

Moce w komutowanych obwodach elektrycznych. Spektralne rozproszenie mocy.

Streszczenie. Autor opisuje definicje różnych rodzajów mocy elektrycznej w odniesieniu do prostego obwodu o zmiennej strukturze, w którym występuje zjawisko spektralnego rozproszenia mocy i konwersji mocy. Autor ilustruje względność pomiarów wielkości w obwodach elektrycznych. Wyjaśnia metodę analizy nieliniowych, komutowanych obwodów elektrycznych.

Abstract. The author interprets different types of electric power in relation to the circuit with alternating structure. The phenomena of spectral dispersion of energy (power) as well as the conversion of energy are described. The author illustrates relativity of measurement of electrical magnitudes in electrical circuits. The design principle for analysing the non-linear, electrically commutated circuits is also explained. (**Power in electrically commutated circuits - spectral dispersion of energy**)

Słowa kluczowe: moc czynna, moc bierna, moc deformacji, moc pozorną, spektralne rozproszenie mocy.

Keywords: active power, reactive power, distortion power, spectral distortion of power

Wstęp

Od lat elektrycy analizują obwody elektryczne na bazie modeli matematycznych. Podstawowym narzędziem do budowy modeli obwodów elektrycznych są układy równań różniczkowych. Rachunek operatorowy, pozwalający na algebraizację równań, dodatkowo wspiera proces analizy i projektowania obwodów. Przekształcenie Laplace'a i Fouriera przenoszą obszar opisu zjawisk i zależności z dziedziny czasu do dziedziny częstotliwości. Celem analizy obwodu staje się wówczas nie tylko określenie przebiegów czasowych badanych wielkości, jak to ma miejsce w dziedzinie czasu ale określenie ich zależności spektralnych.

W literaturze zajmującej się problematyką mocy w obwodach elektrycznych można spotkać wiele definicji różniących się co do interpretacji fizycznej definiowanych wielkości lub takiej interpretacji pozbawionych. W artykule skupiono uwagę na tych zależnościach teoretycznych, które są istotne dla właściwej interpretacji wielkości mocy i pozwalają weryfikować wyniki badań. Zdefiniowano moc całkowitą w dziedzinie częstotliwości. Pokazano różnicę pomiędzy tak zdefiniowaną mocą całkowitą a mocą pozorną. Pokazano różnicę pomiędzy mocą bierną a mocą reaktancyjną będącą iloczynem funkcji czasu napięcia i prądu na elementach reaktancyjnych.

Podano także zależności splotowe na moc czynną i moc reaktancyjną w dziedzinie częstotliwości. Podano przykład prostego obwodu elektrycznego dla zilustrowania omawianych związków.

W części tej skupiono się na analizie spektralnej prostych obwodów komutowanych, pozwalającej bardzo przejrzysto zilustrować omawiane zjawiska. Wnioski z przedstawionej analizy pozwalają uprościć proces projektowy a także są mocnym wsparciem interpretacji fizycznej otrzymywanych zależności. Pozwalają także na wykorzystanie efektywnych metod analizy i symulacji obwodów w dziedzinie częstotliwości.

Zależności energetyczne. Definicje mocy.

Podstawowe prawa elektrotechniki mają swoje źródło w równaniach Maxwella opisujących pole elektromagnetyczne. Tak jak twierdzenie Gaussa związane jest z pierwszym prawem Kirchhoffa, tak pojęcie energii i mocy w obwodzie elektrycznym są związane z twierdzeniem Poyntinga. Odpowiednikiem w elektrotechnice jest twierdzenie Tellegena. Zależności energetyczne poddawane są analizie przez różnorodne teorie mocy. Obserwuje się mnogość interpretacji i podejść do

zagadnienia przepływu energii w obwodach elektrycznych w oderwaniu od fizyki zjawisk jakie w nich zachodzą.

Wyróżnia się zwykle moc pozorną S , moc czynną P , bierną Q .

Moc pozorną:

$$(1) \quad S = \|U\| \cdot \|I\|$$

Moc czynną:

$$(2) \quad P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt = \|U_p\| \cdot \|I_p\|$$

Moc bierną:

$$(3) \quad Q = \|U_q\| \cdot \|I_q\|$$

W powyższych wzorach wartości w nawiasach $\| \cdot \|$ odpowiadają wartościom skutecznym napięć i prądów.

Można wyróżnić dwa podstawowe nurty analizy w dziedzinie czasu (Fryze) i częstotliwości (Budeanu) oraz szeregu koncepcji innych autorów w których analiza w obu dziedzinach pojawia się łącznie. Fryze w swoich pracach zwrócił uwagę na fakt iż jego podział na moc czynną i bierną nie odpowiada fizyce zjawisk zachodzących w obwodach elektrycznych, w których występuje element kluczujący.

Budeanu do wzoru na moc jako sumy P i Q dodał moc deformacji D . Spełniają one równanie bilansu mocy:

$$(4) \quad S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$$

W dalszej części artykułu autor wyjaśnia na przykładach zależności energetyczne. Przyjmuje w swych rozważaniach całkowitą zgodność definicji i zjawisk w dziedzinie czasu i częstotliwości. Wszystkie wielkości wiążą się ściśle z fizycznymi wielkościami występującymi w modelach obwodów elektrycznych.

Dziedzina czasu i dziedzina częstotliwości

Jednym z podstaw związków obu dziedzin jest zależność wynikająca ze wzoru Grinberga [5].

$$(5) \quad \begin{aligned} L\{g(t) \cdot f(t)\} &= G(s) * F(s) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty G(\gamma) \cdot F(s-\gamma) d\gamma \Big|_{s=j\omega} = \\ &= G(j\omega) * F(j\omega) \end{aligned}$$

Duża litera L oznacza transformatę Laplace'a.

Wzór ten wiąże transformatę iloczynu dwóch funkcji w czasie $f(t)$ i $g(t)$ ze splotem ich transformat w dziedzinie

częstotliwości. Zachodzi także zależność odwrotna. Iloczyn funkcji częstotliwości odpowiada splotowi funkcji czasu.

We wzorach prezentowanych w niniejszej pracy od transformaty Laplace'a wymaga się założenia jej realizowalności. Wzory przedstawiane są od bardziej ogólnego dla zmiennej zespolonej s . Następnie wzór ograniczony jest do funkcji dla $j\omega$ oznaczających ciągłą funkcję częstotliwości. Ta postać wzoru jest uzupełniona dodatkowo postacią wzoru dla $\omega \rightarrow n\omega$ w przypadku zależności okresowych, dla przebiegów o ograniczonej mocy, korzystających do opisu funkcji z szeregów. Autor skupia się na zaprezentowaniu obwodów z przebiegami okresowymi w stanie ustalonym. Brak precyzyjnego przejścia pomiędzy $s \rightarrow j\omega \rightarrow n\omega$ we wzorach wynika wyłącznie z zamiaru uproszczenia opisu w celu zwiększenia przejrzystości tekstu. Przejście $s \rightarrow j\omega \rightarrow n\omega$ i ograniczenia stosowania poszczególnych postaci zależności jest szeroko omówione w [5].

Istotne jest rozróżnienie pomiędzy wartością funkcji w punkcie a przebiegiem funkcji. W pracy tylko w szczególnych przypadkach, wyraźnie wyróżnionych, autor odwołuje się do wartości funkcji w punkcie. Wzory odnoszą się do przebiegów funkcji [4].

Jeżeli obwód zasilimy ze źródła prądu, zmiana oznaczeń napięcia i prądu nie zmienia charakteru powyższych wzorów. W literaturze iloczyn chwilowych wartości napięcia i prądu nazywany jest mocą chwilową. W artykule autor wprowadza określenie mocy całkowitej, które oddaje sens fizyczny iloczynu wartości chwilowych w dziedzinie czasu, a w dziedzinie transformat nie kojarzy się z transformatą odwrotną mocy w dziedzinie czasu.

$$(6) \quad \begin{aligned} L\{s(t)\} &= L\{u(t) \cdot i(t)\} = U(s) * I(s) \Big|_{s=j\omega} = \\ &= U(\omega) * I(\omega) = U(n\omega) * I(n\omega) \end{aligned}$$

Jest to definicja mocy całkowitej, często przywoływanej w prezentowanych zależnościach.

Można dokonać podziału mocy całkowitej na część związaną z utratą energii przez układ i na część związaną z jej oscylacjami w obwodzie, spowodowanymi zmianami energii pola elektromagnetycznego zmagazynowanej przez elementy reaktancyjne. Podział taki ściśle odpowiada fizyce zjawisk w obwodzie. Wydzielenie z przebiegu $s(t)$ części związanej ze zmianami mocy czynnej jest stosunkowo proste a interpretacja zależności z tym związanych nie budzi kontrowersji. Znacznie więcej wątpliwości pojawia się z ortogonalną do niej częścią reaktancyjną. Przebieg w czasie iloczynu napięcia i prądu w obwodzie możemy przedstawić następująco:

$$(7) \quad \begin{aligned} s(t) &= u(t) \cdot i(t) = s(t) = p(t) + q(t) = \\ &= u_p(t) \cdot i_p(t) + u_q(t) \cdot i_q(t) \end{aligned}$$

Uwzględniając 5)

$$(8) \quad \begin{aligned} L\{p(t)\} &= L\{u_p(t) \cdot i_p(t)\} = U_p(s) * I_p(s) = \\ &= U_p(\omega) * I_p(\omega) = U_p(n\omega) * I_p(n\omega) = P(\omega) \end{aligned}$$

Funkcja $p(t)$ opisuje przebieg mocy związany z utratą energii w układzie. Funkcja $q(t)$ opisuje zmianę energii (moc) w elementach reaktancyjnych obwodu.

$$(9) \quad \begin{aligned} L\{q(t)\} &= L\{u_q(t) \cdot i_q(t)\} = U_q(s) * I_q(s) = \\ &= U_q(\omega) * I_q(\omega) = U_q(n\omega) * I_q(n\omega) = Q(\omega) \end{aligned}$$

Podział mocy zgodnie ze wzorem 7) jest jednoznaczny w obwodach najprostszych do analizy, stacjonarnych, skupionych. Przebieg $p(t)$ odpowiada przebiegowi napięcia i prądu na elemencie rezystancyjnym a przebieg $q(t)$,

iloczynowi napięcia i prądu na elemencie reaktancyjnym (rys 3) i (rys.7). Podział na $p(t)$ oraz $q(t)$ nie jest „widoczny” po stronie źródła zasilania w przypadku obwodu komutowanego, w którym zachodzi zjawisko konwersji mocy (energii) jak ma to miejsce w układach omawianych w artykule. Autor stosuje rozróżnienie mocy reaktancyjnej i mocy biernej w odniesieniu do opisywanych obwodów. Moc reaktancyjna to wyłącznie moc elementu reaktancyjnego, a moc bierna to moc, dana wzorem 3).

Zasada zachowania mocy całkowitej.

Twierdzenie Tellegena.

Analiza stanu ustalonego modelu o przebiegach okresowych pozwala w okresie zbilansować moce a zasadę zachowania energii można sformułować jako zasadę zachowania mocy. Należy podkreślić iż modele obwodów elektrycznych zwykle są uproszczone w sposób, który pomija takie zjawiska jak emisja elektromagnetyczna a w przypadku modeli opisanych w pracy także zakłada się idealny proces komutacji.

Zasada zachowania mocy całkowitej obwodu może być sformułowana następująco (twierdzenie Tellegena):

„Suma mocy chwilowych wszystkich elementów obwodu jest równa zeru”

Ograniczając się do obwodów o strukturze, w której możemy wyróżnić zaciski w taki sposób, że rozcięcie poprowadzone przez te zaciski podzieli obwód na dwa podobwoły nie wymieniające energii inaczej jak poprzez wyróżnione zaciski, możemy napisać:

„W dowolnej chwili moc całkowita w obwodzie $s(t)=u(t)i(t)$ jest taka sama po obu stronach dowolnego rozcięcia, dzielącego obwód na dwa podobwoły”.

Dla opisu w dziedzinie czasu w odniesieniu do mocy

$$(10) \quad s_{we}(t) = s_{wy}(t)$$

$$(11) \quad p_{we}(t) + q_{we}(t) = p_{wy}(t) + q_{wy}(t)$$

W obwodzie może zachodzić konwersja energii. Wówczas istnieją takie przedziały czasu w których w chwili $t=t_0$:

$$(12) \quad p_{we}(t_0) \neq p_{wy}(t_0)$$

$$(13) \quad q_{we}(t_0) \neq q_{wy}(t_0)$$

Powyższe stwierdzenie jest oczywiste jeżeli obwód analizujemy w dziedzinie czasu. Analiza w dziedzinie częstotliwości dotyczy zwykle określonego przedziału T , okresu zmienności funkcji opisujących stan obwodu.

Zasadę zachowania (energii) mocy całkowitej obwodu w stanie ustalonym można uogólnić na dziedzinę częstotliwości i wówczas może ona przyjąć następujące brzmienie:

„Moc całkowita w obwodzie $s(t)=u(t) \cdot i(t)$ w dziedzinie czasu oraz $S(\omega)=U(\omega) \cdot I(\omega)$ w dziedzinie częstotliwości jest taka sama po obu stronach dowolnego rozcięcia, dzielącego obwód na dwa podobwoły”.

Konsekwencją powyższego stwierdzenia są także zależności: W odniesieniu do mocy, na podstawie 5):

$$(14) \quad S_{we}(s) = S_{wy}(s)$$

Konsekwencją równości transformat jest równość ich części rzeczywistej i urojonej.

$$(15) \quad \text{real}S_{we}(s) = \text{real}S_{wy}(s)$$

$$\text{imag}S_{we}(s) = \text{imag}S_{wy}(s)$$

Z równości transformat 11) wynika także:

$$(16) \quad P_{we}(\omega) + Q_{we}(\omega) = P_{wy}(\omega) + Q_{wy}(\omega)$$

Dla przebiegów w układach, w których zachodzi przemiana energii może zachodzić dodatkowo:

$$(17) \quad P_{we}(\omega) \neq P_{wy}(\omega)$$

$$(18) \quad Q_{we}(\omega) \neq Q_{wy}(\omega)$$

Dzieje się tak gdyż w układzie z konwersją energii chwilowe moce czynna i reaktancyjna (dla określonego t) nie są równe (12) i (13). Nie oznacza to iż nie jest spełniona zasada zachowania energii. Energia w obwodzie uśredniana jest przez czas po jakim całkujemy przebieg dokonując obliczeń transformaty.

Mamy zatem z twierdzenia Parsevala[5], wynikającego ze wzoru Rayleigha [7]:

$$(19) \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot i(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \cdot I(-\omega)d\omega = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \cdot I(0-\omega)d\omega = [U * I](0) = S(0) = P(0)$$

Wyrażenie w nawiasach kwadratowych to zerowy element splotu spektrów napięcia i prądu. Dla przebiegów okresowych:

$$(20) \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)dt = P(0)$$

Wynikiem jest składowa zerowa spektrum mocy, odpowiadająca średniej wartości mocy czynnej obwodu. W przypadku przebiegów okresowych jest ona równa mocy czynnej ze wzoru 1). Przejście $S(0)$ do $P(0)$ jest wynikiem rozłożenia przebiegu $s(t)$ wg wzoru 6) i scałkowania go wg. 17) . Otrzymamy niezerową wartość całki tylko dla $p(t)$: (Dodatek I).

Bilans mocy.

Bilans mocy możemy, dla definicji mocy ze wzoru (7) przedstawić w postaci, wynikającej wprost ze wzoru Parsevala. Jeżeli za całkowany przebieg przyjmiemy przebieg mocy całkowitej (Dodatek II):

$$(21) \quad \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = S^2 = P^2 + Q^2 = \\ = \|U\|^2 \cdot \|I\|^2 = \|U\|_p^2 \cdot \|I\|_p^2 + \|U\|_q^2 \cdot \|I\|_q^2$$

Wielkość po prawej stronie wzoru to funkcja autokorelacji przebiegu mocy całkowitej, równa sumie autokorelacji przebiegu mocy czynnej i autokorelacji przebiegu mocy reaktancyjnej (Dodatek III). Otrzymamy:

$$(22) \quad S^2 = [S * S](0) = \sum_n |S|^2(n\omega)$$

Zespolony szereg można przedstawić także w postaci [5],[7]:

$$(23) \quad \sum_n |S|^2(n\omega) = \sum_n [(realS(n\omega))^2 + (imagS(n\omega))^2]$$

Porównanie 21) i 23) nie oznacza równości mocy czynnej i rzeczywistej składowej mocy całkowitej oraz mocy reaktancyjnej i części urojonej mocy całkowitej. Zwykle takiej równości wielkości mocy nie spełniają.

Przez odpowiedni dobór funkcji opisujących obwód można uzyskać równość tych wielkości, ale są to przypadki szczególne, wykorzystujące szczególne symetrie funkcji opisujących obwód. Przypadek taki zaprezentowano w dalszej części artykułu.

Zależności 22) jest ilustracją zasadności wyróżnienia mocy całkowitej i odróżnienia jej od mocy pozornej. Moc pozorna :

$$(24) \quad S = \sqrt{[S * S](0)} = \|U\| \cdot \|I\|$$

jest pierwiastkiem kwadratowym z wartości autokorelacji przebiegu mocy całkowitej. Jest wartością liczbową .Nie jest funkcją. Moc całkowita jest funkcją zmiennej zespolonej w dziedzinie częstotliwości lub bardziej ogólnie dystrybucją.

Nierówność Schwarz

Zachodzą także związki :

$$(25) \quad \|u(t) \cdot i(t)\| \leq \|u(t)\| \cdot \|i(t)\| \\ \|U(\omega) * I(\omega)\| \leq \|U(\omega)\| \cdot \|I(\omega)\|$$

zwane nierównościami Schwarz.

Wstawiając do nich zależności na moc całkowitą i moc pozorną otrzymamy:

$$(26) \quad \|U(\omega) * I(\omega)\| = S(0) = P \leq S = \sqrt{[S * S](0)} = \|U(\omega)\| \cdot \|I(\omega)\|$$

ilustrującą wzajemną relację obu pojęć.

Zachodzi także:

$$(27) \quad \|U_p(\omega) * I_p(\omega)\| = P = \sqrt{[P * P](0)} = \|U_p(\omega)\| \cdot \|I_p(\omega)\|$$

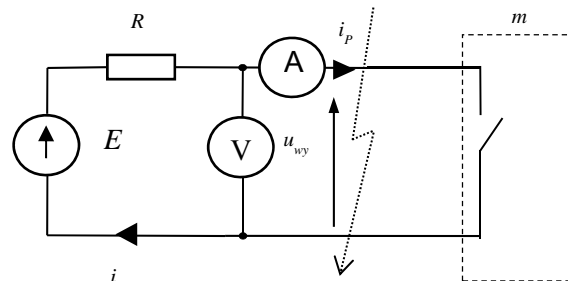
oraz:

$$(28) \quad \|U_q(\omega) * I_q(\omega)\| = Q(0) = 0 < \sqrt{[Q * Q](0)} = \|U_q(\omega)\| \cdot \|I_q(\omega)\|$$

Z ostatniej zależności wynika , iż moc bierna Q (wzór 3) to pierwiastek z wartości autokorelacji przebiegu $q(t)$.

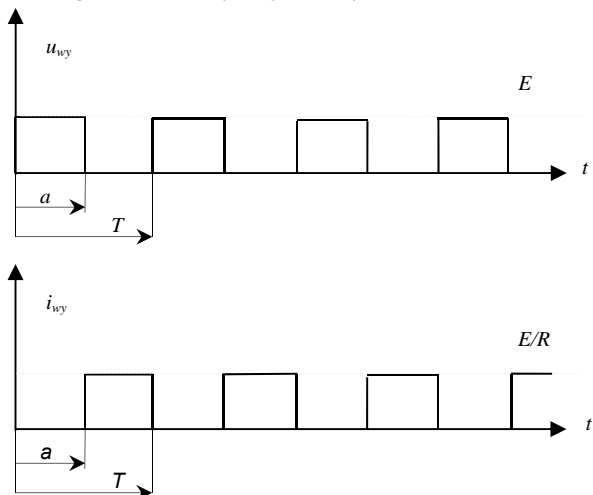
Neutralność energetyczna układów kluczujących.

Przy założeniu idealnej komutacji ,w modelach przekształtników nie jest w nich tracona ani nie jest magazynowana energia.



Rys. 1. Układ rezystancyjny z łącznikiem m.

Przyjęcie założenia o neutralności energetycznej nie jest oczywiste jeżeli przytoczyć tu przykład z publikacji Fryzego. Nie jest to oczywiste jeżeli rozpatrujemy układ, w którym mierzymy wartości skuteczne napięcia i prądu, o przebiegach okresowych jak na rys.2.



Rys.2 Okresowe przebiegi napięcia i prądu komutatora m, w układzie z rys.1.

$$(29) \quad u_{wy}(t) = m(t) \cdot E$$

$$(30) \quad i_{wy}(t) = [1(t) - m(t)] \cdot \frac{E}{R}$$

$$(31) \quad \|U_{wy}\| = \frac{aE}{T} > 0$$

$$(32) \quad \|I_{wy}\| = \frac{aE}{TR} > 0$$

Wzór na moc pozorną da wynik większy od zera :

$$(33) \quad S = \|U_{wy}\| \cdot \|I_{wy}\| = \frac{a^2 E^2}{T^2 R} > 0$$

sugerujący przepływ energii do obwodu z łącznikiem, który nie magazynuje, nie traci i nie dostarcza, żadnego rodzaju energii. Jeżeli jako moc w łączniku m przyjmie się iloczyn napięcia i prądu w dziedzinie czasu to w dziedzinie częstotliwości otrzymamy:

$$(34) \quad \begin{aligned} L\{s(t)\} &= L\{u_{wy}(t) \cdot i_{wy}(t)\} = \\ &= L\{u_{wy}(t) \cdot i_{wy}(t)|_{t=0-a} + u_{wy}(t) \cdot i_{wy}(t)|_{t=a-T}\} = \\ &= L\{0\} + L\{0\} = 0 \end{aligned}$$

Zatem także składowa zerowa mocy całkowitej $S(0)=0$.

Ten prosty przypadek obwodu rezystancyjnego z łącznikiem jest jednocześnie doskonałą ilustracją różnicy pomiędzy mocą całkowitą a mocą pozorną zdefiniowaną jako iloczyn wartości skutecznych napięcia i prądu. Moc całkowita $S(\omega)$ jest wielkością fizyczną odpowiadającą mocy chwilowej, a moc pozorna jest wielkością obliczeniową.

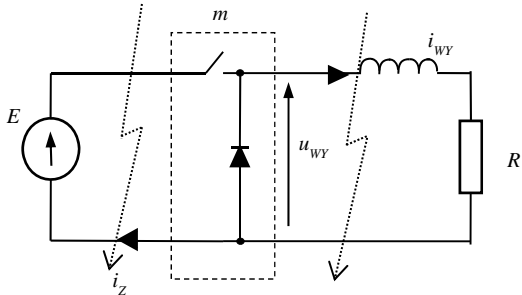
Przekształtnik jak na rys.1, opisany funkcją stanu $m(t)$ jest energetycznie neutralny.

Oba rozcięcia zaznaczone strzałkami przerywanymi można „złożyć”, tzn. przebieg napięcia i prądu zastąpić iloczynem napięcia i prądu wejściowego z funkcją łączeń.

Wpływ przekształtnika na moc całkowitą zostanie opisany przy okazji opisu zjawiska spektralnego rozpraszania mocy.

Zjawisko spektralnego rozproszenia mocy.

Zjawisko spektralnego rozproszenia mocy jest bardzo istotne dla opisu zależności energetycznych w obwodach komutowanych i innych w których mamy do czynienia z elementami, opisanymi nieliniowymi zależnościami napięcie-prąd.

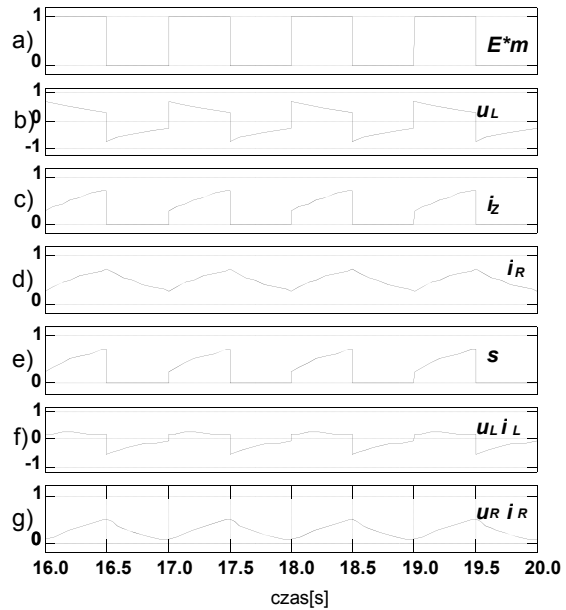


Rys. 3. Przerwywak okresowy zasilany ze źródła napięcia stałego z odbiornika typu RL.

Zjawisko to występuje we wszystkich układach komutowanych, prostownikach sterowanych i niesterowanych, w układach generatorów drgań z elementami nieliniowymi. Zostanie ono zilustrowane na przykładzie układu z rys. 3.

Funkcję stanu przerwywacza możemy przedstawić jak na rys. 4.a) Przebiegi charakterystycznych wielkości w układzie przedstawiono na rys. 4.b-g.

Tworzenie równań opisujących obwód komutowany w dziedzinie częstotliwości w stanie ustalonym (badany okres T) polega na zastąpieniu iloczynu w dziedzinie czasu splotem funkcji w dziedzinie częstotliwości (wzór 5).



Rys. 4. Przebiegi charakterystycznych wielkości w układzie. Od góry:

- napięcie wyjściowe, napięcie diody zwrotnej
- napięcie indukcyjności
- prąd źródła
- prąd rezystancji obciążenia, prąd indukcyjności
- przebieg mocy całkowitej
- przebieg mocy reakcyjnej indukcyjności
- przebieg mocy czynnej rezystancyjnej

Na rysunku zilustrowano zależność:

$$(35) \quad \begin{aligned} s_{we}(t) &= E \cdot i_z(t) = \\ &= u_R(t) \cdot i_{wy}(t) + u_L(t) \cdot i_{wy}(t) = \\ &= p_{wy}(t) + q_{wy}(t) = s_{wy}(t) \end{aligned}$$

Zjawisko rozproszenia spektralnego mocy (energii) w omawianym układzie następuje na skutek łączenia przekształtnika opisanego funkcją stanu $m(t)$. Na rys.4 odpowiada ona przebiegowi napięcia na wyjściu przekształtnika (diody zwrotnej).

$$(36) \quad M(n\omega) = \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi \frac{a}{T})$$

Napięcie u_{wy} ma identyczne spektrum jak funkcja stanu m .

Poszczególne amplitudy tego napięcia opisane są zależnościami:

$$(37) \quad U_{wy}(n\omega) = E(n\omega) * M(n\omega)$$

Napięcie zasilające w analizowanym obwodzie jest stałe. Splot zastępujemy iloczynem:

$$(38) \quad U_{wy}(n\omega) = E \cdot M(n\omega)$$

Napięcie to przyłożone do liniowego obwodu RL wywoła w nim przepływ prądu opisany wzorem:

$$(39) \quad I_{wy}(n\omega) = E \cdot M(n\omega) \cdot Y(n\omega)$$

gdzie

$$(40) \quad Y(n\omega) = \frac{1}{R + jn\omega L}$$

Moc całkowita, wyjściowa wynosi:

$$(41) \quad \begin{aligned} S_{wy}(\omega) &= U_{wy}(\omega) * I_{wy}(\omega) = \\ &= E \cdot M(n\omega) * [E \cdot M(n\omega) \cdot Y(n\omega)] \end{aligned}$$

Prąd wyjściowy I_{wy} poprzez przekształtnik splatany jest z funkcją stanu M dając w wyniku prąd źródła I_z . Wynika to wprost ze związku

$$(42) \quad i_z(t) = m(t) \cdot i_{wy}(t)$$

Otrzymamy zatem

$$(43) \quad I_z(n\omega) = M(n\omega) * I_{wy}(n\omega) = \\ = M(n\omega) * [E \cdot M(n\omega) \cdot Y(n\omega)]$$

Całkowita moc źródła napięcia stałego wynosi:

$$(44) \quad S_{we}(n\omega) = EI_z(n\omega) = E \cdot M(n\omega) * [E \cdot M(n\omega) \cdot Y(n\omega)] = \\ = [M(n\omega)] * [M(n\omega) \frac{E^2}{R + jn\omega L}] = S_{wy}(n\omega)$$

Gdy M jest funkcją rzeczywistą możemy z ostatniej zależności wydzielić część rzeczywistą i urojoną:

$$(45) \quad S_{we}(n\omega) = EI_z(n\omega) = E \cdot M(n\omega) * [E \cdot M(n\omega) \cdot Y(n\omega)] = \\ = M(n\omega) * M(n\omega) \cdot [\frac{E^2 R}{R^2 + (n\omega L)^2} + jn\omega \frac{E^2 L}{R^2 + (n\omega L)^2}] = \\ = P_{we}(n\omega) + j \cdot Q_{we}(n\omega)$$

gdzie :

$$(46) \quad P_{we}(n\omega) = M(n\omega) * [M(n\omega) \cdot \frac{E^2 R}{R^2 + (n\omega L)^2}] = P_{wy}(n\omega)$$

$$Q_{we}(n\omega) = M(n\omega) * [M(n\omega) \cdot \frac{E^2 n\omega L}{R^2 + (n\omega L)^2}] = Q_{wy}(n\omega)$$

Dla zilustrowania zjawiska przyjęto wartość $a=1/2$.

Ze spektrum tej funkcji znikną harmoniczne parzyste.

$$(47) \quad M(n\omega) = \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi \frac{a}{T}) = \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi \frac{1}{2}) = \\ = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ \pm \frac{2}{n\pi} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

Te same harmoniczne nie pojawią się także w prądzie części RL obwodu. Ale ponowne splecenie prądu wyjściowego uwidoczni je w prądzie źródła zgodnie z zależnością 43). Przykładowe spektra wielkości opisujących obwód przedstawiono na rys.6. Przebiegi a) b) c) ilustrują separowanie spektrów w przypadku gdy w funkcji modulującej, kluczującej $m(t)$ nie występują harmoniczne parzyste. Dla wykresów rys.5. i rys.6.a) b) c) mamy $\omega L \ll R$ wzory, przyjmijmy postać:

$$(48) \quad I_{wy}(n\omega) = \begin{cases} \frac{E}{2R} & n=0 \\ 0 & n \text{ - parzyste} \\ \pm \frac{2E}{n\pi R} & n \text{ - nieparzyste.} \end{cases}$$

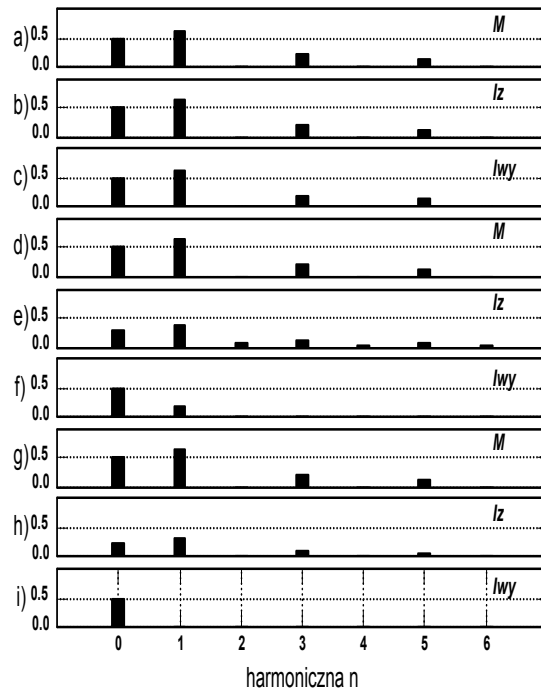
$$(49) \quad I_z(n\omega) = \frac{E}{R} [M(n) * M(n)]$$

Funkcja w nawiasie to funkcja korelacji $m(t)$. Na rys.6 przedstawiono odpowiadające przebiegom z rys.5 spektra mocy.

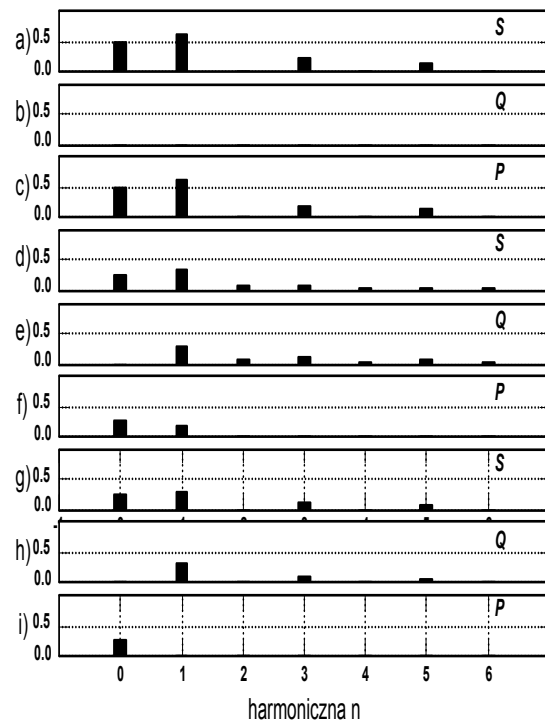
$$(50) \quad S_{we}(n\omega) = E \cdot I_z(n\omega) = \frac{E^2}{R} M(n) * M(n)$$

Zależność powyższa pokazuje iż element kluczujący, opisany funkcją stanu $M(n)$ jest odpowiedzialny za rozproszenie mocy E^2/R na harmoniczne określone przez $M(n)$ rys.5 i rys.6. a) b) c).

Kolejny przykład dla $\omega L \approx R$ rys.5 i rys.6 d)e)f) pokazuje iż element reaktancyjny wprowadza w układ dodatkowe harmoniczne parzyste. Jest zatem odpowiedzialny za pojawienie się tych harmonicznych, które eliminowała funkcja $m(t)$. Jest to jednocześnie ilustracja występowania dodatkowych harmonicznych w przebiegach mimo zastosowania tzw. "metody eliminacji harmonicznych" do tworzenia przebiegu $m(t)$ w celu ich usunięcia.



Rys. 5. Spektra charakterystycznych przebiegów z rys.1 dla $R=1$ $L=0.01$ a),b),c), $R=1$ $L=0.51$ d),e),f) oraz $R=1$ $L=10$ g),h),i) przy $f=1\text{Hz}$



Rys.6. Odpowiadające przebiegom z rys.6 spektra mocy S_{we}, Q_{wy}, P_{wy} odpowiednio dla $R=1$ $L=0.01$ a),b),c), $R=1$ $L=0.51$ d),e),f) oraz $R=1$ $L=10$ g),h),i) przy $f=1\text{Hz}$

W [13] zaprezentowano układ umożliwiający bezpośrednie tłumienie harmonicznych. Korygujący aktywnie wybrane częstotliwości niezależnie od funkcji łaczeń.

Jeżeli $\omega L \gg R$ (rys.5 i rys. 6 g)h)) w obwodzie wyjściowym tracona jest energia związana z przepływem ustalonej wartości prądu obciążenia. Dla pozostałych harmonicznych mamy do czynienia praktycznie wyłącznie z mocą reaktancyjną.

Arytmetyka harmonicznych. Konwersja energii (mocy).

Ze źródła napięcia stałego pobierana jest energia (moc) o wartości równej $s(t)$. Jest to suma mocy traconej w rezystancji $p(t)$ i mocy związanej z magazynowaniem energii w polu magnetycznym $q(t)$.

Zasada zachowania mocy w czasie 10) i jej równość transformat w dziedzinie zespolonej 14) pozwala wprowadzić prostą arytmetykę harmonicznych przebiegów mocy w dziedzinie zespolonej.

Jeżeli przebieg $s(t)$ podzielimy na dwa przebiegi $s(t=0-a)$ i $s(t=a-T)$

$$(51) \quad s(t)|_{t=0-T} = s(t)|_{t=0-a} + s(t)|_{t=a-T}$$

to wprost z definicji transformaty.

$$(52) \quad S(\omega)|_{t=0-T} = S(\omega)|_{t=0-a} + S(\omega)|_{t=a-T}$$

Bilans mocy dla obwodu z rys.3, możemy opisać :

$$S_{we}(\omega)|_{t=0-T} = S_{wy}(\omega)|_{t=0-T}$$

$$(53) \quad S_{we}(\omega)|_{t=0-a} + S_{we}(\omega)|_{t=a-0} =$$

$$S_{wy}(\omega)|_{t=0-a} + S_{wy}(\omega)|_{t=a-0}$$

W czasie $a-T$ nie jest pobierana energia ze źródła.

$$(54) \quad S_{we}(\omega)|_{t=0-T} = S_{we}(\omega)|_{t=0-a}$$

W tym samym czasie ($a-T$) po stronie odbiornika energia zmagazynowana w indukcyjności jest wydzielana w postaci ciepła na rezystancji odbiornika.

$$(55) \quad S_{wy}(\omega)|_{t=a-T} = P_{wy}(\omega)|_{t=a-T} + Q_{wy}(\omega)|_{t=a-T} = 0$$

$$(56) \quad Q_{wy}(\omega)|_{t=a-T} = -P_{wy}(\omega)|_{t=a-T}$$

możemy zatem zbilansować harmoniczne:

$$(57) \quad \begin{aligned} S_{we}(\omega)|_{t=0-T} &= S_{we}(\omega)|_{t=0-a} = \\ S_{wy}(\omega)|_{t=0-a} + S_{wy}(\omega)|_{t=a-T} &= \\ = P_{wy}(\omega)|_{t=0-a} + Q_{wy}(\omega)|_{t=0-a} + & \\ + P_{wy}(\omega)|_{t=a-T} + Q_{wy}(\omega)|_{t=a-T} &= \\ = P_{wy}(\omega)|_{t=0-T} + Q_{wy}(\omega)|_{t=0-T} & \end{aligned}$$

Zależność 57) ilustruje przekształcenie energii pola elektromagnetycznego w energię ciepłą wydzielaną w elemencie stratnym obciążenia. Nie można zatem określić przebiegu $p(t)$ oraz $q(t)$ nie znając rzeczywistego obwodu, w którym te przebiegi występują, bazując jedynie na przebiegach napięć i prądów źródła zasilania.

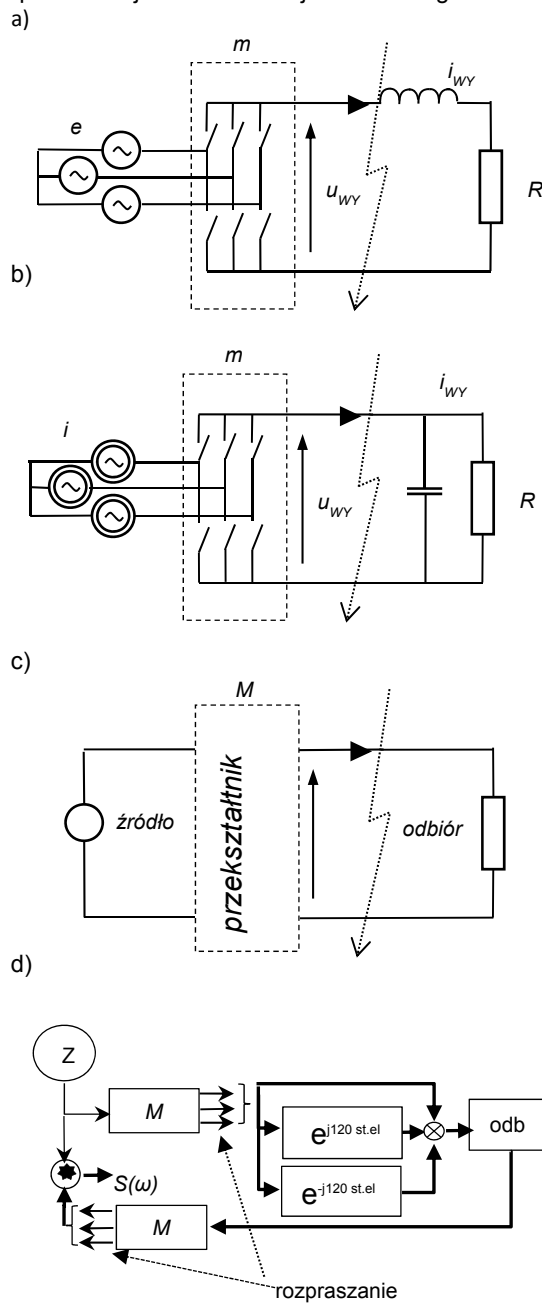
Widzimy także, iż podział na moc reaktancyjną i moc czynną w odniesieniu do harmonicznych przebiegu mocy całkowitej, przy występowaniu zjawiska przemiany energii w obwodzie, jest obserwowany po stronie źródła zasilania jako wynik sumy harmonicznych, bilansu harmonicznych.

Układy wielofazowe przekształtników półprzewodnikowych.

Zaprezentowana powyżej analiza mocy w prostym układzie jednofazowym pozwoliła zilustrować niektóre zjawiska istotne dla prawidłowego opisu obwodu w dziedzinie częstotliwości. Algorytmy do analizy spektralnej obwodów wielofazowych, symetrycznych różnią się nieznacznie od tych dla obwodu jednofazowego [2]. Obwody takie zbudowane są zwykle z układów

przekształtnikowych, wielofazowych od strony sieci zasilającej oraz układów falownikowych, wielofazowych po stronie obciążenia. Takie struktury można zastąpić jednofazowymi schematami zastępczymi w przypadku symetrii faz [2].

Na rysunku 7.a,b pokazano przykładowe schematy obwodów dla których można zbudować jednofazowy schemat zastępczy obwodu rys.7.d. a analizę przeprowadzić jak dla obwodu jednofazowego.



Rys.7. Przekształtnik prądowy a) napięciowy b) i ich jednofazowy schemat zastępczy c) oraz schemat blokowy obliczeń podstawowych wielkości w obwodzie.

Model obwodu składa się z sieci zasilającej e , przekształtnika półprzewodnikowego, realizującego funkcję $m(t)$, obwodu obciążenia RL (RC). W układzie z pośredniczącym obwodem indukcyjnym w pracy przekształtnika występują tzw. stany zwarcia, w których możemy mówić o przemianie energii omówionej w artykule.

W obwodzie z pośredniczącym obwodem pojemnościowym mamy do czynienia ze stanami zerowymi, w

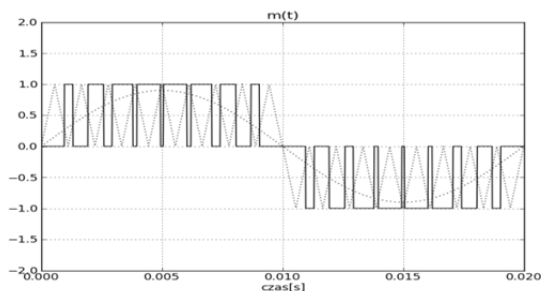
których następuje przemiana energii kondensatora na energię traconą w obciążeniu. W pozostałych stanach pracy bilans harmonicznych zachodzi bez potrzeby uwzględniania przemian energetycznych. Moce wejściowe i wyjściowe bilansują się po obu stronach przekształtnika. Przekształtnik można zastąpić zależnością $m(t)$ opisującą pracę układu półprzewodnikowego.

Na kolejnym rysunku rys.8. przedstawiono przebieg $m(t)$.

$$(58) \quad m(t) \Leftrightarrow M(n\omega)$$

Jest to przykładowy przebieg dla układu z pośredniczącym obwodem prądu rys.7.a). Przerzywana linia sinusoidalna na rys.8. ilustruje przebieg napięcia źródła zasilania.

Kolejne fazy są przesunięte o 120st.el. w odniesieniu do podstawowej harmonicznej przebiegu wielkości wymuszanej, źródłowej Z . W omawianym przykładzie jest to napięcie źródła zasilającego rys.7.a). Kolejne harmoniczne są przesunięte o kąt proporcjonalny do rzędu harmonicznej.



Rys.8. Przykładowy przebieg funkcji $m(t)$ w układzie z rys.7.a.

Napięcie u_{wy} jest teraz splotem napięcia źródła (przebieg sinusoidalny na rys.8) i funkcji stanu $m(t)$ dla każdej fazy. Poszczególne wartości zespolone napięcia fazowego opisane są zależnościami:

$$(59) \quad U_{wy}(n\omega) = E(n\omega) * M(n\omega)$$

Napięcie przyłożone do liniowego obwodu RL (obwodu obciążenia)

$$(60) \quad U_{wy}(n\omega) = [E(n\omega) * M(n\omega)] \cdot (1 + e^{jn2/3\pi} + e^{-j2/3n\pi})$$

wywoła w nim przepływ prądu opisany wzorem:

$$I_{wy}(n\omega) = U_{wy}(n\omega) \cdot Y(n\omega)$$

gdzie dla układu z rys8.b.

$$(61) \quad Y(n\omega) = \frac{1}{R + jn\omega L}$$

Moc całkowita, wyjściowa wynosi

$$(62) \quad S_{wy}(n\omega) = U_{wy}(n\omega) * I_{wy}(n\omega)$$

Prąd wyjściowy I_{wy} poprzez przekształtnik splatany jest z funkcją stanu M dając w wyniku prąd źródła I_z .

Otrzymamy zatem

$$(63) \quad I_z(n\omega) = M(n\omega) * I_{wy}(n\omega) = M(n\omega) * [U_{wy}(n\omega) \cdot Y(n\omega)]$$

Całkowita moc źródła jednej fazy napięcia wynosi:

$$(64) \quad S_{we}(n\omega) = E(n\omega) * I_z(n\omega)$$

Całkowitą moc źródeł fazowych otrzymamy przesuwając odpowiednio o 120st.el ostatnią zależność:

$$S_{we1}(n\omega) = E(n\omega) * I_z(n\omega)$$

$$(65) \quad S_{we2}(n\omega) = E(n\omega) * I_z(n\omega) \cdot e^{j2/3n\pi}$$

$$S_{we3}(n\omega) = E(n\omega) * I_z(n\omega) \cdot e^{-j2/3n\pi}$$

Obliczenia splotu w dziedzinie częstotliwości to mnożenie wielomianów zespolonych. Przyspiesza to obliczenia w przypadku symulacji układu a także pozwala

przewodzą obliczenia w sterowniku układu rzeczywistego przekształtnika. W programach symulacyjnych zależności (60) do (66) zastępuje się macierzami odpowiednich wielkości zespolonych. Ograniczenie analizy do skończonej liczby harmonicznych i wykorzystanie procedur numerycznych np. FFT oraz IFFT powoduje iż mamy do czynienia ze spektrami okresowymi. Operacja splotu w prezentowanych wzorach staje się operacją splotu cyklicznego (kołowego).

Podsumowanie.

Zaproponowane zależności splotowe na moce obwodów elektrycznych ,komutowanych , w analizie obwodów liniowych, stacjonarnych, skupionych z wymuszeniami sinusoidalnymi, przechodzą w znane związki iloczynów wielkości sprzężonych. W przypadku analizy energetycznej układów przekształtnikowych , z elementami kluczującymi, obwód przekształtnika można „zastąpić” wprowadzając w jego miejsce funkcję stanu $m(t)$. Wielkości napięć i prądów są „splatane” z tą funkcją w dziedzinie częstotliwości, a moce na wejściu i wyjściu układu kluczującego są takie same. Pozwala to prowadzić analizę mocy dla części liniowej obwodu. Prosta i intuicyjna staje się wówczas interpretacja fizyczna poszczególnych składowych mocy.

Projektant ma zazwyczaj do czynienia z układami bardziej złożonymi. Układy wielofazowe z pośredniczącymi obwodami napięciowymi i prądowymi można zastąpić schematami jednofazowymi. W przypadku symetrii faz schemat zastępczy jest szczególnie prosty a analiza obwodu nie jest dużo bardziej skomplikowana niż dla obwodu jednofazowego. Asymetria faz prowadzi nie tylko do komplikacji analizy i rozbudowy modelu obwodu ale jest źródłem dodatkowych harmonicznych w przebiegach wielkości w obwodzie. Analizę komplikują także wszelkie elementy nieliniowe wchodzące w skład obwodu.

Zaprezentowany w artykule opis jest tylko ilustracją niezbędną do zaprezentowania podejścia autora do omawianych zjawisk. Uproszczenie nazewnictwa może być korzystne z punktu widzenia opisu obwodów elektrycznych. Rozbudowa aparatu pomiarowego , przy aktualnym rozwoju technologii i jej niskich kosztach staje się pilną koniecznością współczesnej elektryki. Wielość teorii mocy i definicji mocy nie pomaga inżynierowi odnaleźć się i wykorzystać zbędnie komplikowany aparat pojęciowy. Jednoznaczne i proste definicje podstawowych wielkości opisujących obwody elektryczne jakkolwiek nie są niezbędne w procesie projektowania to ich klarowność i prostota oraz związek z fizycznymi odpowiednikami niewątpliwie są zachętą do ich wykorzystywania przy opisie obwodów i układów elektrycznych w tym także układów przekształtnikowych.

Prezentowane w artykule zjawisko i zależności autor wykorzystał do symulacji układów przekształtnikowych w dziedzinie częstotliwości [2]. Pozwoliło to wielokrotnie przyspieszyć analizę tych układów. Mimo ograniczeń wynikających z zasady nieoznaczoności przy przejściu pomiędzy dziedziną czasu i częstotliwości, z niedokładności odwzorowania przebiegów wynikających z efektu Gibbsa, z oddziaływania zwrotnego pomiędzy komutowanymi obwodami[2], analiza w dziedzinie częstotliwości i wykorzystanie zależności energetycznych mogą być narzędziami bardzo silnie wspierającymi proces projektowania. Potrzeba minimalizowania zużycia energii, poprawa parametrów układów to kolejne argumenty za korzystaniem z zależności energetycznych przy projektowaniu obwodów. Istotnym zagadnieniem jest problem taryf opłat za energię elektryczną. Nie każda metoda pomiarowa daje wynik, który nie budzi zastrzeżeń. Poziom technologiczny układów pomiarowych stwarza

możliwości pomiarowe, które te zastrzeżenia niwelują, bazując na ścisłych zależnościach teoretycznych. Taryfa opłat może być ustalona na bazie rzeczywistych poborów energii a nie na jej oscylacjach w sieci zasilającej.

Dodatek I

Jeśli:

$$(66) \quad s(t) = u(t) \cdot i(t) = p(t) + q(t)$$

to:

$$(67) \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [p(t) + q(t)] dt = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} q(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = P(0)$$

gdź:

$$(68) \quad \int_{-\infty}^{\infty} q(t) dt = 0$$

jako iloczyn przebiegów ortogonalnych.

Dodatek II

W dziedzinie czasu mamy przebieg $s(t)$ złożony z $p(t)$ i $q(t)$ ortogonalnych (nieskorelowanych), stąd

$$(69) \quad \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [p(t) + q(t)]^2 dt = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} p^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} q^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} 2p(t) \cdot q(t) dt = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} p^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} q^2(t) dt$$

Na mocy definicji przebiegów ortogonalnych, całka ich iloczynu równa się zeru.

$$(70) \quad \int_{-\infty}^{\infty} 2p(t)q(t) dt = 0$$

Ponowne wykorzystanie twierdzenia Parsevala pozwala, przedstawić poszczególne składniki powyższego wzoru następująco:

$$(71) \quad \int_{-\infty}^{\infty} p^2(t) dt = \sum_n |P|^2(n\omega) = [P * P](0) = P^2$$

$$(72) \quad \int_{-\infty}^{\infty} q^2(t) dt = \sum_n |Q|^2(n\omega) = [Q * Q](0) = Q^2$$

Przebieg $s(t)$ możemy podzielić na większą liczbę ortogonalnych składników [1], mogą to być nieskorelowane przebiegi harmoniczne. Wielość podziałów na przebiegi spełniające 24) prowadzi do:

$$(73) \quad \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = [S * S](0) = \\ = [P * P](0) + [Q_1 * Q_1](0) + [D * D](0) = \\ = S^2 = P^2 + Q_1^2 + D^2$$

gdzie zamiast Q występuje np. pierwsza harmoniczna przebiegu $q(t)$, a ostatni składnik oznacza autokorelację przebiegu $q(t)$ po odjęciu jego pierwszej harmonicznej.

Dodatek III

Jeśli funkcje opisujące prąd i napięcie spełniają założenia twierdzenia Grinberga, tzn. zachodzi wzór 5)

to prawdziwa jest zależność:

$$(74) \quad \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = [S * S](0) = U(\omega) * I(\omega) * U(\omega) * I(\omega) \Big|_{\omega=0} = \\ = \|U\|^2 \cdot \|I\|^2$$

Korzystając z właściwości spłotu [5]

$$(75) \quad U(\omega) * I(\omega) * U(\omega) * I(\omega) \Big|_{\omega=0} = [U(\omega) * U(\omega)] * [I(\omega) * I(\omega)] \Big|_{\omega=0} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} U(\gamma) \cdot U(\omega - \gamma) d\gamma * \int_{-\infty}^{\infty} I(\lambda) \cdot I(\omega - \lambda) d\lambda \Big|_{\omega=0} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} U(\gamma) \cdot U(-\gamma) d\gamma * \int_{-\infty}^{\infty} I(\lambda) \cdot I(-\lambda) d\lambda$$

na mocy twierdzenia Rayleigha po obu stronach spłotu mamy:

$$(76) \quad \int_{-\infty}^{\infty} U(\gamma) \cdot U(-\gamma) d\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \|U\|^2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} I(\lambda) \cdot I(-\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t) dt = \|I\|^2$$

Znak spłotu możemy zastąpić mnożeniem.

Potwierdzeniem tej zależności jest także wzór Wienera-Lee [3].

Również:

$$(77) \quad \int_{-\infty}^{\infty} s^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) i^2(t) dt = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t) dt = \|U\|^2 \cdot \|I\|^2$$

Podobne rozumowani prowadzi do zależności

$$(78) \quad \int_{-\infty}^{\infty} p^2 dt = \|U_p\|^2 \cdot \|I_p\|^2 = P^2$$

$$(79) \quad \int_{-\infty}^{\infty} q^2 dt = \|U_q\|^2 \cdot \|I_q\|^2 = Q^2$$

LITERATURA

- [1] Czarnecki S.L., Moce w obwodach elektrycznych z niesinusoidalnymi przebiegami prądów i napięć, Wyd.PW 2005.
- [2] Grochal P., Przemienniki częstotliwości o wejściowym współczynniku mocy zbliżonym do jedności, *Rozprawa doktorska*, PW 1996
- [3] Klawow Dietrich, Grundlagen der Signalverarbeitung, Universität Saarlans 28.10.2011
- [4] Mikusiński J., Rachunek operatorów, Monografie Matematyczne tom 30 wyd.1953
- [5] Osowski J., Zarys rachunku operatorowego, WNT 1981
- [6] Pasko M., Walczak J., Teoria sygnałów, WPS 2003
- [7] Szabatin J., Podstawy teorii sygnałów, WKŁ 2007
- [8] Czarnecki S.L., What is Wrong with the Budeanu Concept of Reactive and Distortion Power and Why It Should be Abandoned, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 03.09.1987
- [9] Czarnecki S.L., Oscylacje energii a moce nieaktywne w świetle Teorii Składowych Fizycznych Prądu (CPC) oraz Twierdzenia Poyntinga, Przegląd Elektrotechniczny, R.82, Nr.6/2006, 1-7
- [10] Czarnecki S.L., Physical Interpretation of the Reactive Power in Terms of CPC Power Theory, Electrical Power Quality and Utilisation, Journal Vol.XIII, No.1, 2007
- [11] Kuczewski Z., Walczak J., Pasko M., Moce w obwodach z przebiegami niesinusoidalnymi, Jakość i Użytkowanie Energii Elektrycznej, Tom I Zeszyt 1 1995r.
- [12] Skopec A., Stec C., Możliwość przedstawienia jednolitej nowej koncepcji mocy biernej prądu niesinusoidalnego w dziedzinie czasu, Przegląd Elektrotechniczny, 2008, nr 6, 69-74.,
- [13] Wciślik M., Bilanse mocy w obwodzie prądu przemiennego z odbiornikiem nieliniowym, Przegląd Elektrotechniczny Nr.2/2014
- [14] Grochal P., Barlik R., Nowak M., Układ sterowania przekształtnika energoelektronicznego., Patent nr 177115
- [15] www.python.org
- [16] pl.wikipedia.org

Autor: dr inż. Piotr Grochal, Politechnika Warszawska ul. Plac Politechniki 1, Warszawa Benning Power Electronics Sp. z o.o. Głoków ul. Korczunkowa 30 E-mail: p.grochal@benning.biz