

Przyczynki do teorii mocy linii długiej w dziedzinie czasu dyskretnego

Streszczenie. W artykule sformułowano wstępne wyniki dotyczące podstaw teorii przesyłu energii przez stratną, jednorodną linię długą w dziedzinie czasu dyskretnego. Użyto do tego celu specjalnych, osobliwych filtrów cyfrowych typu EXP, pierwiastek i filtrów hiperbolicznych. Za pomocą tych filtrów zdefiniowano czynne i bierne operatory transmisji energii w stratnej linii długiej w dziedzinie czasu dyskretnego.

Abstract. In the article a preliminary results about the basic theory of energy transmission through a lossy homogeneous transmission line in the discrete time domain is presented. For this purpose special, peculiar type of EXP digital filters, elemental filters and hyperbolic filters were used. These filters were used to define active and passive power transmission operators in lossy transmission line in the discrete time domain (**Contributions to the power theory for long transmission lines in the discrete time domain.**)

Słowa kluczowe: filtry cyfrowe wykładnicze, filtry cyfrowe pierwiastkowe, filtry cyfrowe hiperboliczne, linia długa stratna jednorodna, teoria mocy, dziedzina czasu dyskretnego.

Keywords: digital exponential filters, digital elemental filters, digital hyperbolic filters, homogeneous lossy transmission line, power theory, discrete time domain.

Wprowadzenie, energetyczne równania linii

Artykuł ten jest syntezą opracowań [1-5] w wyniku czego sformułowano wstępne podstawy teorii przepływu energii w stratnej linii długiej, w stanie periodycznym.

W pracy [4] podano po raz pierwszy algorytmy realizacji czterech cyfrowych filtrów osobliwych typu: EXP, $\sqrt{\bullet}$ (pierwiastek), ch (cosinus hiperboliczny), sh (sinus hiperboliczny). Filtry te definiowane są następująco:

$$(1) \quad B(z) = F[A(z)],$$

$$(2) \quad F(A(z)) = e^A; \sqrt{A}; chA; shA,$$

gdzie:

$$(3) \quad A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

$$B(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots$$

są transformacjami ZET przyczynowych i stabilnych filtrów cyfrowych o funkcjach impulsowych $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $n=0,1,2,\dots$, oraz

$$(4) \quad chA = \frac{1}{2}(e^A + e^{-A}); \quad shA = \frac{1}{2}(e^A - e^{-A}).$$

Wykazano [1], że równania splotowe między wejściem i wyjściem tych filtrów (rys. 1) mają następujące postacie:

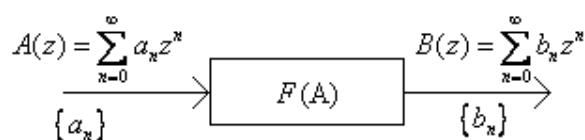
$$EXP: \{nb_n\} = \{b_n\} * \{na_n\},$$

$$\sqrt{\bullet}: \{b_n\} * \{b_n\} = \{a_n\}.$$

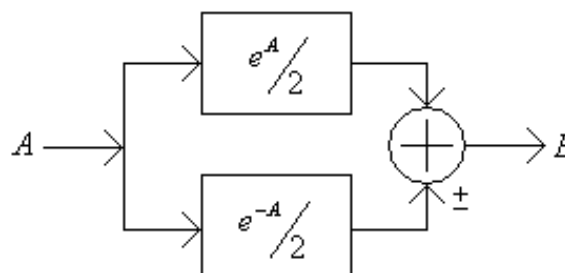
Rozwiązaniami tych równań są odpowiednie formuły rekurencyjne:

$$EXP: b_n = \sum_{m=1}^n \frac{m}{n} a_m b_{n-m}; \quad b_0 = e^{a_0},$$

$$\sqrt{\bullet}: b_n = \frac{1}{2b_0} \left(a_n - \sum_{m=1}^{n-1} b_{n-m} b_m \right); \quad b_0 = \sqrt{a_0}.$$



Rys.1. Osobliwy filtr cyfrowy do realizacji zadanej funkcji $F(A) = e^A; \sqrt{A}$



Rys.2. Osobliwe filtry cyfrowe do realizacji funkcji: $F(A) = chA; F(A) = shA$

Natomiast model linii długiej z użyciem filtru cyfrowego 1-D wprowadzono w pracy [2] wychodząc z równań:

$$(5) \quad -\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t},$$

gdzie:

$u(x,t)$, $i(x,t)$ - czasowo-odległościowe rozkłady sygnałów napięcia i prądu wzdłuż linii, R, L, G, C - parametry pierwotne linii.

Równania różniczkowe filtru cyfrowego z rekursją czasową, z operatorem opóźnienia jednostkowego „z”, przyjmują postać:

$$(6) \quad -\frac{du}{dx} = \rho(a-z)i; \quad -\frac{di}{dx} = \rho^{-1}(b-z)i,$$

gdzie:

$$x = \frac{\dot{x}}{\omega\tau} \quad - \quad \text{odległość względna,} \quad \omega = 1/\sqrt{LC} \quad - \quad (12) \quad G^f = \frac{1}{2}(Y^f + (Y^f)^*); \quad B^f = \frac{1}{2}(Y^f - (Y^f)^*)$$

maksymalna prędkość fali, $\rho = \sqrt{L/C}$ - opór falowy,
 τ - odstęp pobierania próbek czasowych sygnałów,

$$a = 1 + \frac{\tau}{\tau_L}; \quad \tau_L = \frac{L}{R}; \quad b = 1 + \frac{\tau}{\tau_C}; \quad \tau_C = \frac{C}{G}.$$

W [2] wyprowadzono operator macierzowy łańcuchowy linii wyrażony poprzez pierwiastkowo-wykładnicze filtry cyfrowe w postaci:

$$(7) \quad e^{-x\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} chx\gamma & -Z^f shx\gamma \\ -(Z^f)^{-1} shx\gamma & chx\gamma \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \rho(a-z) \\ \rho^{-1}(b-z) & 0 \end{bmatrix},$$

$\gamma(z) = (a-z)^{1/2}(b-z)^{1/2}$ - filtr propagacyjny,

$Z^f(z) = \rho(a-z)^{1/2}(b-z)^{-1/2}$ - filtr impedancji falowej.

Za pomocą macierzy-operatora (7) zapisuje się następujące równania linii:

$$(8) \quad \begin{aligned} u^x &= (chx\gamma)u^0 - Z^f(shx\gamma)i^0 \\ i^x &= -(Y^f shx\gamma)u^0 + (chx\gamma)i^0 \end{aligned}$$

gdzie: $Y^f(z) = \rho^{-1}(a-z)^{-1/2}(b-z)^{1/2}$ - filtr admitancji falowej.

Równania (8) można zapisać za pomocą operatora wykładniczo-propagacyjnego $e^{\pm\gamma x}$ w następującej postaci:

$$(9) \quad \begin{aligned} u^x &= e^{-x\gamma} \frac{u^0 + Z^f i^0}{2} + e^{x\gamma} \frac{u^0 - Z^f i^0}{2} \\ i^x &= Y^f \left(e^{-x\gamma} \frac{u^0 + Z^f i^0}{2} - e^{x\gamma} \frac{u^0 - Z^f i^0}{2} \right) \end{aligned}$$

gdzie: u^0, i^0 - sygnały czasowe napięcia i prądu na brzegu (początku) linii.

W skrócie równania (9) można zapisać z użyciem pojęć fal: bieżącej $e^{-x\gamma} f^1$ i przeciwbieżnej $e^{x\gamma} f^2$. Przyjmując one wtedy postać następującą:

$$(10) \quad \begin{aligned} u^x &= e^{-x\gamma} f^1 + e^{x\gamma} f^2 \\ i^x &= Y^f (e^{-x\gamma} f^1 - e^{x\gamma} f^2) \end{aligned}$$

Za pomocą równań (10) z użyciem iloczynu skalarnego można wyznaczyć wartość strumienia energii (mocy uśrednionej) niesionej przez przekrój poprzeczny linii na odległości x (rys. 3):

$$(11) \quad \begin{aligned} (u^x, i^x) &= (G^f e^{-2x\Gamma} f^1, f^1) - (G^f e^{2x\Gamma} f^2, f^2) \\ &+ 2(B^f e^{-2x\Delta} f^1, f^2) \end{aligned}$$

gdzie:

są odpowiednio operatorami: samo sprzężonym (czynnym) i skośnie-hermitowskim (biernym), natomiast:

$$(13) \quad \Gamma = \frac{1}{2}(\gamma + \gamma^*); \quad \Delta = \frac{1}{2}(\gamma - \gamma^*).$$

Operator Γ jest samosprzężony tak jak samo sprzężony jest operator e^{Γ} , podczas gdy operator Δ jest skośnie-hermitowski, a wykładniczy do niego operator e^{Δ} jest unitarny:

$$e^{\Delta} (e^{\Delta})^* = 1 \quad (\text{operator jednostkowy}).$$

Operatory periodyczne

Wprowadzone operatory $\gamma, e^{\gamma}, Z^f, Y^f$ opisane oryginałami czasowymi $\{\gamma_n\}, \{e_n^{\gamma}\}, \{Z_n^f\}, \{Y_n^f\}$ ($n=0,1,2,\dots$) są przyczynowe (zanikają dla $n<0$), podczas gdy operatory do nich sprzężone są antyprzyczynowe (zanikają dla $n>0$). Natomiast operatory G^f i Γ oraz e^{Γ} jako samo sprzężone mają czasowe oryginały symetryczne:

$$G_{-n}^f = G_n^f; \quad \Gamma_{-n} = \Gamma_n; \quad e_{-n}^{\Gamma} = e_n^{\Gamma}; \quad n = 0,1,2,\dots,$$

a operatory B^f, Δ i e^{Δ} jako skośnie-hermitowskie w swoich czasowych oryginałach są antysymetryczne:

$$B_{-n}^f = -B_n^f; \quad \Delta_{-n} = -\Delta_n; \quad n = 0,1,2,\dots$$

Operator unitarny $\{e_n^{\Delta}\}$, dla $n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\dots$ spełnia warunek:

$$e_{-n}^{\Delta} = -e_n^{\Delta} = e_n^{-\Delta}.$$

Wszystkie wymienione operatory należą do przestrzeni L^1 , dlatego stanowią podstawę do utworzenia operatorów periodycznych za pomocą operacji N-periodycznego rozprzestrzenienia [4]:

$$(14) \quad \tilde{f}_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} f_{n+pN} = f_n + \sum_{p=1}^{\infty} (f_{n-pN} + f_{n+pN}),$$

dla $n \in \{0,1,\dots,N-1\}$; $\{f_n\} \in L^1$.

W szczególności formuła (14) dla operatorów przyczynowych przyjmuje postać:

$$(15) \quad \tilde{\gamma}_n = \gamma_n + \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_{n+pN},$$

a dla operatorów hermitowskich (samosprzężonych):

$$(16) \quad \tilde{\Gamma}_n = \Gamma_n + \sum_{p=1}^{\infty} (\Gamma_{pN+n} + \Gamma_{pN-n}).$$

Operatory skośnie-hermitowskie podlegają N-periodycznej transformacji:

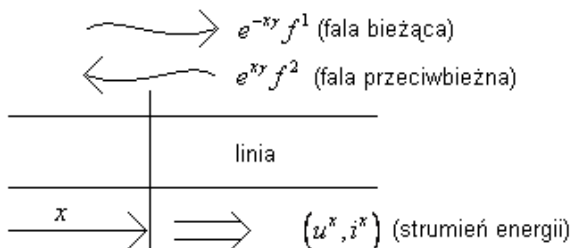
$$(17) \quad \tilde{\Delta}_n = \Delta_n + \sum_{p=1}^{\infty} (\Delta_{pN+n} - \Delta_{pN-n}),$$

a operatory unitarne:

$$(18) \quad \tilde{e}_n^{\Delta} = e_n^{\Delta} + \sum_{p=1}^{\infty} (e_{pN+n}^{\Delta} + e_{pN-n}^{-\Delta}).$$

Wnioski

Główny wynik tego opracowania zawiera się we wzorze (11). Podaje on wartość energii (mocy uśrednionej za okres – mocy czynnej) przenoszanej przez przekrój poprzeczny linii (rys. 3).



Rys.3. Strumień energii przenoszony przez poprzeczny przekrój linii przez fale bieżącą i przeciwbieżną

Pierwsze dwa składniki we wzorze (11) oznaczają przeciwne znakowo strumienie energetyczne niesione przez fale bieżącą i przeciwbieżną, trzeci jest energią wymiany. Z matematycznego punktu widzenia dwa pierwsze wskaźniki są dodatnio-określonymi formami kwadratowymi, trzeci to różna od zera forma dwuliniowa.

Dodatnia określoność form kwadratowych wynika z dodatniej określoności operatorów G^f :

$$\sqrt{\frac{a+j\omega}{b+j\omega}} + \sqrt{\frac{a-j\omega}{b-j\omega}} = \sqrt{\frac{a^2+\omega^2}{b^2+\omega^2}} 2 \cos \frac{\phi-\psi}{2} > 0$$

dla dowolnego $\omega > 0$, gdyż:

$$\phi = \arctg \frac{\omega}{a} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\psi = \arctg \frac{\omega}{b} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

oraz operatora Γ :

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a+j\omega)(b+j\omega)} + \sqrt{(a-j\omega)(b-j\omega)} = \\ & = \sqrt{(a^2+\omega^2)(b^2+\omega^2)} 2 \cos \frac{\phi+\psi}{2} > 0 \end{aligned}$$

Natomiast badanie wartości formy dwuliniowej (energii wymiany) prowadzi do wniosku:

$$\begin{aligned} (B^f e^{-2x\Delta} f^1, f^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} j\Phi(\omega) e^{j\Psi(\omega)} d\omega = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \sin \Psi(\omega) d\omega \neq 0 \end{aligned}$$

gdzie:

$\Phi(\omega) = B^f(\omega)F(\omega)$ - funkcja nieparzysta,

$\Psi(\omega) = \varphi(\omega) - 2x\Delta(\omega)$ - funkcja nieparzysta,

$F(\omega) = F_1(\omega)F_2(\omega)$ - funkcja parzysta,

$B^f(\omega)$ - funkcja nieparzysta.

Składnik wymiany energii znika natomiast dla linii bezstratnej, kiedy sygnały napięcia i prądu reprezentowane są przez liczby zespolone:

$$U^x = e^{-j\beta} f^1 + e^{j\beta} f^2,$$

$$I^x = \gamma \left(e^{-j\beta} f^1 - e^{j\beta} f^2 \right),$$

gdzie γ – konduktancja falowa (liczba rzeczywista), stąd:

$$\operatorname{Re} \left(U^x (I^x)^* \right) = \gamma \left(|f^1|^2 - |f^2|^2 \right).$$

LITERATURA

- [1] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Zastosowanie filtrów cyfrowych rzędu ułamkowego typu wykładniczego do analizy układów o parametrach rozłożonych, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr 2, 184-190
- [2] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Zastosowanie cyfrowych filtrów hiperbolicznych rzędu ułamkowego do analizy procesów falowych, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr 5a, 218-222
- [3] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Filtry cyfrowe pierwiastkowo-wykładnicze zmiennej przestrzennej w teorii linii długiej, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr 3a, 139-141
- [4] Siwczyński M.: Postać wykładnicza i hiperboliczna operatora bądź sygnału okresowego w dziedzinie – zastosowania w teorii mocy, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr 6, 194-197
- [5] Siwczyńska Z.: Postać wykładnicza i hiperboliczna operatora bądź sygnału okresowego w dziedzinie czasu – metody obliczeniowe i zastosowania, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr 6, 198-200
- [6] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu – obwody jednofazowe, *Przegląd Elektrotechniczny*, 86 (2010), nr 6, 196-201
- [7] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu dyskretnego, *Przegląd Elektrotechniczny*, 86 (2010), nr 7, 338-341
- [8] Kłosiński R.: Zastosowanie MDFT do analizy widmowej sygnałów okresowych próbkowanych niesynchronicznie, *Pomiary Automatyka Kontrola*, 54 (2008), nr 6, 337-339
- [9] Kłosiński R.: Modification of the DFT for improving accuracy of a non-coherently sampled periodic signal spectrum estimation, *Przegląd Elektrotechniczny*, 84 (2008), nr 9, 153-158
- [10] Stakhiv P., Kozak Y., Hoholyuk O.: Discrete mathematical macromodel of electric transmission line, *Przegląd Elektrotechniczny*, 89 (2013), no. 4, 272-274
- [11] Trzaska Z.W.: On strange attractors for discrete models of long transmission lines. Part 1. The problem background and preliminary results, *Archives of Electrical Engineering*, 51 (2002), no. 4, 355-369

Autorzy: dr inż. Zuzanna Siwczyńska, Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki Przemysłowej i Informatyki Technicznej, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, E-mail: zsiw@pk.edu.pl.