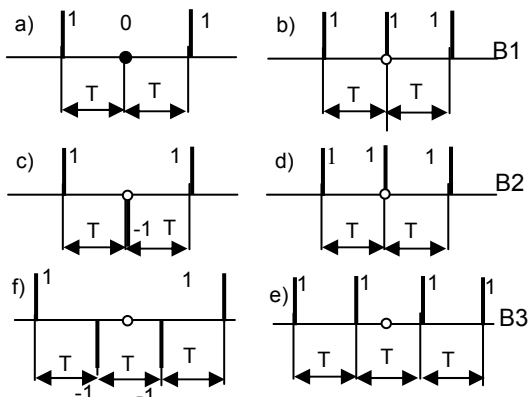
Charakterystyki amplitudo-częstotliwościowe, dotyczące wpływu oddziaływań zmiennych, mogą być wyznaczone przy wykorzystaniu współczynników uwzględniających wpływ tych składowych na wyniki pomiaru, przedstawionych na rysunku 2. Na podstawie współczynników na rys. 2, a, c, e, stosując interpretację zespoloną wpływ składowych zmiennych zewnętrznych w kolejnych wynikach pomiaru można przedstawić następująco:

$$N_{x1} = x + X_m e^{-j2\pi f T}; \quad N_{x2} = 0; \quad N_{x3} = x + X_m e^{j2\pi f T}; \quad (B1)$$

$$N_{x1} = x + X_m e^{-2j\pi f T}; \quad N_{x2} = -x - X_m e^{j0}; \quad N_{x3} = x + X_m e^{j2\pi f T}; \quad (B2)$$

$$N_{x1} = x + X_m e^{-j3\pi f T}; \quad N_{x2} = -x - X_m e^{-j\pi f T};$$

$$N_{x3} = -x - X_m e^{j\pi f T}; \quad N_{x4} = x + X_m e^{j3\pi f T}; \quad (B3)$$



Rys. 2. Współczynniki wpływu składowych zmiennych zewnętrznych (a, c, e) oraz wewnętrznych (b, d, f) na wyniki pomiaru w trzech metodach korekcji (16).

Wpływ składowych zmiennych wewnętrznych na podstawie współczynników na rysunku 2, b, d, f może być opisany zależnościami:

$$N_{x1} = x + X_m e^{-j2\pi f T}; \quad N_{x2} = X_m e^{j0}; \quad N_{x3} = x + X_m e^{j2\pi f T}; \quad (B1)$$

$$N_{x1} = x + X_m e^{-j2\pi f T}; \quad N_{x2} = -x + X_m e^{j0}; \quad N_{x3} = x + X_m e^{j2\pi f T}; \quad (B2)$$

$$N_{x1} = x + X_m e^{-j3\pi f T}; \quad N_{x2} = -x + X_m e^{-j\pi f T};$$

$$N_{x3} = -x + X_m e^{j\pi f T}; \quad N_{x4} = x + X_m e^{j3\pi f T}. \quad (B3)$$

Po podstawieniu tych zależności do odpowiednich równań (16) po prostych przekształceniach otrzymuje się charakterystyki amplitudo-częstotliwościowe:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{1,ext}(f) = |\cos(2\pi f T)|; \quad A_{1,int}(f) = 2 \cdot \sin^2(\pi f T); \\ A_{2,ext}(f) = \cos^2(\pi f T); \quad A_{2,int}(f) = \sin^2(\pi f T); \\ A_{3,ext}(f) = |\cos(\pi f T/2)\cos(\pi f T)|; \quad A_{3,int}(f) = 2\sin^2(\pi f T/2)\cos(\pi f T/2). \end{array} \right.$$

Przy wzajemnej niezależności składowych związanych z szumami i kwantowaniem na podstawie współczynników wpływu (17) oraz charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych (18) złożone standardowe niepewności skorygowanych wyników (16) (pomijając wpływ oddziaływania multiplikatywnego oraz nieliniowości funkcji przetwarzania) mogą być opisane wzorami:

$$(19) \quad u^2(x_{cor}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{q^2}{12} + \sigma_{n,1}^2 \right) + \frac{X_{m,ext}^2 A_{1,ext}^2(f_{ext}) A_m^2(f_{ext})}{2} + \frac{X_{m,int}^2 A_{1,int}^2(f_{int}) A_m^2(f_{int})}{2} \quad (B1); \\ \frac{3}{8} \cdot \left( \frac{q^2}{12} + \sigma_{n,2}^2 \right) + \frac{X_{m,ext}^2 A_{2,ext}^2(f_{ext}) A_m^2(f_{ext})}{2} + \frac{X_{m,int}^2 A_{2,int}^2(f_{int}) A_m^2(f_{int})}{2} \quad (B2); \\ \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{q^2}{12} + \sigma_{n,3}^2 \right) + \frac{X_{m,ext}^2 A_{3,ext}^2(f_{ext}) A_m^2(f_{ext})}{2} + \frac{X_{m,int}^2 A_{3,int}^2(f_{int}) A_m^2(f_{int})}{2} \quad (B3). \end{array} \right.$$

**(C) Zaawansowana korekcja łącznie oddziaływań addytywnego, multiplikatywnego oraz dryftu czasowego.** Taką korekcję można zrealizować kilkoma metodami. Ponieważ oddziaływania addytywne, multiplikatywne oraz liniowy dryft czasowy opisywane są trzema parametrami, dlatego te oddziaływania można skorygować na podstawie minimum czterech pomiarów w jednakowych odstępach czasowych ( $T$ ): po 2 pomiary wielkości mierzonej i referencyjnej z pomiarami ich dodatnich i odwróconych wartości według algorytmu: 1) pomiar  $+x$  – wynik  $N_{x1}$ ; 2) pomiar  $-x$  – wynik  $N_{x2}$ ; 3) pomiar  $-X_{ref}$  – wynik  $N_{ref1}$ ; 4) pomiar  $+X_{ref}$  – wynik  $N_{ref2}$ . Skorygowany wynik pomiaru może być obliczony jako:

$$(20) \quad x_{kor} = \frac{3N_{x1} - 5N_{x2} + N_{ref1} + N_{ref2}}{N_{x1} + N_{x2} + 3N_{ref1} - 5N_{ref2}} X_{ref}.$$

Dla tej metody współczynniki wpływu niepewności każdego wyniku pomiaru oraz wartości referencyjnej na złożoną niepewność skorygowanego wyniku są równe:

$$(21) \quad c_{N_{x1}} = \frac{\partial x_{kor}}{\partial N_{x1}} = \frac{8(N_{x2} + N_{ref2} - 2N_{ref1})}{(N_{x1} + N_{x2} + 3N_{ref2} - 5N_{ref1})^2} X_{ref} \approx \frac{1}{8} \left( 3 - \frac{x_{cor}}{X_{ref}} \right);$$

$$c_{N_{x2}} = \frac{\partial x_{kor}}{\partial N_{x2}} = \frac{-8(N_{x1} + 2N_{ref2} - 3N_{ref1})}{(N_{x1} + N_{x2} + 3N_{ref2} - 5N_{ref1})^2} X_{ref} \approx \frac{-1}{8} \left( 5 + \frac{x_{cor}}{X_{ref}} \right);$$

$$c_{N_{ref1}} = \frac{\partial x_{kor}}{\partial N_{ref1}} = \frac{8(2N_{x1} - 3N_{x2} + N_{ref2})}{(N_{x1} + N_{x2} + 3N_{ref2} - 5N_{ref1})^2} X_{ref} \approx \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{5x_{cor}}{X_{ref}} \right);$$

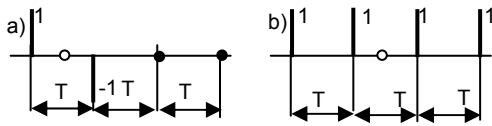
$$c_{N_{ref2}} = \frac{\partial x_{kor}}{\partial N_{ref2}} = \frac{-8(N_{x1} - 2N_{x2} + N_{ref1})}{(N_{x1} + N_{x2} + 3N_{ref2} - 5N_{ref1})^2} X_{ref} \approx \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{3x_{cor}}{X_{ref}} \right);$$

$$c_{X_{ref}} = \frac{\partial x_{kor}}{\partial X_{ref}} = \frac{3N_{x1} - 5N_{x2} + N_{ref1} + N_{ref2}}{N_{x1} + N_{x2} + 3N_{ref2} - 5N_{ref1}} \approx \frac{x_{cor}}{X_{ref}}.$$

W końcowych wyrażeniach tych współczynników uwzględniono, że w przybliżeniu  $N_{x1} \approx -N_{x2} \approx x \approx x_{cor}$  oraz  $N_{ref2} \approx -N_{ref1} \approx X_{ref}$ .

Ze wzoru (20) widać, że algorytm korekcji na ogół jest nieliniowy względem składowych przemiennej zewnętrznych i wewnętrznych. Współczynniki wpływu składowych zmiennych zewnętrznych oraz wewnętrznych w odpowiednich wynikach pomiaru podane są na rysunku 3. Stosując interpretację zespoloną składowe przemienne zewnętrzne w pierwszych dwóch wynikach można zapisać jako:  $N_{x1} = x + X_m \cdot e^{-j\pi f T}$ ,  $N_{x2} = -x - X_m \cdot e^{j\pi f T}$ . Po podstawieniu tych wartości do wzoru (20) otrzymuje się:

$$(22) \quad x_{cor,ext}(jf) = \frac{x + X_m (\cos(\pi f T) + j \frac{1}{4} \sin(\pi f T))}{1 - j \frac{X_m}{4X_{ref}} \sin(\pi f T)}.$$



Rys. 3. Współczynniki wpływu składowych zmiennych zewnętrznych (a) oraz wewnętrznych (b) na odpowiednie wyniki pomiaru w metodzie korekcji (20).

Na podstawie tej zależności charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową wyznaczmy jako:

$$(23) A_{ext}(f) = \frac{|x_{cor,ext}(jf) - x|}{X_m} \approx \sqrt{\cos^2(\pi f T) + \frac{1}{16} \left(1 + \frac{x}{X_{ref}}\right)^2 \sin^2(\pi f T)},$$

gdzie w mianowniku pominięto wpływ (w porównaniu z wartością referencyjną) składowej przemiennej ( $X_m \ll X_{ref}$ ).

Składowe wewnętrzne występują we wszystkich czterech wynikach pomiaru i według rys. 3b można je zapisać jako:  $N_{x1} = x + X_m \cdot e^{-j3\pi f T}$ ,  $N_{x2} = -x + X_m \cdot e^{-j\pi f T}$ ,  $N_{ref1} = -X_{ref} + X_m \cdot e^{j\pi f T}$ ,  $N_{ref2} = X_{ref} + X_m \cdot e^{j3\pi f T}$ . Po podstawieniu tych wartości do wzoru (20) otrzymujemy:

$$(24) x_{cor,int}(jf) = \frac{x + X_m \sin^2(\pi f T) (2 \cos(\pi f T) - j \sin(\pi f T))}{1 - \frac{X_m}{X_{ref}} \sin^2(\pi f T) \cdot (2 \cos(\pi f T) + j \sin(\pi f T))}$$

Po pominięciu w mianowniku wpływu składowej przemiennej ( $X_m \ll X_{ref}$ ) charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową można zapisać w postaci:

$$(25) A_{int}(f) \approx \sin^2(\pi f T) \sqrt{4 \left(1 - \frac{x}{X_{ref}}\right)^2 \cos^2(\pi f T) + \left(1 + \frac{x}{X_{ref}}\right)^2 \sin^2(\pi f T)}$$

Zakładając wzajemną niezależność wpływu szumów losowych i kwantowania, na podstawie współczynników wpływu (21) oraz charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych (23) i (25) złożona standardowa niepewność skorygowanego wyniku (20) może być obliczona według wzoru:

$$(26) u^2(x_{cor}) \approx \frac{9}{16} \left(1 + \frac{x_{cor}^2}{X_{ref}^2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{x_{cor}}{X_{ref}}\right) \left(\frac{q^2}{12} + \sigma_n^2\right) + \frac{x_{cor}^2 \delta_{ref,gr}^2}{3} + \frac{X_{m,ext}^2 A_{ext}^2(f_{ext}) A_m^2(f_{ext})}{2} + \frac{X_{m,int}^2 A_{int}^2(f_{int}) A_m^2(f_{int})}{2}$$

**Przykład.** W celu korekcji wskazania  $N_1 = N_x = 99,32 \text{ k}\Omega$  4½ cyfrowego omomierza wykonano dwa dodatkowe pomiary: przy zwarcu wejść otrzymano wskazanie  $N_2 = N_0 = 0,58 \text{ k}\Omega$  oraz przy podłączeniu do wejścia rezystora referencyjnego  $R_{ref} = 100,00 \text{ k}\Omega$  (klasa dokładności 0,01%) otrzymano wskazanie  $N_3 = N_{ref} = 98,73 \text{ k}\Omega$ . Losowy rozrzut kilku kolejnych wskazań omomierza wynosi około  $\pm 3$  cyfry najmniej znaczące ( $q = 0,01 \text{ k}\Omega$ ). Należy wyznaczyć skorygowaną wartość wyniku oraz złożoną standardową niepewność, spowodowaną wpływem kwantowania, szumów oraz niepewności wielkości referencyjnej (inne składowe niepewności można pominąć).

**Rozwiązanie.** Według (8) skorygowana wartość wyniku pomiaru rezystancji wynosi:  $R_{cor} = \frac{99,32 - 0,58}{98,73 - 0,58} 100,00 = 100,602 \text{ k}\Omega$ .

Zakładając, że przy małej liczbie obserwacji losowy rozrzut w przybliżeniu mieści się w granicach  $\pm 2\sigma_n$ , dlatego standardowe odchylenie rozrzutu wynosi około

$\sigma_n = 0,015 \text{ k}\Omega$ . Wtedy według (26) niepewność standardowa wartości skorygowanej:

$$u(x_{cor}) \approx \sqrt{\left(\frac{99,32 \cdot 0,01\%}{\sqrt{3} \cdot 100\%}\right)^2 + 2 \left(1 - \frac{99,32}{98,73} + \left(\frac{99,32}{98,73}\right)^2\right) \left(\frac{0,01^2}{12} + 0,015^2\right)} \approx 0,022 \text{ k}\Omega.$$

Przy stabilnych wskazaniach omomierza ( $\sigma_n \approx 0$ ) niepewność standardowa byłaby równa  $\approx 0,007 \text{ k}\Omega$  (a więc trzykrotnie mniejsza), podczas gdy teoretycznie (przy pominięciu efektu kwantowania i rozrzutów losowych) minimalna standardowa niepewność wynosi tylko  $\approx 0,0057 \text{ k}\Omega$ .

W przypadku 3½ cyfrowego omomierza ( $q = 0,1 \text{ k}\Omega$ ) nawet przy stabilnych wskazaniach niepewność standardowa wartości skorygowanej byłaby  $\approx 0,041 \text{ k}\Omega$ , to jest 6 razy większa od teoretycznej i 2 razy większa od niepewności skorygowanego wyniku wyznaczonego dla wskazań 4½ cyfrowego omomierza.

## Wnioski

Przedstawiono wzory (15), (19) oraz (26), pozwalające na obliczenie złożonych standardowych niepewności skorygowanych wyników, na podstawie parametrów niekorzystnych oddziaływań oraz algorytmu obliczania skorygowanego wyniku. Na podstawie analizy wyprowadzonych wzorów oraz podanego przykładu można stwierdzić, że podstawowymi czynnikami, ograniczającymi skuteczność korekcji oddziaływań systematycznych oraz dryftów czasowych, są rozdzielczość miernika oraz związana z szumami i oddziaływaniami regularnymi niestabilność wyników pomiaru. W pewnych przypadkach przy obliczaniu niepewności należy uwzględnić także nieliniowość toru pomiarowego (4), (11), wpływ nieskorygowanych oddziaływań systematycznych (7) lub dryftu (10) oraz niedoskonałość układów przełączających [4].

Wpływ oddziaływań zmiennych na niepewność skorygowanego wyniku zależy od odpowiednich charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych, które są różne dla oddziaływań zewnętrznych i wewnętrznych oraz są zależne od algorytmu korekcji. Przedstawiono wyrażenia (14), (18), (23), (26) służące do wyznaczenia tych charakterystyk dla wybranych metod korekcji.

W celu łącznej korekcji oddziaływań systematycznych addytywnych i multiplikatywnych oraz dryftów czasowych zaproponowano metodę bazującą na czterech pomiarach: po dwa pomiary (bezpośrednie i odwróconej wartości) wielkości wejściowej i referencyjnej z obliczaniem wartości skorygowanej według zależności (20).

## REFERENCES

- [1] Guide to the expression of uncertainty in measurement, JCGM 100 (2008)
- [2] Pavese F., Why should correction values be better known than the measurand true value? IMEKO 2013 TC1 + TC7 + TC13, *Journal of Physics: Conference Series*, 459 (2013), 012036
- [3] Cox M. G., Systematic-error modeling, with application to complex permittivity measurement. *16th IMEKO TC4 Symposium*, Florence, 2008
- [4] Switching Handbook. A Guide to Signal Switching in Automated Test Systems. 6th Edition. Keithley Instruments, Inc. 2008.
- [5] Smart sensor systems. Edited by Gerard C. M. Meijer, John Wiley and Sons Ltd. (2008)

**Autor:** prof. dr hab. inż. Mykhaylo Dorozhovets, Politechnika Rzeszowska, Katedra Metrologii i Systemów Diagnostycznych, ul. W. Pola, 2A, 35-959, Rzeszów, e-mail: [michdor@prz.edu.pl](mailto:michdor@prz.edu.pl)