

Ściskanie wsadów rurowych w procesie elektrodynamicznego formowania metali - analiza numeryczna

Streszczenie. W pracy opisano ściskanie wsadów rurowych w procesie elektrodynamicznego formowania metali. Przeprowadzona analiza numeryczna umożliwiła wyznaczenie pola elektromagnetycznego w formowanym elemencie poprzez rozwiązanie równania Bessela we współrzędnych walcowych. Program umożliwia również obliczenie miejsc zerowych dla dowolnej kombinacji funkcji Bessela.

Abstract. In the paper compression of the tubular charge in the electrodynamic forming is presented. The presented numerical analysis made it possible to determine electromagnetic field distribution in the formed charge by solving the Bessel equation in cylindrical coordinates. The developed program makes it also possible to calculate the poles for arbitrary combinations of Bessel functions. (**Compression of the tubular charge in electrodynamic process metal forming – numerical analysis.**)

Słowa kluczowe: formowanie polem magnetycznym, pole elektromagnetyczne, analiza numeryczna, funkcje Bessela.

Keywords: electromagnetic forming, electromagnetic field, numerical analysis, Bessel's functions.

Wstęp

W przypadku kształtowania przewodzącego wsadu rurowego impulsowe pole magnetyczne jest polem zewnętrznym w stosunku do rury ma jedną składową wzdłuż osi z (rys.1) i określa się je następującym wzorem:

$$(1) \quad H^{zew}(t) = I_z H_z^{zew}(t),$$

w którym składowa natężenia pola magnetycznego wzdłuż osi z

$$(2) \quad H_z^{zew}(t) = H_0 e^{-\eta t} \sin(\omega t + \psi)$$

gdzie: H_0 - amplituda pola magnetycznego przy braku tłumienia w $A \cdot m^{-1}$, ω - pulsacja drgań własnych układu kształtowany element – głowica robocza – bateria kondensatorów w $rad \cdot s^{-1}$, η - współczynnik tłumienia pola magnetycznego w s^{-1} , ψ - faza początkowa natężenia pola magnetycznego w rad.

Przy kształtowaniu metali impulsowym polem magnetycznym i obliczaniu odkształcenia zasadniczym problemem jest wyznaczenie rozkładu czasowo – przestrzennego natężenia pola magnetycznego $H^{III}(r,t)$ w kształtowanym elemencie. Umożliwi nam to obliczenie sił działających na wsad, a w konsekwencji wyliczenie wielkości odkształcenia detalu. [1-6]

Pole elektryczne i magnetyczne we wsadzie rurowym

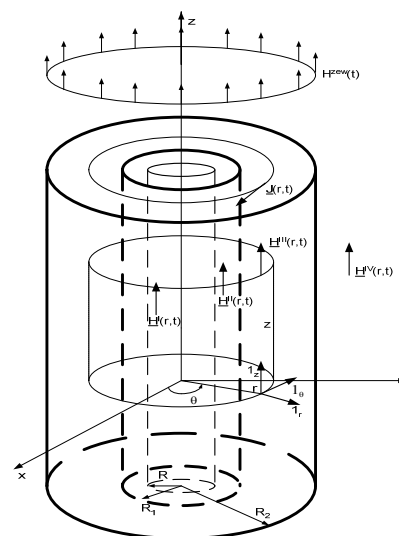
W przypadku nieskończonej długiej rury przewodzącej w zewnętrznym podłużnym polu magnetycznym (rys.1) wielkości charakteryzujące pole elektromagnetyczne, ze względu na symetrię układu, zależą tylko od współrzędnej r walcowego układu współrzędnych. Chodzi zatem o zagadnienie jednowymiarowe ze stałą przenikalnością magnetyczną walca $\mu = \mu_0$ i jego stałą konduktywnością γ .

Poszukiwane natężenie pola magnetycznego $H_z^{III}(r,t)$ spełnia skalarnie równanie falowe we współrzędnych walcowych: [7-8]

$$(3) \quad \frac{\partial^2 H_z^{III}(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z^{III}(r,t)}{\partial r} - \mu_0 \gamma_3 \frac{\partial H_z^{III}(r,t)}{\partial t} = 0$$

natomiast pole elektryczne:

$$(4) \quad \frac{E_\theta^{III}(r,t)}{\gamma_3} = -\frac{1}{\gamma_3} \frac{\partial H_z^{III}(r,t)}{\partial r}$$



Rys.1. Przewodzący wsad rurowy z matrycą przewodzącą umieszczony w polu magnetycznym o charakterze sinusoidalnym tłumionej

Do wyznaczenia pola magnetycznego stosujemy przekształcenie Laplace'a i zakładając zerowy warunek początkowy otrzymujemy [9]

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \bar{H}_z^{III}(r,s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{H}_z^{III}(r,s)}{\partial r} - s \mu_0 \gamma_3 \bar{H}_z^{III}(r,s) = 0$$

Równanie (5) jest równaniem Bessela zerowego rzędu zmiennej r , którego rozwiązaniem jest funkcja [10]

$$(6) \quad \bar{H}_z^{III}(r,s) = \underline{A}_2 I_0(\sqrt{s} \sqrt{\mu_0 \gamma_3} r) + \underline{A}_3 K_0(\sqrt{s} \sqrt{\mu_0 \gamma_3} r)$$

gdzie funkcje I_0 i K_0 są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju zerowego rzędu.

Stałe \underline{A}_2 , \underline{A}_3 wyznaczamy z warunków ciągłości pola elektromagnetycznego na granicach obszarów.[8] Dla uproszczenia zapisu przyjęto, że $\mu = \mu_0$, $\gamma = \gamma_3$.

Natężenie pola magnetycznego w obszarze III ($R_1 \leq r \leq R_2$) można przedstawić w postaci:

$$(7) \quad \bar{H}_z^{III}(r,s) = \frac{N(s)}{D(s)} H_0$$

gdzie licznik

$$(8) \quad N(s) = \left[2K_1(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma R_2}) + \sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma R_1} K_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma R_1}) \right] I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma r}) + \left[2I_1(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma R_1}) - \sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma R_1} I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma R_1}) \right] K_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma r})$$

oraz mianownik

$$(9) \quad D(s) = (s - s_0) D_1(s)$$

gdzie

$$(10) \quad D_1(s) = I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma R_2}) \left[2K_1(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma R_1}) + \sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma R_1} K_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma R_1}) \right] + K_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma R_2}) \left[2I_1(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma R_1}) - \sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma R_1} I_0(\sqrt{s}\sqrt{\mu\gamma R_1}) \right]$$

Można wykazać, że mianownik (10) jest funkcją analityczną w całej półpłaszczyźnie „s” oraz ma (oprócz zera $s = s_0$) pojedyncze zera $s_n = -\sigma_n$ $\sigma_n > 0$ na ujemnej półosi rzeczywistej. Wtedy do obliczenia oryginału $\underline{H}_z^{III}(r, t)$ funkcji operatorowej $\underline{H}_z^{III}(r, s)$ można wykorzystać twierdzenie o rozkładzie [8] otrzymując

$$(11) \quad \underline{H}_z^{III}(r, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \underline{H}_z^{III}(r, s) \right\} = \left\{ \frac{N(s_0)}{D'(s_0)} e^{s_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N(s_n)}{D'(s_n)} e^{s_n t} \right\} \underline{H}_0$$

gdzie $\underline{H}_{z,0}^{III}(r, t)$ jest oryginałem funkcji (11) w biegunie $s = s_0$, zaś $\underline{H}_{z,k}^{III}(r, t)$ jest oryginałem tej funkcji w biegunie $s = s_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Ze wzoru (8) wartość licznika $N(s)$ dla $s = s_0$ określa się wzorem

$$(12) \quad N(s_0) = \left[2K_1(\underline{\Gamma} R_1) + \underline{\Gamma} R_1 K_0(\underline{\Gamma} R_1) \right] I_0(\underline{\Gamma} r) + \left[2I_1(\underline{\Gamma} R_1) - \underline{\Gamma} R_1 I_0(\underline{\Gamma} R_1) \right] K_0(\underline{\Gamma} r)$$

Stała $\underline{\Gamma}$ w równaniu (12) jest zespoloną stałą propagacji

$$(13) \quad \underline{\Gamma} = \sqrt{s_0 \mu \gamma} = \sqrt{-\eta \mu \gamma + j \omega \mu \gamma} = k \sqrt{2(j - \frac{\eta}{\omega})} = \underline{\kappa} k$$

Pierwsza pochodna mianownika $D(s)$ w punkcie s_0 dana jest wzorem

$$(14) \quad D'(s_0) = \left. \frac{dD(s)}{ds} \right|_{s=s_0} = D_1(s_0) = I_0(\underline{\Gamma} R_2) \left[2K_1(\underline{\Gamma} R_1) + \underline{\Gamma} R_1 K_0(\underline{\Gamma} R_1) \right] + K_0(\underline{\Gamma} R_2) \left[2I_1(\underline{\Gamma} R_1) - \underline{\Gamma} R_1 I_0(\underline{\Gamma} R_1) \right]$$

W punkcie s_n pochodna ta wyraża się wzorem

$$(15) \quad D'(s_n) = \left. \frac{dD(s)}{ds} \right|_{s=s_n} = (s_n - s_0) D_1'(s_n)$$

gdzie pierwszą pochodną funkcji $D_1(s)$ wyznacza się na podstawie wzorów zawartych w [8] i jest ona kombinacją liniową funkcji Bessela.

Jeżeli następnie wykona się podstawienie

$$\sqrt{s} \sqrt{\mu \gamma} R_2 = j \xi, \quad \sqrt{s} \sqrt{\mu \gamma} R_1 = j \xi \beta, \quad \beta = \frac{R_1}{R_2} \text{ do wzoru}$$

(8,9), to wszystkie argumenty funkcji Bessela zostaną przedstawione poprzez nową zmienną ξ . Wtedy też można zastąpić poszukiwanie miejsc zerowych $s = s_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) funkcji $D_1(s)$ wyznaczaniem miejsc zerowych ξ_n funkcji $D_1(\xi)$ ze względu na zmienną ξ , gdyż

$$(16) \quad \sqrt{s} = j \frac{\xi}{\sqrt{\mu \gamma} R_2} = \sqrt{-\frac{\xi^2}{\mu \gamma R_2^2}}$$

co oznacza, że n – te miejsce zerowe funkcji $D_1(s)$

$$(17) \quad s_n = -\sigma_n = -\frac{\xi_n^2}{\mu \gamma R_2^2}$$

Wtedy też można wyznaczyć wartości funkcji $D_1(\xi)$, $N(j\xi_n)$ oraz $D'(j\xi)$ w miejscach zerowych ξ_n . Zadanie to jest niezwykle trudne ze względu na uwikłanie funkcji Bessela różnego rodzaju. Rozwiązanie można uzyskać jedynie drogą numeryczną. Do tego celu wykorzystano program MATLAB. Miejsca zerowe funkcji (14) zależą jedynie od parametru beta, czyli od wielkości promienia wewnętrznego i zewnętrznego wsadu. Poniższy program umożliwi obliczanie miejsc zerowych dowolnych kombinacji funkcji Bessela poprzez odpowiednie ich wpisanie do zmiennej *mian2*

Tabela 1. Listing programu do obliczania miejsc zerowych w MATLAB

```
%miejsca zerowe rury
function []=zerorury
clc
clear all
R1=input('R1[m]='); %promien wewnetrzny rury
R2=input('R2[m]='); %promien zewnetrzny rury
beta=R1/R2;
il_zero=1;
xp=1; %przypuszczalne miejsce zerowe
miejsce_zerowe=0;
options = optimset('Display','off');
while xp<400*beta
mz=fzero(@mian,xp,options,beta);
if (mz>0.001)
miejsce_zerowe(il_zero)=mz;
il_zero=il_zero+1;
end
xp=xp+1;
end

%eliminujemy powtarzajace sie miejsca zerowe
n=size(miejsce_zerowe,2);
for i=n:-1:2
if (miejsce_zerowe(i)-miejsce_zerowe(i-1))<0.01)
miejsce_zerowe(i)=[];
end
end

miejsce_zerowe %wypisujemy miejsca zerowe

function out=mian(xk,beta)
x=xk.*j;
i0=besseli(0,x);
i1=besseli(1,x);
k0=besselk(0,x);
k1=besselk(1,x);
i0b=besseli(0,x.*beta);
i1b=besseli(1,x.*beta);
k0b=besselk(0,x.*beta);
k1b=besselk(1,x.*beta);
mian2=i0.*(2.*k1b+x.*beta.*k0b)+k0.*(2.*i1b-x.*beta.*i0b);
out=imag(mian2);
```

Wnioski

Do wyznaczenia oryginału funkcji (11) wystarczy wyznaczyć około 10 pierwszych miejsc zerowych. W zależności od zastosowania wsadów cienkościennych bądź grubościennych, czyli dla różnych parametrów beta, pierwszych 10 miejsc zerowych obliczono na podstawie programu i podano w tabeli:

Tabela 2. Miejsca zerowe

ξ_n	$\beta=0,1$	$\beta=0,3$	$\beta=0,5$	$\beta=0,7$	$\beta=0,8$
1	± 2.40514	± 2.42734	± 2.55437	± 2.96297	± 3.45595
2	± 5.52828	± 5.90098	± 7.32362	± 11.2965	± 16.4571
3	± 8.69678	± 9.87335	± 13.1528	± 21.3806	± 31.8039
4	± 11.9141	± 14.1019	± 19.2512	± 31.7105	± 47.3843
5	± 15.1832	± 18.4424	± 25.4370	± 42.1097	± 63.0276
6	± 18.4988	± 22.8370	± 31.6605	± 52.5377	± 78.6966
7	± 21.8516	± 27.2610	± 37.9034	± 62.9802	± 94.3785
8	± 25.2330	± 31.7025	± 44.1577	± 73.4310	± 110.067
9	± 28.6359	± 36.1553	± 50.4191	± 83.8872	± 125.761
10	± 32.0552	± 40.6158	± 56.6853	± 94.3468	± 141.458

Stąd też możemy wyznaczyć funkcję zespoloną wartości chwilowej natężenia pola magnetycznego w obszarze III ($R_1 \leq r \leq R_2$). Zgodnie ze wzorem (11) otrzymuje się:

$$(18) \quad \underline{H}_z^{III}(r,t) = \left[\underline{H}_{z,0}^{III}(r,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{H}_{z,n}^{III}(r,t) \right]$$

gdzie $\underline{H}_{z,0}^{III}(r,t)$ jest oryginałem funkcji (7) w biegunie $s=s_0$

($n=0$), zaś $\underline{H}_{z,n}^I(r,t)$ jest oryginałem tej funkcji w biegunie $s=s_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$).

Oryginały te są dane następującymi wzorami:

$$(19) \quad \underline{H}_{z,0}^{III}(r,t) = \underline{H}_0 \frac{N(s_0)}{D_1(s_0)} e^{-\eta t} e^{j\omega t}$$

$$(20) \quad \underline{H}_{z,n}^{III}(r,t) = \underline{H}_0 \frac{N(j\xi_n)}{A_n(\xi_n) D_n(j\xi_n)} \exp\left[-\frac{\xi_n^2}{\mu\gamma R_2^2} t\right]$$

w których stała zespolona

$$(21) \quad \underline{A}_n(\xi_n) = \frac{j}{2\xi_n} (\xi_n^2 + R_2^2 \underline{\Gamma}^2) = -\frac{j}{2\xi_n} [2k^2 R_2^2 + j(2k^2 R_2^2 \tau - \xi_n^2)]$$

gdzie stosunek stałej tłumienia pola magnetycznego w generatorze prądów udarowych do częstotliwości rezonansowej tego generatora $\tau = \frac{\eta}{\omega}$.

Ostatecznie natężenie pola magnetycznego w przewodzącym wsadzie rurowym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej ma postać

$$(22) \quad H_z^{III}(r,t) = \text{Im}\left\{ \underline{H}_z^{III}(r,t) \right\} = \left[H_{z,0}^{III}(r,t) + \sum_{n=1}^{\infty} H_{z,n}^{III}(r,t) \right]$$

Analizę pola elektromagnetycznego wygodnie jest przeprowadzać w jednostkach względnych, tzn. przyjmuje się zmienną $x = \frac{r}{R_2}$, $\beta \leq x \leq 1$.

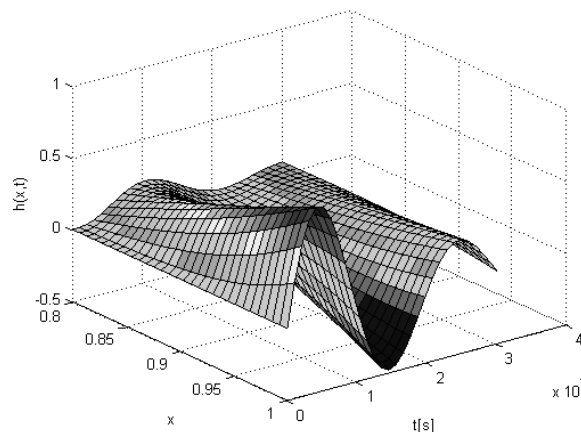
Częstotliwość sinusoidalnie zmiennego zewnętrznego pola magnetycznego oraz konduktywność wsadu w odniesieniu do jego promienia zewnętrznego zostaną uwzględnione przez współczynnik $\alpha = \frac{R_2}{\delta} = k R_2$. Wtedy

funkcje opisujące pole magnetyczne zostaną wyrażone poprzez zmienną x .

$$(23) \quad H_z^{III}(x,t) = \text{Im}\left\{ \underline{H}_z^{III}(x,t) \right\} = \left[H_{z,0}^{III}(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} H_{z,n}^{III}(x,t) \right]$$

Wyznaczenie miejsc zerowych pozwala wyznaczyć czasowo – przestrzenny rozkład pola magnetycznego dla każdego wsadu rurowego. Wykres przedstawiono przykładowo dla wsadu cienkościennego $\beta=0,8$ w odniesieniu do H_0 .

$$(24) \quad h(x,t) = \frac{H_z^{III}(x,t)}{H_0}$$



Rys.2. Rozkład czasowo – przestrzenny natężenia pola magnetycznego w przewodzącym wsadzie rurowym o charakterze sinusoidy tłumionej; $\alpha=6$, $\beta=0,8$, $\omega = \pi \cdot 10^4$ rad·s⁻¹, $\eta = 5 \cdot 10^3$ s⁻¹, $\gamma = 58 \cdot 10^6$ S·m⁻¹

LITERATURA

- [1] Dobrogowski J., Kołaczkowski Z., Tychowski F., Tłoczenie metali impulsowym polem magnetycznym, PWN, Warszawa Poznań 1979
- [2] Batygin Y., Daehn., The pulse magnetic fields for progressive technologies. Ohio State University., Kharkov – Columbus 1999
- [3] Bednarczyk J., Elektrodynamiczna obróbka metali, Wydawnictwa AGH, Kraków 2007
- [4] Bednarczyk J., Distributions of for ces in the inductors used in metal processing in the pulse magnetic field, Journal of Materials Processing Technology, 133(2003), pp.340-347
- [5] Borowik B., Odkształcenie wsadów rurowych wybranych materiałów w procesie elektrodynamicznego formowania metali, Przegląd Elektrotechniczny., 12b/2011 pp. 19-21
- [6] Tegopoulos J. Kriezis E., Eddy Currents in Linear Conducting Media. Elsevier., New York 1985
- [7] Piątek Z., Borowik B., Electromagnetic field in a cylindrical conductor in the process of metal forming using impulse magnetic field., XXVIII IC SPETO, 2005 pp. 43-46
- [8] Borowik B., Pole elektromagnetyczne, siły ponderomotoryczne, ciśnienie, energia i moc w rurowych wsadach przewodzących w procesie kształtowania impulsowym polem magnetycznym, Rozprawa doktorska, Częstochowa 2006
- [9] Osowski J., Zarys rachunku operatorowego, WNT, Warszawa 1965
- [10] McLachlan N., Funkcje Bessela dla inżynierów, PWN, Warszawa 1964

Autorzy: dr inż. Borys Borowik, Politechnika Częstochowska, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Informatyki, Instytut Technologii Mechanicznych, ul. Armii Krajowej 21, 42-200 Częstochowa, E-mail: borys_b@poczta.fm