

## Porównanie błędu w ocenie wartości temperatury przewodu cylindrycznego przy adyabatycznym i konwekcyjnym odprowadzaniu ciepła podczas nagrzewania zwarciovego

**Streszczenie.** W pracy oszacowano wartość błędu jaki popelnia się zakładając adyabatyczny warunek brzegowy zamiast konwekcyjnego przy zwarciu. W tym celu porównano krzywe rozgrzewu w warunkach konwekcyjnych i adyabatycznych przy tym samym prądzie zwarcia. Badania przeprowadzono dla okrągłego szynoprzewodu DC. Zakładano przy tym różne współczynniki przejmowania ciepła z powierzchni zewnętrznej jak również różne jego przekroje. Zagadnienie brzegowo-początkowe nagrzewania adyabatycznego rozwiązano przy wykorzystaniu funkcji Greena. Z kolei zagadnienie przy konwekcyjnym warunku brzegowym rozwiązano wykorzystując zależności wyprowadzone w dostępnej literaturze oraz superpozycję składowych pola.

**Abstract.** The value of error, which is made by assuming adiabatic boundary condition instead of a convection condition during short circuit was estimated in the paper. For this purpose the heating up curves between adiabatic conditions and convection were compared for the same short-circuit current. The round busbar DC was studied. Different coefficients of heat transfer from the outer surface and various cross-sections were assumed. The adiabatic boundary-initial problem was solved by using Green's functions. On the other hand, the convection boundary problem was solved using relations were derived in the available literature and the superposition of the field components. (**Comparison of the error in estimation of cylindrical lead temperature by adiabatic and convection heat dissipation during short-circuit heating**).

**Słowa kluczowe:** analityczne metody teorii pola, niestabilny przepływ ciepła, okrągły szynoprzewód DC, zwarcia w przewodach  
**Keywords:** analytical methods of the field theory, transient heat flow, round busbar DC, shorts-circuit in leads

### Wstęp

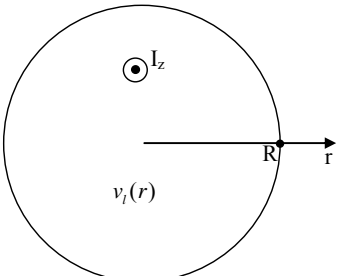
W analizie termicznych skutków zwarć kabli i przewodów zwykle pomija się wymianę ciepła z otoczeniem traktując proces nagrzewania jako adyabatyczny. Takie podejście jest uzasadnione krótkim czasem trwania zwarcia, w którym układ nie zdąży oddać ciepła bez względu na rodzaj warunku brzegowego. Przyjmuje się, że proces nagrzewania adyabatycznego można założyć do czasu nie przekraczającego jednej dziesiątej stałej czasowej układu [1], [2]. Wynika z tego celowości teoretycznego określenia wartości błędu jaki się popelnia przyjmując adyabatyczny warunek brzegowy zamiast konwekcyjnego. W związku z tym, w pracy porównano krzywe rozgrzewu przy adyabatycznych i konwekcyjnych warunkach brzegowych przy tym samym prądzie zwarcia. Badania przeprowadzono dla okrągłego szynoprzewodu DC przy różnych współczynnikach przejmowania ciepła jak również przy różnych jego przekrojach. Przed wystąpieniem zwarcia założono, że układ miał początkowy rozkład temperatury wynikający z przepływu prądu obciążenia w warunkach konwekcyjnej wymiany ciepła. Odpowiednie obliczenia przeprowadzono metodami teorii pola. W przypadku nagrzewania adyabatycznego zagadnienie brzegowo-początkowe rozwiązano przy wykorzystaniu funkcji Greena [3], [4]. Z kolei przy konwekcyjnym warunku brzegowym wykorzystano rozwiązania problemu dostępne w literaturze [5], [6] bazujące na metodzie rozdzielenia zmiennych w połączeniu z superpozycją. Warto dodać, że w wyniku obliczeń wspomnianymi wyżej metodami otrzymuje się rozwiązania w postaci wzorów, które w dużym stopniu ułatwiają dyskusję nad wpływem poszczególnych parametrów jak również interpretację fizyczną otrzymanych rezultatów.

### Brzegowo początkowe zagadnienia termiczne

Przedmiotem badań jest okrągły szynoprzewód DC, którego przekrój poprzeczny pokazano na rys. 1. Założono, że układ jest umieszczony w powietrzu o temperaturze  $T_o$ . W analizie rozważanego problemu przyjęto stałe i uśrednione parametry materiałowe. Zagadnienie brzegowo-początkowe modelu dogodnie jest przedstawić względem przyrostu temperatury  $v(r,t)$  odniesionego do temperatury otoczenia  $T_o$ .

$$(1) \quad v(r,t) = T(r,t) - T_o,$$

gdzie:  $T(r,t)$  – przestrzenno-czasowy rozkład pola temperatury w szynoprzewodzie,  $r$  – współrzędna radialna,  $t$  – czas.

$$A) \quad \left. \frac{\partial v(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad B) \quad \left. \frac{\partial v(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\alpha_z}{\lambda} v(R,t)$$


Rys. 1. Przekrój poprzeczny szynoprzewodu wraz z opisem warunków brzegowych i początkowego

Przyrost (1) przy założeniu, że długość szynoprzewodu jest znacznie większa od jego średnicy jest opisany niejednorodnym równaniem przewodnictwa cieplnego [3], [7]

$$(2) \quad \frac{\partial^2 v(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(r,t)}{\partial r} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial v(r,t)}{\partial t} = -\frac{g_z}{\lambda}$$

dla  $0 \leq r \leq R$ ,  $t > 0$ , gdzie:

$R$  - promień szynoprzewodu,  $\chi = \lambda / (c\delta)$ ,  $\lambda$  - cieplna przewodność właściwa,  $c$  - ciepło właściwe,  $\delta$  - gęstość,  $g_z = \rho_z I_z^2 / (\pi^2 R^4)$  - wydajność przestrzennych źródeł ciepła,  $\rho_z$  - oporność właściwa,  $I_z$  - natężenie prądu zwarcia.

W przypadku nagrzewania adyabatycznego warunek brzegowy jest postaci (rys. 1 A) [3], [7]

$$(3) \quad \left. \frac{\partial v(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0.$$

Z kolei przy konwekcyjnej wymianie ciepła z otoczeniem, warunek brzegowy jest następujący (rys. 1 B) [3], [7]

$$(4) \quad \left. \frac{\partial v(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\alpha_z}{\lambda} v(R,t),$$

gdzie:  $\alpha_z$  - całkowity współczynnik przejmowania ciepła z powierzchni zewnętrznej szynoprzewodu.

Przed pojawieniem się prądu zwarcia założono, że szynoprzewód miał początkowy rozkład temperatury wynikający z przepływu prądu obciążenia w warunkach konwekcyjnej wymiany ciepła

$$(5) \quad v(r,0) = v_l(r) = \frac{g_l}{4\lambda}(R^2 - r^2) + \frac{g_l R}{2\alpha_l},$$

gdzie:  $g_l$  - jest określone identyczną zależnością jak  $g_z$  (po zamianie  $I_z \rightarrow I_l$ ,  $\rho_z \rightarrow \rho_l$ ),  $\alpha_l$  - całkowity współczynnik przejmowania ciepła w warunkach obciążenia prądem długotrwałym  $I_l$ . Początkowy rozkład (5) zaczerpnięto z pracy [5]. Warto dodać, że można go otrzymać z (2) dla stanu ustalonego  $\left(\frac{\partial v(r,t)}{\partial t} \rightarrow 0\right)$  po wykorzystaniu warunku

brzegowego (4) (po zamianie odpowiednich indeksów). Zależności (2), (3), (5) tworzą zagadnienie brzegowo początkowe przy adiabatycznym warunku brzegowym, zaś (2), (4) i (5) przy konwekcyjnej wymianie ciepła. Należy dodać, że wymienione wyżej zagadnienia różnią się tylko warunkiem brzegowym.

W obydwu wyżej opisanych zagadnieniach pominięto zmianę rezystywności od temperatury, która w dużym stopniu jest kompensowana poprzez wyznaczanie różnicy krzywych rozgrzewu w tym samych chwilach czasu i podobnych wartościach temperatury.

#### Rozwiązanie zagadnienia brzegowo początkowego

Zagadnienie brzegowo początkowe nagrzewania adiabatycznego rozwiązano przy wykorzystaniu funkcji Greena [3], [4]. Warto wspomnieć, że nie zależy ona od typu wymuszenia jak również umożliwia rozwiązywanie równań różniczkowych niejednorodnych bez konieczności wyznaczania całek szczególnych. W pracach [3], [4] zastosowano znane tożsamości Greena i odpowiednie własności funkcji Greena do rozwiązywania równań przewodnictwa cieplnego. Wyprowadzono ogólne zależności całkowe opisujące przestrzenno-czasowe rozkłady pola przy różnych warunkach brzegowych. W rozważanym przypadku (jednorodnych) adiabatycznych warunków brzegowych rozwiązanie problemu (2), (3), (5) w układzie cylindrycznym można przedstawić za pomocą sumy całek [3], [4]:

$$(6) \quad v(r,t) = \int_0^R G(r,t,r',\tau=0)v_l(r')r'dr' + \frac{\chi}{\lambda} \int_0^t \int_0^R G(r,t,r',\tau)g_z r'dr'd\tau$$

gdzie  $G(r,t,r',\tau)$  - funkcja Greena czasu i położenia.

Pierwszy wyraz zależności (6) opisuje udział warunków początkowych w rozkładzie  $v(r,t)$ , drugi z kolei określa wpływ przestrzennych źródeł ciepła  $g_z$ . W celu obliczenia rozkładu (6) konieczna jest znajomość funkcji Greena. Jedną z metod jej wyznaczenia jest rozwiązanie zagadnienia pomocniczego (jednorodnego) w odniesieniu do oryginalnego inną metodą np. rozdzielania zmiennych, funkcji własnych itp. Następnie poprzez odpowiednie porównanie tak otrzymanego rozwiązania, z rozwiązaniem identycznego problemu ale wyrażonym w zależności od funkcji Greena, istnieje możliwość jej odczytania [3], [4]. W związku z tym, rozpatrzono następujące zagadnienie pomocnicze

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \psi(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial r} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t} = 0$$

dla  $0 \leq r \leq R$ ,  $t > 0$ ,

$$(8) \quad \left. \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0,$$

$$(9) \quad \psi(r,t=0) = F(r).$$

gdzie:  $\psi(r,t)$  - przestrzenno - czasowy rozkład temperatury,  $F(r)$  - dowolny rozkład warunku początkowego.

Zgodnie z metodą separacji zmiennych [5], [7], rozdzielając zmiennie czasu i położenia w (7), otrzymano

$$(10) \quad \psi(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\gamma_n \frac{r}{R}\right) e^{-\chi \frac{\gamma_n^2}{R^2} t} \quad \text{dla } 0 \leq r \leq R, t > 0.$$

gdzie:  $\gamma_n$  - wartości własne zagadnienia brzegowo-początkowego,  $J_0(z)$  - funkcje Bessela zerowego rzędu,  $C_n$  - współczynniki funkcji własnych. Po podstawieniu (10) do (8) otrzymano równanie wartości własnych

$$(11) \quad J_1(\gamma_n) = 0,$$

gdzie pierwsza wartość własna  $\gamma_0 = 0$ . W celu wyznaczenia współczynników  $C_n$  w (10) podstawiono (10) do (9)

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\gamma_n \frac{r}{R}\right) = F(r) \quad \text{dla } 0 \leq r \leq R.$$

Zależność (12) pomnożono odpowiednio przez  $r J_0\left(\gamma_m \frac{r}{R}\right)$

(dla  $\gamma_m \neq 0$ ) oraz przez  $r$  w przypadku  $\gamma_0 = 0$ , po czym scałkowano tak otrzymane związki względem współrzędnej radialnej  $r$  w przedziale  $\langle 0, R \rangle$ . Ostatecznie po wykorzystaniu ortogonalności funkcji Bessela [5], [7] i równania wartości własnych (11) otrzymano

$$(13) \quad C_n = \frac{2}{R^2} \int_0^R r F(r) dr + \frac{2}{R^2 J_0^2(\gamma_n)} \int_0^R r F(r) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{R}\right) dr,$$

gdzie wydzielono pierwszy wyraz dla  $\gamma_0 = 0$ .

Następnie zamieniono  $r \rightarrow r'$  pod całkami i podstawiono (13) do (10). Po odpowiednim uporządkowaniu otrzymano

$$(14) \quad \psi(r,t) = \int_0^R \left[ \frac{2}{R^2} + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{r'}{R}\right)}{J_0^2(\gamma_n)} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{R}\right) e^{-\chi \frac{\gamma_n^2}{R^2} t} \right] r' F(r') dr',$$

gdzie sumowanie w (14) zaczyna się od niezerowej wartości własnej.

Z kolei rozwiązanie pomocniczego zagadnienia (7), (8), (9) zapisane w zależności od funkcji Greena zawiera w sobie tylko jeden składnik związany z niezerowym rozkładem początkowym [3], [4]

$$(15) \quad \psi(r,t) = \int_0^R G(r,t,r',\tau=0) F(r') r' dr'$$

gdzie  $G(r,t,r',\tau=0)$  - funkcja Greena przy  $\tau=0$ ,  $F(r')$  - dowolny rozkład warunku początkowego.

Z porównania zależności (14) i (15) odczytuje się funkcję Greena dla  $\tau=0$ , zaś ostatecznie po zamianie  $t \rightarrow t-\tau$  [3], [4] poszukiwana funkcja jest następującej postaci

$$(16) \quad G(r,t,r',\tau) = \frac{2}{R^2} + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{r}{R}\right)}{J_0^2(\gamma_n)} J_0\left(\gamma_n \frac{r'}{R}\right) e^{-\chi \frac{\gamma_n^2}{R^2} (t-\tau)}$$

Po znalezieniu funkcji Greena (16) można już skorzystać z rozwiązania (6). Po podstawieniu (16) do (6), obliczeniu odpowiednich całek, uwzględnieniu (1), (11), otrzymano przestrzenno-czasowy rozkład temperatury przy nagrzewaniu adiabatycznym

(17)

$$T_A(r,t) = T_o + \frac{g_l R^2}{8\lambda} + \frac{g_l R}{2\alpha_l} + \frac{g_l R^2}{\lambda} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_n)}{\gamma_n^2 J_0^2(\gamma_n)} J_0(\gamma_n \frac{r}{R}) e^{-\chi \frac{\gamma_n^2}{R^2} t} + g_z \frac{\chi}{\lambda} t.$$

dla  $0 \leq r \leq R$ ,  $t > 0$ , oraz dodano indeks  $A$  w odniesieniu do (1). Wszystkie składniki w (17) oprócz  $T_o$  i ostatniego odpowiadają za wyrównanie początkowego rozkładu temperatury w warunkach adiabatycznych. Ostatni składnik w (17) przedstawia liniową zależność od czasu zależną od wartości prądu zwarciaowego.

Rozwiązanie zagadnienia brzegowo-początkowego (2), (4), (5) przy konwekcyjnej wymianie ciepła można znaleźć w literaturze [3], [5], [6]. Trudno się jednak doszukać rozwiązania, w którym generowane pole termiczne pochodzi jednocześnie od wymuszenia (źródła ciepła) oraz warunku początkowego. Ponieważ jednak zagadnienie (2), (4), (5) jest liniowe można dokonać odpowiedniej superpozycji składowych pola i wówczas skorzystać z rozwiązań przedstawionych w [3], [5], [6]. W związku z tym, rozwiązanie problemu (2), (4), (5) można przedstawić w postaci sumy

$$(18) \quad T_K(r,t) = T_o + v_1(r,t) + v_2(r,t), \text{ gdzie}$$

$T_K(r,t)$  – przestrzenno-czasowy rozkład temperatury w warunkach konwekcyjnej wymiany ciepła,  $v_1(r,t)$  – przyrost temperatury pochodzący od źródła ciepła  $g_z$  przy  $v_1(r)=0$  (rys. 1),  $v_2(r,t)$  – przyrost temperatury wynikający z początkowego rozkładu  $v_1(r)$  przy  $g_z=0$ . Wykorzystując wyprowadzone zależności w pracach [3], [5] przy uwzględnieniu warunku początkowego (5), po odpowiednim zgrupowaniu wyrażzeń i ich uproszczeniu, w rezultacie otrzymano

$$(19) \quad T_K(r,t) = T_o + v_K(r) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0(\beta_n \frac{r}{R}) e^{-\chi \frac{\beta_n^2}{R^2} t}$$

dla  $0 \leq r \leq R$ ,  $t > 0$ , gdzie:

$$(20) \quad v_K(r) = \frac{g_z}{4\lambda} (R^2 - r^2) + \frac{g_z R}{2\alpha_z} - \text{przyrost składowej stacjonarnej,}$$

$$(21) \quad D_n = \frac{\lambda \beta_n R J_1(\beta_n) (\frac{g_l}{\alpha_l} - \frac{g_z}{\alpha_z}) + R^2 J_2(\beta_n) (g_l - g_z)}{\lambda \beta_n^2 (J_0^2(\beta_n) + J_1^2(\beta_n))},$$

oraz równanie wartości własnych

$$(22) \quad \beta_n J_1(\beta_n) - \frac{\alpha_z R}{\lambda} J_0(\beta_n) = 0.$$

Zależność (19) opisuje przestrzenno-czasowy rozkład temperatury przy brzegowym warunku konwekcyjnym. Warto uzupełnić, że rozwiązanie zagadnienia (2), (4), (5) również można było otrzymać przy wykorzystaniu funkcji Greena lub też metodą rozdzielania zmiennych bez wykorzystania superpozycji (18).

Należy jeszcze wyznaczyć termiczną stałą czasową układu w warunkach konwekcyjnej wymiany ciepła, niezbędną do określenia czasu porównania krzywych rozgrzewu. W tym celu wykorzystano kryterium uśrednionej (lokalnej) stałej czasowej [8], [9], [10]

$$(23) \quad \tau(r) = \int_0^{\infty} \frac{T_k(r,t) - v_K(r) - T_o}{T(r,t=0) - v_K(r) - T_o} dt,$$

gdzie:  $v_K(r)$  – składowana stacjonarna. Po podstawieniu (19), (20) do (23) i scałkowaniu otrzymano uśrednioną stałą czasową szynoprzewodu

$$(24) \quad \tau(r) = \frac{R^2 \sum_{n=1}^L D_n J_0(\beta_n \frac{r}{R}) / \beta_n^2}{\chi \sum_{n=1}^L D_n J_0(\beta_n \frac{r}{R})} \text{ dla } 0 \leq r \leq R,$$

gdzie ograniczono szereg do  $L$  wyrazów. Z powyższej zależności (24) widać, że uśredniona stała czasowa zależy od punktu położenia  $r$ .

### Przykłady obliczeniowe

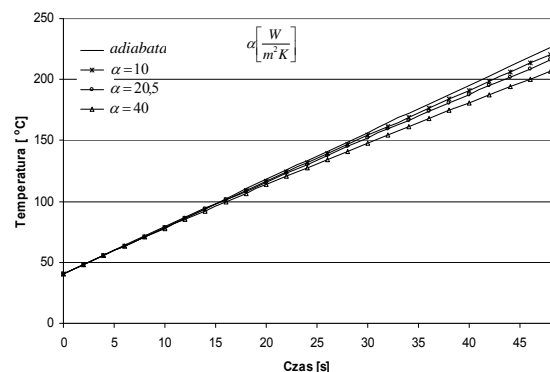
W programie Mathematica [11] opracowano program wyznaczający rozkłady pola zarówno przy adiabatycznym jak i konwekcyjnym warunku brzegowym. Jako przykład obliczeniowy wybrano okrągły aluminium szynoprzewód DC. Przyjęto następujące dane:  $T_o=25^\circ\text{C}$ ,  $\lambda=229\text{W}/(\text{mK})$ ,  $c=910\text{J}/(\text{kgK})$ ,  $\delta=2720\text{kg}/\text{m}^3$ ,  $\rho_z(T=125^\circ\text{C})=4,3026 \cdot 10^{-8}\Omega\text{m}$ ,  $I_z=3\text{kA}$ ,  $L=25$ . Dla początkowego rozkładu (5) założono:  $\rho_l(T=40^\circ\text{C})=3,2724 \cdot 10^{-8}\Omega\text{m}$ ,  $I_l=250\text{A}$ ,  $\alpha_l=13\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$ .

W powyższym zestawie danych przyjęto niezbyt dużą wartość prądu zwarciaowego  $I_z$ , co zostało podyktowane stosunkowo długim przedziałem czasu analizy. Dane dotyczące warunków początkowych ( $\rho_l$  oraz  $\alpha_l$ ) przyjęto dla mniejszej wartości temperatury.

W celu oszacowania wartości błędu zastąpienia warunku konwekcyjnego adiabatycznym zbadano względne różnice krzywych rozgrzewu według zależności

$$(25) \quad 100\% \frac{T_A(r,t) - T_K(r,t)}{T_K(r,t)}.$$

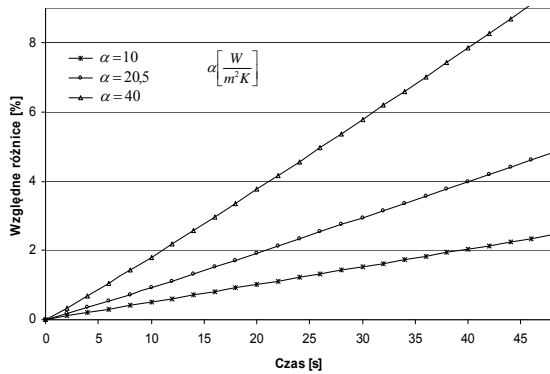
Z uwagi na dużą wartość cieplnej przewodności aluminium a co z tym związane dużą równomiernością rozkładu pola, wyniki obliczeń przedstawiono dla jednego punktu  $r=R$ . Na rys. 2 zilustrowano czasowe przebiegi temperatury przy adiabatycznym i konwekcyjnym warunku brzegowym przy różnych współczynnikach przejmowania ciepła dla  $r=R=0,008\text{m}$  (dla przekroju  $S=201\text{mm}^2$ ). Z kolei na rys. 3 przedstawiono względne różnice krzywych rozgrzewu (25) również dla różnych współczynników przejmowania ciepła  $\alpha$  przy tym samym promieniu jak wyżej. Na rys. 4 przedstawiono (25) przy stałym  $\alpha=20,5\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$  ale w funkcji zmian promienia szynoprzewodu (czyli dla różnych jego przekrojów). Z kolei w tabeli 1 zestawiono obliczenia wartości względnej różnicy (25) dla jednej dziesiątej stałej czasowej przy różnych promieniach (przekrojach) i różnych współczynnikach przejmowania ciepła.



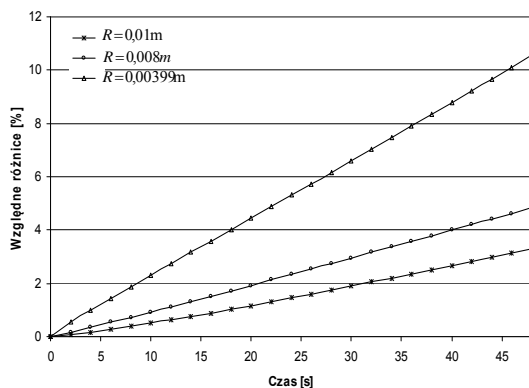
Rys. 2. Czasowe przebiegi temperatury na obwodzie szynoprzewodu przy adiabatycznych i konwekcyjnych warunkach brzegowych dla  $r=R=0,008\text{m}$

Dokonano również weryfikacji obliczeń przy wykorzystaniu metody elementów skończonych [12], [13]. W rezultacie, zarówno dla adiabatycznego jak i konwekcyjnego warunku brzegowego wyniki w odniesieniu do metody elementów skończonych różnią się nie więcej niż

0,01°C w zakresie temperatury do 250°C. Zatem wyprowadzone zależności (17), (19) należy uznać za dokładne.



Rys. 3. Względne różnice krzywych rozgrzewu w adiabatycznych i konwekcyjnych warunkach brzegowych przy różnych współczynnikach przemieszczania ciepła dla  $r=R=0,008m$



Rys. 4. Względne różnice krzywych rozgrzewu w adiabatycznych i konwekcyjnych warunkach brzegowych przy  $r=R$  dla różnych promieni szynoprzewodu przy  $\alpha=20,5W/(m^2K)$

### Wnioski

A) Krótkie nagrzewanie prądem zwarciovym powoduje, że czasowe przebiegi temperatury zarówno dla adiabatycznego i konwekcyjnego warunku brzegowego są podobne do siebie, zwłaszcza dla mniejszych czasów (rys. 2). Wraz z upływem czasu następuje jednak wyraźne rozdzielanie się wspomnianych krzywych, szczególnie przy rosnącym współczynniku przemieszczania ciepła. Powyższy wniosek ma również swoje potwierdzenie na rys. 3, gdzie pokazano względne różnice krzywych rozgrzewu (25) pomiędzy adiabatycznymi a konwekcyjnymi warunkami brzegowymi. Jak widać z rys. 3, większe wartości współczynnika przemieszczania ciepła powodują wzrost wartości względnych różnic (25). Przy stałym współczynniku przemieszczania ciepła i zmniejszaniu się promienia szynoprzewodu (czyli dla mniejszych jego przekrojów) również obserwuje się wzrost wartości względnych różnic (25). Przy wartości jednej dziesiątej stałej czasowej (tabela 1) względne różnice (25) dla różnych wariantów (zmiany  $\alpha$  i  $R$ ) są w granicach 4,4-5,4%. Ważnym parametrem kabli i przewodów jest jednosekundowa gęstość prądu zwarciovego, którą zwykle wyznacza się do 5s. W tych warunkach wartości (25) nie przekraczają 1,4% w najbardziej niekorzystnym przypadku. Z powyższego oraz tabeli 1 wynika, że przyjęcie warunku adiabatycznego zamiast konwekcyjnego nie wnosi większego błędu nawet dla tak długiego czasu trwania zwarcia (do jednej dziesiątej stałej czasowej).

Warto dodać, że proces wyrównania początkowego rozkładu temperatury w warunkach adiabatycznych jest

natychmiastowy (wykresu nie zamieszczono). Trwa zaledwie niecałą sekundę, co spowodowane jest dużą wartością cieplnej przewodności aluminium jak również niemal równomiernym początkowym rozkładem temperatury w całym obszarze szynoprzewodu. Stąd w celu uproszczenia obliczeń można przed zwarcim przyjąć warunek początkowy ze stałą wartością temperatury (np. uśrednioną z (5)).

Tabela1. Wartości względnych różnic (25) dla różnych współczynników przemieszczania ciepła i różnych promieni szynoprzewodu (różnych przekrojów  $S$ )

promień $R$ [m]	przekrój $S$ [mm <sup>2</sup> ]	współczynnik przemieszczania ciepła $\alpha$ [W/(m <sup>2</sup> K)]	wartość 1/10 stałej czasowej $\tau[R]$ [s]	względna różnica (25) [%]
0,008	201	10	99	4,97
0,008	201	20,5	48,3	4,87
0,008	201	40	24,8	4,72
0,00399	50	20,5	23,5	5,41
0,008	201	20,5	48,3	4,87
0,01	314	20,5	60,4	4,39

B) Wykorzystanie funkcji Grena umożliwiło wyprowadzenie wzorów opisujących przestrzenno-czasowy rozkład pola w szynoprzewodzie w warunkach adiabatycznych. Warto w tym miejscu wspomnieć, że przy często stosowanej metodzie rozdzielania zmiennych w połączeniu z superpozycją stanu ustalonego i nieustalonego kłopotliwe jest uzyskanie rozwiązania z uwagi na brak stanu ustalonego (pojawia się liniowa zależność od czasu).

Artykuł przygotowano w ramach projektu S/WE/1/13 realizowanego w Katedrze Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii Politechniki Białostockiej.

### LITERATURA

- [1] Maksymiuk J., Pochanke Z., Obliczenia i badania diagnostyczne aparatury rozdzielczej, WNT, Warszawa (2001).
- [2] Markiewicz H., Wołkowiński K., Urządzenia elektroenergetyczne, WNT, Warszawa (1980).
- [3] Hahn D. W., Ozisik M. N., Heat Conduction, John Wiley&Sons, New Jersey (2012).
- [4] Duffy D. G., Green's function with application, Chapman and HALL/CRC, Boca Raton (2001).
- [5] Kaćki E., Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki, WNT, Warszawa (1992).
- [6] Hering M., Termodynamika dla elektryków, WNT, (1980).
- [7] Latif M. J., Heat conduction., Springer-Verlag, Berlin, Haidelberg (2009).
- [8] Brykalski A., Ein Beitrag zur Bestimmung der mittleren Zeitkonstante von Diffusionsprozessen, International Journal of Heat and Mass Transfer 28 (1985), n. 3, 613-620.
- [9] Lipiński W., Gołbiowski J., Modeling of electromagnetic shield dynamics, IEEE Transactions on Magnetics, 16 (1980), n.6, 1419-1422.
- [10] Gołbiowski J., Zaręba M., A method of the analysis of the thermal field dynamics in a core and insulation of a DC lead with convectional heat abstraction, Electrical Engineering-Archiv für Elektrotechnik, 88 (2006), n.5, 453-464.
- [11] Grzymkowski R., Kapusta A., Kumoszek T., Słota D., Mathematica 6, Wydawnictwa Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice (2008).
- [12] Sikora J., Numeryczne metody rozwiązywania zagadnień brzegowych, Politechnika Lubelska, Lublin (2011).
- [13] Manuals for NISA v. 16. NISA Suite of FEA Software (CD-ROM). Cranes Software, Inc., Troy, MI (2008).

**Autor:** Marek Zaręba, Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok, e-mail: m.zareba@pb.edu.pl