

Model matematyczny układu elektromechanicznego z długim sprężystym wałem napędowym

Streszczenie. W pracy poddano analizie procesy elektromechaniczne w układzie napędowym o sprężystej transmisji ruchu rozpatrywanym jako układ o rozłożonych parametrach mechanicznych. Badany układ składa się z silnika indukcyjnego, który przekazuje ruch obrotowy poprzez długi sprężysty wał napędowy. Do wału podłączone są szeregowo w różnych jego punktach odbiorniki mocy mechanicznej. Do sformułowania różniczkowych równań stanu wykorzystano metodę, która opiera się na modyfikacji zasady Hamiltona.

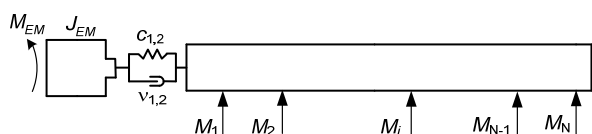
Abstract. In the paper the analysis of electromechanical processes in a drive system based on an elastic transmission of mechanical power is presented. The distributed mechanical parameters of the system are considered. The investigated system includes an induction motor, that transmits the mechanical power via a long elastic driving shaft. The mechanical loads are applied in series to the various points of the shaft. The method based on the modification of the Hamilton's principle are used in order to formulate the state differential equations. **(The mathematical model of electromechanical system with a long elastic shaft)**

Słowa kluczowe: zasada Hamiltona-Ostrogradskiego, Euler-Lagrange'a system, zespół elektryczny, transformator mocy

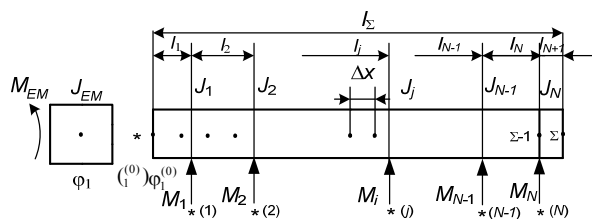
Keywords: Hamilton-Ostrogradsky's principle, Euler-Lagrange's system, electrical set, power transformer

Wstęp

W pracy poddano analizie układ napędowy z długim sprężystym elementem transmisji ruchu. Badany układ elektromechaniczny składa się z silnika indukcyjnego, który napędza długi wał, do którego przyłożono momenty obciążenia w różnych punktach na jego długości. Schemat ogólny analizowanego układu napędowego przedstawiono w rys.1, a obliczeniowy na rys. 2.



Rys. 1 Schemat ogólny układu napędowego



Rys. 2. Schemat obliczeniowy układu napędowego

Model matematyczny układu.

Dla sformułowania modelu matematycznego przedstawiono rozszerzony funkcjonal działania wg Hamiltona [1, 2]. Przyjęto następujące uogólnione współrzędne: ładunki elektryczne w uzwojeniach silnika – $q_{1-6} = Q_{1-6}$: $Q_{SA}, Q_{SB}, Q_{SC}, Q_{RA}, Q_{RB}, Q_{RC}$, kąty obrotu wirnika silnika oraz końca wału napędowego – $q_7 = \gamma_1$, $q_8 = \gamma_8 \equiv \varphi_1^{(1)}$, a także jako uogólnionych współrzędnych: kąty obrotu długiego wału napędowego $q_m(x, t) = \varphi_m(x, t)$, $m = 1, 2, \dots, N$. Jako uogólnionych prędkości – odpowiednio prądy w tych uzwojeniach $\dot{q}_{1-6}(t) = i_{1-6}(t)$ i prędkości kątowe wirnika oraz napędzanego mechanizmu, $\dot{q}_7 = \omega_1$, $\dot{q}_8 = \omega_8 \equiv \omega_1^{(1)}$, a także prędkości wału $\dot{q}_m(x, t) \equiv \partial q_m(x, t) / \partial t = \omega(x, t)$.

Zmodyfikowana funkcja Lagrange'a oraz jej gęstość liniowa przyjmują następującą postać [1 – 3]:

$$(1) \quad L = \tilde{T} - P + \Phi - D, \quad L_l = T_l - P_l + \Phi_l - D_l,$$

gdzie: L^* – zmodyfikowana funkcja Lagrange'a, L_l – gęstość liniowa zmodyfikowanej funkcji Lagrange'a \tilde{T}^* – koenergia kinetyczna, P^* – energia potencjalna, Φ^* – energia dyssypacji, D^* – energia niepotencjalnych sił zewnętrznych, T_l, P_l, Φ_l, D_l – gęstości wspomnianych funkcji. Elementy lagrangianu (1) opisują następujące zależności:

$$(2) \quad \tilde{T}^* = \sum_{j=1}^3 \left[\int_0^{i_{Sj}} \Psi_{Sj} di_{Sj} + \int_0^{i_{Rj}} \Psi_{Rj} di_{Rj} \right] + \frac{J_{EM} \omega_1^2}{2} + \frac{J_n (\omega_1^{(n)})^2}{2},$$

$$(3) \quad P^* = \frac{c_{1,2} (\varphi_1^{(0)} - \gamma_1)^2}{2}, \quad j = A, B, C,$$

$$(4) \quad \Phi^* = \sum_{j=1}^3 \int_0^t \frac{1}{2} (r_{Sj} i_{Sj}^2 + r_{Rj} i_{Rj}^2) d\tau + \int_0^t \frac{v_{1,2} (\omega_1^{(0)} - \omega_1)^2}{2} d\tau,$$

$$(5) \quad D^* = \sum_{j=1}^3 \int_0^t u_{Sj} i_{Sj} d\tau - \sum_{n=1}^N \int_0^t \int_0^{\omega_1^{(n)}} M(\omega_1^{(n)}) d\omega_1^{(n)} d\tau,$$

$$(6) \quad T_l = \frac{\rho J_p}{2} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} \right)^2, \quad P_l = \frac{G J_p}{2} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \right)^2, \quad \Phi_l = \int_0^{\xi} \frac{\xi}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x \partial t} \right)^2 d\tau,$$

gdzie S, R – indeksy stojana i wirnika, Ψ – całkowite sprzężenia magnetyczne, r_S, r_R – rezystancje uzwojenia stojana i wirnika maszyny, u_S – napięcie fazowe zasilania silnika, $\varphi(x, t)$ – kąty obrotu linii wału napędowego, $\omega(x, t) = \partial \varphi(x, t) / \partial t$ – prędkość kątowa linii wału, G – moduł sprężystości poprzecznej, ξ – współczynnik rozproszenia wewnętrznego, x – bieżąca współrzędna wzdłuż linii wału napędowego, ρ – gęstość materiału, J_p – biegunowy moment bezwładności.

Podstawiając zależności (2) – (5) do równania (1) i wyznaczając funkcjonal działania wg Hamiltona [1, 2] uzyskano wariację tego funkcjonału i przyrównano je do zera. Z uwzględnieniem jawnej niezależności między prędkościami uogólnionymi, oraz uwzględniając zależność opisującą moment elektromagnetyczny dla silnika indukcyjnego [1, 5]:

$$(7) \quad M_E = \frac{\partial \tilde{I}_E^*}{\partial \gamma_1}, \quad \frac{\partial}{\partial i_k} \int \Psi_k di_k = \Psi_k, \quad \frac{\partial}{\partial i_k} \int \Psi_m di_m = 0, \quad k \neq m,$$

a także wykorzystując twierdzenie o pochodnej całki za jej górnym brzegiem [1] otrzymano równania opisujące analizowany układ elektromechaniczny.

$$(8) \quad \frac{d\Psi_S}{dt} = \mathbf{u}_S - \mathbf{r}_S \mathbf{i}_S,$$

$$(9) \quad \frac{d\Psi_R^\Pi}{dt} = -\mathbf{u}_R^\Pi - \mathbf{r}_R \mathbf{i}_R^\Pi - \Omega_R \Psi_R^\Pi,$$

$$(10) \quad \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{J_{EM}} (c_{1,2}(\varphi_1^{(0)} - \gamma_1) + v_{1,2}(\omega_1^{(0)} - \omega_1) + M_{EM}),$$

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\xi}{\rho J_p} \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial x^2}.$$

Następnie, do równań (4) zapisano równania stacjonarnych powiązań między strumieniami skojarzonymi oraz prądami silnika [1]

$$(12) \quad \Psi_S = \alpha_{\alpha S}^{-1} \mathbf{i}_S + \Psi_S, \quad \Psi_R = \alpha_{\alpha R}^{-1} \mathbf{i}_R + \Psi_R,$$

$$\Psi_S = \tau^{-1} (\mathbf{i}_S + \mathbf{\Pi} \mathbf{i}_R), \quad L_m = \tau^{-1}, \quad \Psi_S = \mathbf{\Pi} \Psi_R,$$

gdzie: Ψ – macierz roboczych sprzężeń magnetycznych, L_m – indukcyjność magnesowania maszyny, τ – główna odwrotna statyczna indukcyjność.

Rozwiązując razem wyrażenia (4) i (8) otrzymano zależności opisujące prądy [1]

$$(13) \quad \frac{d\mathbf{i}_S}{dt} = \mathbf{A}_S (-\mathbf{u}_S - \mathbf{r}_S \mathbf{i}_S) + \mathbf{A}_{SR} (-\Omega \Psi_R - \mathbf{r}_{RL} \mathbf{i}_R),$$

$$(14) \quad \frac{d\mathbf{i}_R}{dt} = \mathbf{A}_{RS} (-\mathbf{u}_S - \mathbf{r}_S \mathbf{i}_S) + \mathbf{A}_R (-\Omega \Psi_R - \mathbf{r}_{RL} \mathbf{i}_R) + \Omega \mathbf{i}_R,$$

gdzie: $\mathbf{A}_S, \mathbf{A}_{SR}, \mathbf{A}_{RS}, \mathbf{A}_R$ – współczynniki zależne od indukcyjności rozproszenia i magnesowania silnika indukcyjnego, Ω – macierz prędkości kątowych [1].

Moment silnika indukcyjnego wyznaczono z zależności [1]:

$$(15) \quad M_{EM} = \sqrt{3} p_0 (i_{SB} i_{RA}^\Pi - i_{SA} i_{RB}^\Pi) / \tau,$$

gdzie p_0 – liczba par biegunów maszyny, τ – odwrotna statyczna indukcyjność maszyny.

Do równania (13) warunki brzegowe przyjmują postać (na podstawie rysunków 1, 2):

$$(16) \quad G J_p \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \xi \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + c_{1,2} (\gamma_1 - \varphi_1^{(0)}(t)) + v_{1,2} (\omega_1 - \omega_1^{(0)}(t)) = 0,$$

$$(17) \quad J_i \frac{d\omega_i}{dt} + G J_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=l_i-0} + \xi \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{x=l_i-0} + M_i = G J_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=l_i+0} + \xi \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{x=l_i+0}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N,$$

$$(18) \quad G J_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=l_k-0} + \xi \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{x=l_k-0} = 0.$$

Równania (11), (16) – (18) dyskretyzowano z wykorzystaniem metody prostych (różnic skończonych) [1] otrzymując:

$$(19) \quad \frac{d\omega_1^{(0)}}{dt} = \frac{2 [c_{1,2} (\gamma_1 - \varphi_1^{(0)}) + v_{1,2} (\omega_1 - \omega_1^{(0)})]}{\rho J_p \Delta x} - \frac{2 [J_p G (\varphi_1^{(0)} - \varphi_2^{(0)}) + \xi (\omega_1^{(0)} - \omega_2^{(0)})]}{\rho J_p (\Delta x)^2},$$

$$(20) \quad \frac{d\omega_1^{(i)}}{dt} = \frac{2 G J_p}{(\rho J_p (\Delta x) + 2 J_i) \Delta x} (\varphi_0^{(i)} - 2 \varphi_1^{(i)} + \varphi_2^{(i)}) + \frac{2 \xi}{(\rho J_p (\Delta x) + 2 J_i) \Delta x} (\omega_0^{(i)} - 2 \omega_1^{(i)} + \omega_2^{(i)}) - \frac{2 M^{(i)}}{\rho J_p (\Delta x) + 2 J_i},$$

$$(21) \quad \frac{d\omega_\Sigma^{(N)}}{dt} = \frac{2 [J_p G (\varphi_{\Sigma-1}^{(N)} - \varphi_\Sigma^{(N)}) + \xi (\omega_{\Sigma-1}^{(N)} - \omega_\Sigma^{(N)})]}{J_p \rho (\Delta x)^2},$$

$$(22) \quad \frac{d\omega_k}{dt} = \frac{G}{\rho (\Delta x)^2} (\varphi_{k-1} - 2 \varphi_k + \varphi_{k+1}) + \frac{\xi}{\rho J_p (\Delta x)^2} (\omega_{k-1} - 2 \omega_k + \omega_{k+1}), \quad k \neq i,$$

$$(23) \quad \frac{d\varphi_j}{dt} = \omega_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Pełnemu całkowaniu podlega układ równań różniczkowych: (10), (13), (14), (19) – (23) z uwzględnieniem wyrażenia (15).

Wyniki symulacji komputerowej.

Do analizy numerycznej został wykorzystany układ elektromechaniczny z rys. 1. Silnik indukcyjny o danych znamionowych: $P_H = 320$ kW, $U_H = 6$ kV, $I_H = 39$ A, $\omega_H = 740$ s⁻¹, $p_0 = 4$, $J_R = 49$ kgm² oraz parametrach $r_S = 1,27$ Ω , $R_{RL} = 0,21$ Ω , $\alpha_S = 38,9$ H⁻¹, $\alpha_{RL} = 70$ H⁻¹, $h = 0,038$ m, $l = 0,23$ m, $a = 0,005$ m, $J_{EM} = 49$ kgm². Krzywa magnesowania silnika dana jest w postaci: $\Psi_m = 12,4 \arctg(0,066 i_m)$. Parametry wału napędowego: $G = 8,1 \cdot 10^{10}$ N/m², $\rho = 7850$ kg/m³, $l_\Sigma = 4,5$ m, $d \in [16-25]$ cm, $\xi \in [5-15]$ Nm²·s, $\Delta x = 0,05$ m. Symulacja komputerowa została przeprowadzona dla czterech przypadków obliczeniowych w zależności od średnicy wału napędowego. Momenty obciążania trzech odbiorców były jednakowe i równe po 1,33 kNm.

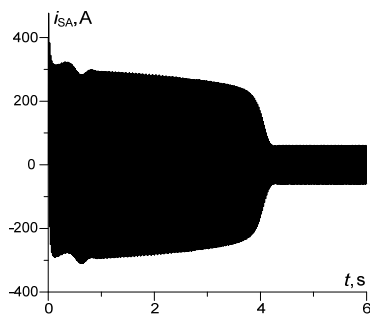
Obliczenia przeprowadzono dla średnic wału napędowego: I przypadek obliczeniowy - $d = 16$ cm, II - $d = 19$ cm, III - $d = 20$ cm i IV - $d = 25$ cm.

Na rysunkach 3, 4 przedstawiono przebiegi czasowe prądu fazy A stojana silnika indukcyjnego oraz jego moment elektromagnetyczny dla pierwszego przypadku obliczeniowego. Analizując te przebiegi widać całkowicie normalny stan pracy maszyny.

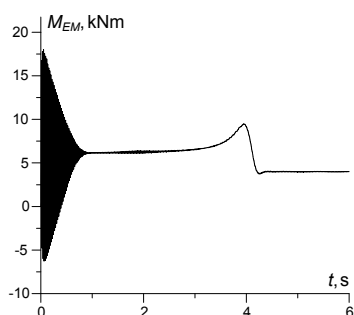
Na rysunkach 5, 6 przedstawiono przebiegi czasowe momentu sprężystości w przekrojach wału w węzłach dyskretyzacji o numerach 1, 2 oraz 71 – 72 dla pierwszego przypadku obliczeniowego symulacji komputerowej.

Wartości momentów znajdują się w zakresie momentów skrętnych typowych dla takiego wału napędowego.

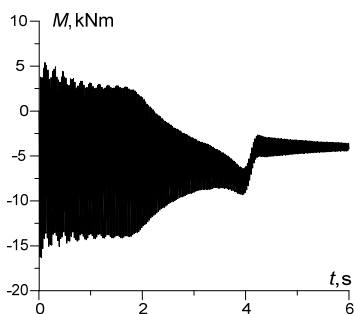
Rysunek 7 przedstawia czasowo-przestrzenny rozkład pola prędkości kątowej w linii wału napędowego dla pierwszego przypadku obliczeniowego w przedziale czasu $t \in [0; 0,06]$ s tzn. w pierwszym momencie rozruchu pracy układu.



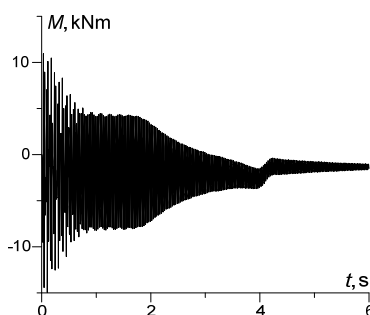
Rys. 3. Przebieg czasowy prądu fazy A stojana silnika dla pierwszego przypadku obliczeniowego



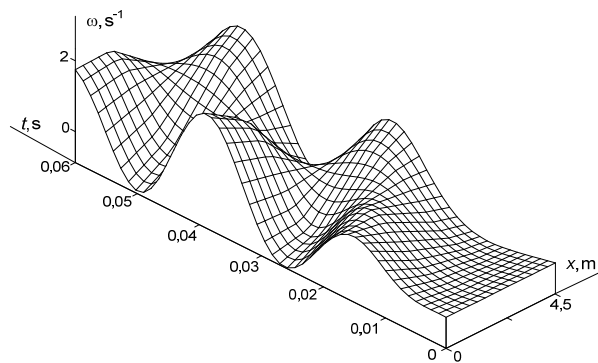
Rys. 4. Przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego silnika dla pierwszego przypadku obliczeniowego



Rys. 5. Przebieg czasowy momentu sprężystości w wale (punkty dyskretyzacji nr 1, 2) dla pierwszego przypadku obliczeniowego

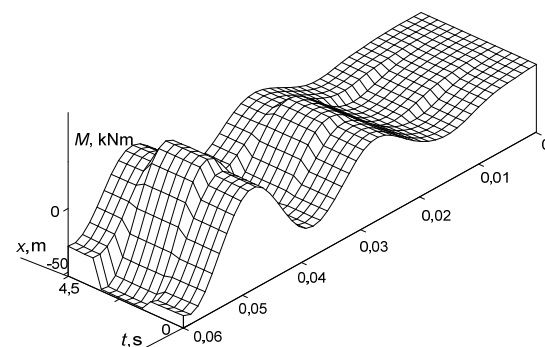


Rys. 6. Przebieg czasowy momentu sprężystości w wale (punkty dyskretyzacji nr 71, 72) dla pierwszego przypadku obliczeniowego

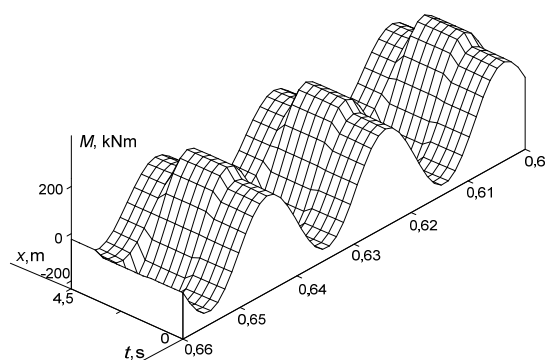


Rys. 7. Czasowo-przestrzenny rozkład pola prędkości kątowej w linii wałów dla pierwszego przypadku obliczeniowego w przedziale czasu $t \in [0; 0,06]$ s

Na rysunkach 8 – 9 przedstawiono czasowo-przestrzenny rozkład momentu sprężystości w linii wału dla trzeciego przypadku obliczeniowego w przedziale czasu $t \in [0; 0,06]$ oraz $t \in [0,6; 0,66]$ s. Tutaj widać trzy części wału napędowego, które odpowiadają trzem strefom odbioru mocy.

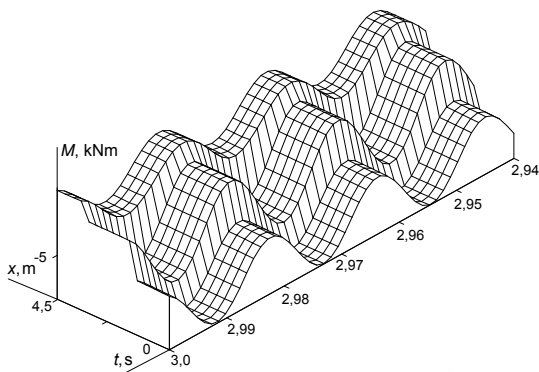


Rys. 8. Czasowo-przestrzenny rozkład pola mechanicznego momentu sprężystości w linii wałów dla drugiego przypadku obliczeniowego w przedziale czasu $t \in [0; 0,06]$ s

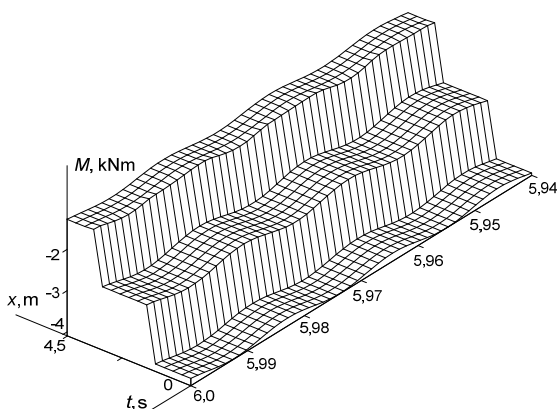


Rys. 9. Czasowo-przestrzenny rozkład momentu sprężystości w linii wałów dla drugiego przypadku obliczeniowego w przedziale czasu $t \in [0,6; 0,66]$ s

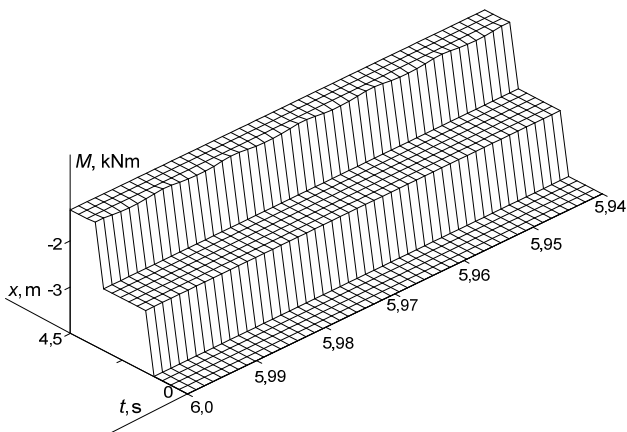
Rysunki 10 i 11 przedstawiają rozkłady czasowo-przestrzenne momentu sprężystości w wale napędowym dla trzeciego przypadku obliczeniowego symulacji komputerowej w przedziale czasu $t \in [2,94; 3,0]$ i $t \in [5,54; 6,0]$. Na rysunku 11 dobrze widać kwazi-ustalony stan układu, w którym trzy strefy odbioru mocy są jawnie uwidocznione.



Rys. 10. Czasowo-przestrzenny rozkład momentu sprężystości w linii wałów dla trzeciego przypadku obliczeniowego w przedziale czasu $t \in [2,94; 3,0]$ s



Rys. 11. Czasowo-przestrzenny rozkład momentu sprężystości w linii wałów dla trzeciego przypadku obliczeniowego w przedziale czasu $t \in [5,54; 6,0]$ s



Rys. 12. Czasowo-przestrzenny rozkład momentu sprężystości w linii wałów dla czwartego przypadku obliczeniowego w przedziale czasu $t \in [5,94; 6,0]$ s

Rysunek 12 przedstawia czasowo-przestrzenny rozkład momentu sprężystości w linii wału dla czwartego przypadku obliczeniowego w przedziale czasu $t \in [5,94; 6,0]$ s. W porównaniu do rozkładów w poprzednich przypadkach obliczeniowych widać praktycznie brak oscylacji zależności momentu, co wynika z dużej wartości średnicy wału jak również od współczynnika dyssypacji.

Wnioski

W artykule przedstawiono analizę pracę układu w stanach przejściowych podczas rozruchu i przy zmianie obciążenia w różnych punktach wału napędowego. Na podstawie uzyskanych wyników symulacji komputerowych dokonano analizy procesów elektromechanicznych zachodzących w elektrycznych układach napędowych z długimi elementami sprężystymi. Analiza ta pozwala na wyeliminowanie wielu problemów dotyczących układów napędowych z długimi sprężystymi wałami, już na etapie projektowania

Wykorzystanie rozszerzonego funkcjonatu dziania wg Hamiltona pozwoliło tworzyć modele matematyczne skomplikowanych układów elektromechanicznych, które opisuje się zarówno teorią pól (elektromagnetycznego i mechanicznego) oraz teorią obwodów, co w przypadku ogólnym pozwala formować równania stanu układu wyłącznie z jedynej koncepcji elektromechanicznego przetwarzania energii.

Na podstawie wyników symulacji komputerowej przedstawiono w pracy obraz ruchu fali sprężystej wzdłuż linii wału napędowego w formie czasowo-przestrzennych rozkładów zależności funkcyjnych.

LITERATURA

- [1] Czaban A., Modelowanie matematyczne procesów oscylacyjnych systemów elektromechanicznych. (Wydanie drugie, zmienione i uzupełnione). – Lwów 2008.
- [2] Czaban A., Rusek A., Wykorzystanie zasady Hamiltona-Ostrogradskiego dla modelowania matematycznego stanów asymetrycznych w głębokożłobkowym napędzie asynchronicznym // *Технічні вісти*. – 2011/1(33), 2(34). – С. 58 – 61.
- [3] Rusek A., Czaban A., Lis M., A Mathematical Model of a Synchronous Drive with Protrude Poles, An Analysis Using Variational Methods. SAEM'12. Digest Book of the 4th Symposium on Applied Electromagnetics. Ed. Miklos Kuczmann. June 3-6, 2012, Sopron, Hungary. s.79-80
- [4] Rusek A., Stany dynamiczne układów napędowych z silnikami indukcyjnymi specjalnego wykonania, Seria Monografie 228, *Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej*, Częstochowa 2012,
- [5] Lis M., Modelowanie matematyczne procesów przejściowych w elektrycznych układach napędowych o złożonej transmisji ruchu, *Seria monografie, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej*, Częstochowa 2013
- [6] Puchała A., Elektromechaniczne przetworniki energii, *BOBRME Komel*, Katowice 2002
- [7] Szewczyk K., Golisz R., Wałasek T., Kucharczyk Z., The influence of an air gap around the permanent magnets with the flux concentrator in Permanent Magnet Synchronous Motor with Internal Magnetic Circuits, *Zastosowania Elektromagnetyzmu w Nowoczesnych Technikach i Informatyce. XXI Sympozjum Środowiskowe PTZE*. 5-8 czerwca 2011. Lubliniec.

Autorzy: dr hab. inż. Andriy Czaban prof. PCz, Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, al. Armii Krajowej 17, E-mail: atczaban@gmail.com, dr hab. inż. Marek Lis Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, al. Armii Krajowej 17 lism@el.pcz.czest.pl, mgr inż. Andrzej Gastołek REVICO Płock (Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny), mgr inż. Jarosław Sosnowski REVICO Płock (Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny)