

doi:10.15199/48.2015.08.02

## Zastosowanie transformacji Hilbert Vibration Decomposition do analizy sygnałów parasejsmicznych w dziedzinie czasu

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono wyniki badań dotyczących zastosowania transformacji HVD (ang. Hilbert Vibration Decomposition) do analizy sygnałów parasejsmicznych. Przeprowadzono dekompozycję sygnałów na sumę quasi-harmonicznych składowych (modów), których amplitudy oraz częstotliwości są parametrycznymi funkcjami czasu. W przeciwieństwie do stosowanych aktualnie w diagnostyce transformacji Fouriera DFT oraz STFT nadaje się ona do analizy zjawisk o charakterze zarówno nieliniowym jak i niestacjonarnym.

**Abstract.** The article reports on investigation results of Hilbert Vibration Decomposition transformation (HVD) utilization for a paraseismic signals. The main HVD parameters are considered in the explored area. We performed signals decomposition for a sum of a quasi harmonic components that amplitudes and frequencies are parametric time functions. In contrast to commonly used in diagnostic's DFT and STFT transformations, proposed method is suitable for non-stationary and nonlinear phenomenon's. (The application of HVD transformation for paraseismic signals analysis in the time domain).

**Słowa kluczowe:** dekompozycja sygnałów, sygnały parasejsmiczne, transformacja Hilberta, transformacja HVD.

**Keywords:** signals decomposition, paraseismic signals, Hilbert transform, HVD transform.

### Wprowadzenie

Badania wpływu drgań gruntu działających na liniowe obiekty budowlane (rurociągi gazowe, wodociągowe, kanalizacyjne, ciepłociągi) są niezbędne do oceny stopnia zagrożenia bezpieczeństwa rurociągów położonych na terenach o niestabilnym podłożu (np. tereny górnicze, obszary nasilonego ruchu komunikacyjnego itp.). Nieregularne i o losowym przebiegu obciążenia dynamiczne mogą być przyczyną niskocyklowego zmęczenia materiału, czego skutkiem może być rozwój i propagacja mikropęknięć prowadzących do awarii rurociągu. Z drugiej strony przenoszone na grunt i rurociąg drgania pochodzące od wstrząsów wpływają na zmiany wartości sił tarcia, powodując zmienność obciążenia zewnętrznego konstrukcji [1,2]. Zjawiska te wykazują istotne cechy nieliniowości oraz niestacjonarności. Przedmiotem prezentowanej w artykule analizy były zarejestrowane sygnały przyspieszeń i odkształceń rurociągu oraz wywołujących je przyspieszeń drgań gruntu, mających charakter parasejsmiczny.

W artykule zaprezentowane zostały wyniki badań dotyczących zastosowania transformacji HVD (ang. Hilbert Vibration Decomposition) do analizy sygnałów pochodzenia parasejsmicznego. Przeprowadzono dekompozycję sygnałów w dziedzinie czasu przy wykorzystaniu opracowanej na podstawie transformacji Hilberta metody HVD.

W odróżnieniu od często stosowanej w analizie sygnałów transformacji Fouriera (DFT, STFT), gdzie zakłada się, że sygnał jest sumą pewnej liczby przebiegów sinusoidalnych, ważną rolę w analizie odgrywa transformacja Hilberta, w której przyjmuje się, że sygnał ma formę pojedynczego, ale zmodulowanego przebiegu sinusoidalnego. Natura sygnałów parasejsmicznych często jest tożsama z taką definicją, dlatego w wielu przypadkach transformacja Hilberta i oparte o nią metody dekompozycji mogą sprawdzać się dużo lepiej od metod opartych o przekształcenie Fouriera. Dodatkowo, w przypadku sygnałów charakteryzujących zjawiska o charakterze zarówno nieliniowym jak i niestacjonarnym, często wykorzystywana transformacja czasowo-częstotliwościowa STFT może generować trudne do poprawnej interpretacji obrazy widmowe.

Niestacjonarny, zmienny, rzeczywisty sygnał drgań  $u(t)$  można w łatwy sposób reprezentować z wykorzystaniem parametrów jego sygnału analitycznego, który można uzyskać przy wykorzystaniu transformacji Hilberta. Pozwala

to rozumieć proces drgania, w każdej chwili czasu, jako quasi-harmoniczną oscylację, która jest modulowana amplitudowo i częstotliwościowo przez zmienną w czasie funkcję amplitudy  $A(t)$  oraz pulsacji  $\omega(t)$  [3,4,5,6,7]:

$$(1) \quad u(t) = A(t) \cos\left(\int_0^t \omega(t) dt\right)$$

Matematycznie takie podejście jest poprawne dla wszystkich sygnałów. Jednak jedynie zastosowanie powyższej metody do sygnału wąskopasmowego da w efekcie użyteczne, wolno zmienne przebiegi obwiedni i pulsacji. Obwiednia (chwilowa amplituda) i chwilowa pulsacja sygnału o wielu składowych będą przebiegami bardziej skomplikowanymi niż pierwotny sygnał. Dlatego nie jest możliwa analiza i modelowanie sygnałów drgań i odkształceń wyłącznie na podstawie tego narzędzia. Pożądana w tej sytuacji jest możliwość detekcji i wyodrębnienia z sygnału poszczególnych jego składowych quasi-harmonicznych, gdzie każdą składową opisywać będą wolnozmiennie funkcje amplitudy oraz pulsacji:

$$(2) \quad u(t) = \sum_{i=1}^N A_i(t) \cos\left(\int_0^t \omega_i(t) dt\right)$$

Feldman w swoich publikacjach [4,7] przedstawił nową metodę wyodrębnienia z sygnału poszczególnych jego składowych quasi-harmonicznych jako sumę prostszych składowych w dziedzinie czasu. Technika ta nazwana HVD jest w stanie oddzielić od siebie składowe nakładające się zarówno w czasie jak i częstotliwości, które nie mogą zostać oddzielone przez inne standardowe techniki filtracji. Metoda HVD umożliwia wyznaczenie w dziedzinie czasu rozkładu energii sygnału dla występujących w nim częstotliwości, tak więc przypomina transformację falkową. Dlatego znalazła zastosowanie w różnorodnych dziedzinach, jak np. w przetwarzaniu sygnałów dźwiękowych, do analizy i identyfikacji wibracji nieliniowych układów mechanicznych itp.

### Algorytm dekompozycji HVD

Algorytm dekompozycji sygnału HVD (nazywany też Global HVD) został zaproponowany po raz pierwszy w 2006 roku przez Feldmana w [7], a opisany został w [4], a także częściowo w [3,6,8]. Metoda bazuje na wykorzystaniu pulsacji chwilowej  $\omega(t)$  sygnału analitycznego otrzymanego dzięki transformacji Hilberta. Transformacja Hilberta sygnału  $u(t)$  jest przekształceniem w dziedzinie czasu opisanym formułą [4,9]:

$$(3) \quad \hat{u}(t) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

gdzie:

$u(t)$  – analizowany sygnał o wartościach rzeczywistych,

$\hat{u}(t)$  – transformata Hilberta sygnału  $u(t)$ .

Sygnał  $u(t)$  oraz jego transformatę  $\hat{u}(t)$  wykorzystuje się do utworzenia zespolonego sygnału analitycznego  $U(t)$ :

$$(4) \quad U(t) = u(t) + j\hat{u}(t)$$

Dla sygnału analitycznego można wyznaczyć [4,9]:

- fazę chwilową – argument liczby zespolonej:

$$(5) \quad \psi(t) = \arctan \frac{\hat{u}(t)}{u(t)}$$

- pulsację (częstotliwość kątową) chwilową – jako pochodną fazy chwilowej:

$$(6) \quad \omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

- obwiednię sygnału (chwilową amplitudę) – jako moduł liczby zespolonej:

$$(7) \quad A(t) = \pm \sqrt{u^2(t) + \hat{u}^2(t)}$$

Znak  $\pm$  znajduje się przed pierwiastkiem ze względu na to, że wartości dodatnie odpowiadają górnej obwiedni sygnału a ujemne obwiedni dolnej [4]. Faza chwilowa  $\psi(t)$  o wartościach funkcji arcus tangens poddana procedurze rozwijania (ang. unwrap) jest funkcją ciągłą, rosnącą monotonicznie. Jej zmienność, a więc pochodna chwilowej fazy po czasie jest pulsacją chwilową  $\omega(t)$ . W celu uniknięcia problemu rozwijania fazy, przy wyznaczaniu chwilowej pulsacji (6) można posłużyć się metodą zaproponowaną i uzasadnioną w [4]:

$$(8) \quad \psi' = \arctan \left( \frac{\text{Im}(U_n^* U_{n+1})}{\text{Re}(U_n^* U_{n+1})} \right)$$

gdzie:

$U_n^*$  -  $n$ -ta próbka sprzężonego sygnału analitycznego  $U(t)$ ,

$U_{n+1}$  -  $(n+1)$  próbka sygnału analitycznego  $U(t)$  (4).

W ten sposób każdy analizowany sygnał rzeczywisty  $u(t)$ , można w łatwy sposób reprezentować z wykorzystaniem parametrów jego sygnału analitycznego, chwilowej amplitudy  $A(t)$  (7) i chwilowej pulsacji  $\omega(t)$  (6) [4,6,9]:

$$(9) \quad u(t) = A(t) \cos \left( \int_0^t \omega(t) dt \right)$$

Zastosowanie metody HVD do dekompozycji pozwala na iteracyjne wyizolowanie z analizowanego sygnału składowych sygnałów o wolnozmiennnej obwiedni  $A(t)$  oraz pulsacji chwilowej  $\omega(t)$ . W [4,7] przedstawiona została analiza funkcjonowania algorytmu HVD na przykładzie sygnału złożonego z dwóch składowych quasi-harmonicznych. Uogólnijmy analizę dla przypadku  $N$  składowych.

Załóżmy zatem, że analizowany sygnał jest sumą  $N$  składowych quasi-harmonicznych i przedstawmy go dla uproszczenia w postaci zespolonego sygnału analitycznego

$$(10) \quad U(t) = A_1(t) \cdot e^{j \int_0^t \omega_1(t) dt} + A_2(t) \cdot e^{j \int_0^t \omega_2(t) dt} + \dots \\ + A_N(t) \cdot e^{j \int_0^t \omega_N(t) dt}$$

wówczas dla przypadku, gdy  $\omega_1(t) < \omega_i(t)$  dla  $i$  z przedziału  $(2 \div N)$  oraz  $A_i \neq A_l$  dla każdego  $i$  oraz  $l$  z przedziału  $(1 \div N)$ , faza sygnału  $U(t)$  (10) zgodnie z (5) wynosi:

$$(11) \quad \psi(t) = \arctan \frac{\sum_{i=2}^N A_i(t) \cdot \sin \left( \int_0^t [\omega_i(t) - \omega_1(t)] dt \right)}{A_1(t) + \sum_{i=2}^N A_i(t) \cdot \cos \left( \int_0^t [\omega_i(t) - \omega_1(t)] dt \right)}$$

natomiast chwilowa pulsacja (6) będzie mieć dwie składowe, wolnozmienną pulsację  $\omega_1(t)$  oraz szybkozmienną, asymetrycznie oscylującą część:

$$(12) \quad \omega(t) = \omega_1(t) +$$

$$\frac{\sum_{i=2}^N [\omega_i(t) - \omega_1(t)] \sum_{l=1}^N A_l(t) \cdot A_i(t) \cos \left( \int_0^t [\omega_l(t) - \omega_i(t)] dt \right)}{A^2(t)}$$

gdzie:

$$(13) \quad A^2(t) = \sum_{i=1}^N A_i^2(t) +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{l=i+1}^N A_i(t) \cdot A_l(t) \cdot \cos \left( \int_0^t [\omega_l(t) - \omega_i(t)] dt \right)$$

Algorytm HVD opiera się na bardzo ważnej własności pulsacji przedstawionej równaniem (12). W związku z tym, że drugi składnik sumy reprezentuje oscylacje o pulsacji  $(\omega_i(t) - \omega_1(t))$  dla  $i \in (2 \div N)$  wokół pulsacji  $\omega_1(t)$ , średnia wartość pulsacji chwilowej  $\omega(t)$  jest równa pulsacji składowej harmonicznej o największej energii, czyli jest równa pulsacji  $\omega_1(t)$  [4,7]:

$$(14) \quad \langle \omega(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \omega(t) dt = \omega_1(t) + 0$$

gdzie:  $\langle \omega(t) \rangle$  – pulsacja chwilowa składowej o największej energii,  $T$  - czas uśredniania.

Dysponując wiedzą o przebiegu pulsacji chwilowej  $\omega_1(t)$  składowej wyodrębnionej z sygnału, w kolejnych krokach wyznaczana jest jej amplituda chwilowa  $A_1(t)$ . W tym celu wykorzystywana jest metoda demodulacji synchronicznej. Zakładamy przy tym, że sygnał pierwotny  $u(t)$  jest sumą  $N$  składowych o wolnozmienniej amplitudzie chwilowej i fazy chwilowej (2). Wyznaczoną pulsację chwilową  $\omega_1(t)$  składowej o największej energii w sygnale (czyli demodulowanej składowej) wykorzystujemy do generowania dwóch sygnałów nośnych przesuniętych względem siebie o  $90^\circ$  (sinus i cosinus). Demodulacja synchroniczna pozwala na wydobycie informacji o amplitudzie składowej o znanej pulsacji przez mnożenie pierwotnego sygnału i jego transformaty Hilberta przez wygenerowane sygnały nośne (referencyjne). Sygnał otrzymany w wyniku demodulacji poddawany jest filtracji dolnoprzepustowej w celu usunięcia sygnału nośnego. Szczegółowo sposób realizacji demodulacji synchronicznej został omówiony w [4].

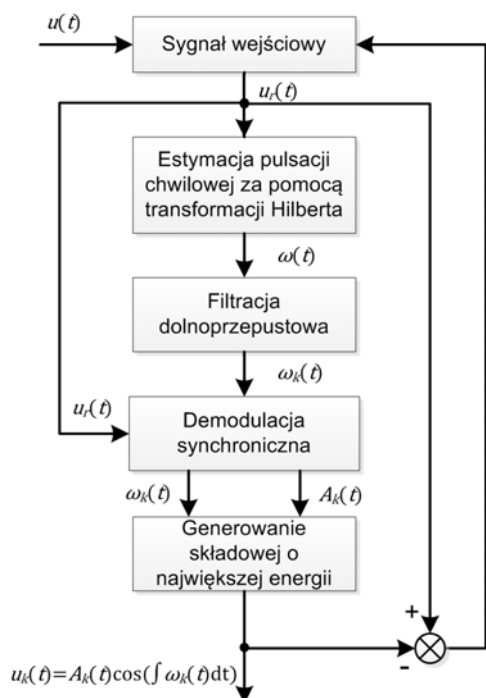
Filtracja dolnoprzepustowa stosowana jest dwukrotnie podczas wydzielenia składowej (filtracja pulsacji  $\omega(t)$  (12) w celu wyznaczenia  $\omega_1(t)$  oraz filtracja sygnału nośnego podczas demodulacji). Częstotliwość graniczna filtra warunkuje rozdzielczość częstotliwościową algorytmu HVD. Składowa sygnału o pulsacji  $\omega_1(t)$  może być poprawnie odfiltrowana tylko wtedy, gdy jej wartość jest mniejsza od częstotliwości granicznej filtra, natomiast wszystkie różnice częstotliwości  $(\omega_i(t) - \omega_1(t))$  dla  $i \in (2 \div N)$  są większe niż wartość częstotliwości granicznej filtra [4,7]. W związku z powyższym, analiza sygnału  $u(t)$  o nieznannej a priori zawartości harmonicznych, wymaga doboru możliwie jak

najmniejszej częstotliwości granicznej filtra, aby zapewnić wysoką rozdzielczość częstotliwościową (rozdzielność składowych o bardzo bliskich częstotliwościach). Rozdzielczość częstotliwościowa jest również związana z częstotliwością próbkowania sygnału  $f_s$ , a największą rozdzielczość uzyskuje się dla częstotliwości sygnału bliskich częstotliwości Nyquista. Z tego względu możliwe jest poprawienie rozdzielności składowych o bardzo niskich częstotliwościach przez zmniejszenie częstotliwości próbkowania sygnału [4]. Poprawne funkcjonowanie algorytmu HVD jest zatem ograniczone w zakresie wysokich częstotliwości sygnału częstotliwością Nyquista. Ograniczenie w zakresie niskich częstotliwości sygnału jest związane natomiast z możliwością zaprojektowania stabilnego filtra dolnoprzepustowego o odpowiedniej charakterystyce (możliwie płaskiej, bez zafalowań) [4].

W dalszej części algorytmu HVD wyznaczona pierwsza składowa sygnału o największej energii jest odejmowana od sygnału wejściowego  $u(t)$ , a pozostały sygnał jest poddawany ponownej iteracji w celu wyznaczenia kolejnej  $k$ -tej składowej. Podsumowując, działanie algorytmu HVD [4], którego schemat blokowy został przedstawiony na rysunku 1, polega zatem na wykonywaniu w kolejnych krokach następujących operacji:

- 1) estymacja pulsacji chwilowej  $\omega(t)$  sygnału analitycznego (6) i (12) utworzonego z sygnału wejściowego i jego transformaty Hilberta,
- 2) filtracja dolnoprzepustowa pulsacji chwilowej  $\omega(t)$  (14) w celu uzyskania  $k$ -tej pulsacji składowej  $\omega_k(t) = \langle \omega(t) \rangle$  w  $k$ -tej iteracji,
- 3) demodulacja synchroniczna na podstawie wyznaczonej pulsacji  $\omega_k(t)$  w celu wyodrębnienia informacji o obwiedni  $k$ -tej składowej  $A_k(t)$ ,
- 4) generacja przebiegu czasowego wyizolowanej składowej na podstawie jej chwilowej pulsacji  $\omega_k(t)$  i obwiedni  $A_k(t)$ ,
- 5) odjęcie uzyskanej składowej od sygnału wejściowego – różnica (sygnał resztkowy) staje się sygnałem wejściowym w kolejnej iteracji.

Liczba iteracji jest dowolna, ustalana przez użytkownika. Przydatna jest więc pewna wiedza a priori o charakterze dekomponowanych sygnałów i pożądanej liczbie składowych.



Rys. 1. Schemat algorytmu dekompozycji HVD

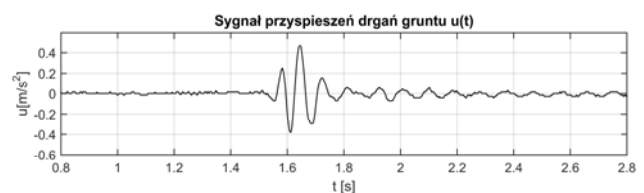
## Cel i przedmiot badań

Celem badań była weryfikacja możliwości zastosowania czasowej transformacji HVD w odniesieniu do sygnałów parasejsmicznych. W tym celu wykonano implementację algorytmu HVD w środowisku Matlab [3,8] oraz przeprowadzono eksperymenty symulacyjne dla przykładowego sygnału drgań gruntu.

## Przebieg oraz wyniki badań symulacyjnych

Do badań symulacyjnych wykorzystane zostały sygnały zarejestrowane podczas eksperymentów terenowych, które polegały na wymuszaniu drgań gruntu i badaniu ich wpływu na gazociąg. Energia drgań gruntu skupiona jest w zakresie niskich częstotliwości od kilku do kilkudziesięciu herców. Sygnały przyspieszeń drgań gruntu rejestrowano z częstotliwością próbkowania  $f_s=400$  Hz oraz rozdzielczością 16 bitów.

W stosowanej w algorytmie HVD filtracji dolnoprzepustowej istotne jest, aby wykorzystany filtr miał liniową fazę. W opracowanej implementacji algorytmu HVD, na podstawie [4,9,10,11], zastosowano do zaprojektowania optymalnego filtra cyfrowego FIR, metodą aproksymacji Czebyszewa, wykorzystując implementację Parks-McClellan algorytmu Remez (wykorzystano instrukcję *firpm* w programie Matlab). Posłużono się także instrukcją *filtfilt*, która zapewnia filtrację bez wpływu na fazę filtrowanego sygnału [11]. Jest to możliwe przez filtrowanie sygnału w obu kierunkach tj. od pierwszej do ostatniej próbki oraz od ostatniej do pierwszej próbki. Dla częstotliwości próbkowania  $f_s=400$  Hz dobre efekty uzyskano dla rzędu filtra  $N=300$  oraz z  $-3$  dB częstotliwością graniczną filtra równą 1 Hz. Wtedy jednak spełniony musi być warunek, że występująca w każdej składowej oscylacja musi mieć więcej niż  $(N-1)*3+1$  próbek [4]. Istotna jest tu nie tylko długość sygnału, ale długość zawartego w sygnale drgania. Zaimplementowany w ten sposób algorytm HVD pozwala na dekompozycję sygnałów, których składowe mają bardzo zbliżone częstotliwości, a jego rozdzielczość częstotliwościowa wynosi 1 Hz. Na rysunku 2 zaprezentowano przebieg czasowy przykładowego sygnału przyspieszeń drgań gruntu, w przedziale pomiędzy 0,8 s a 2,8 s czasu rejestracji i zawierający 1334 próbki. Zgodnie z wymaganiami algorytmu ustalono liczbę pożądanych składowych, które mają być wydzielone z sygnału podczas dekompozycji, na cztery.

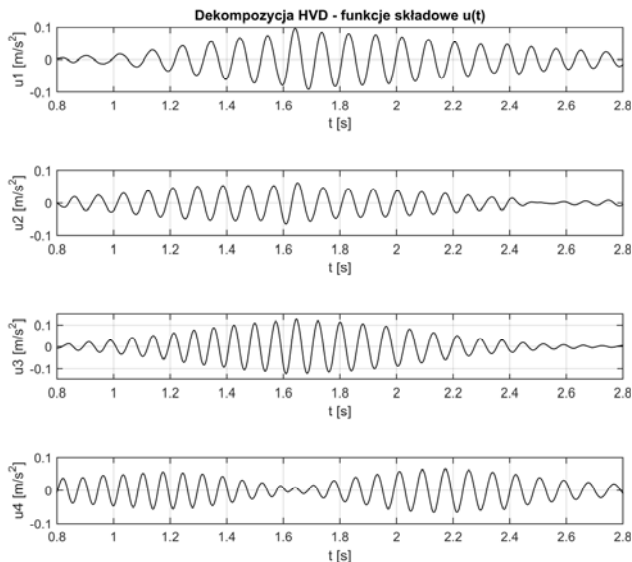


Rys. 2. Przebieg czasowy sygnału przyspieszeń drgań gruntu

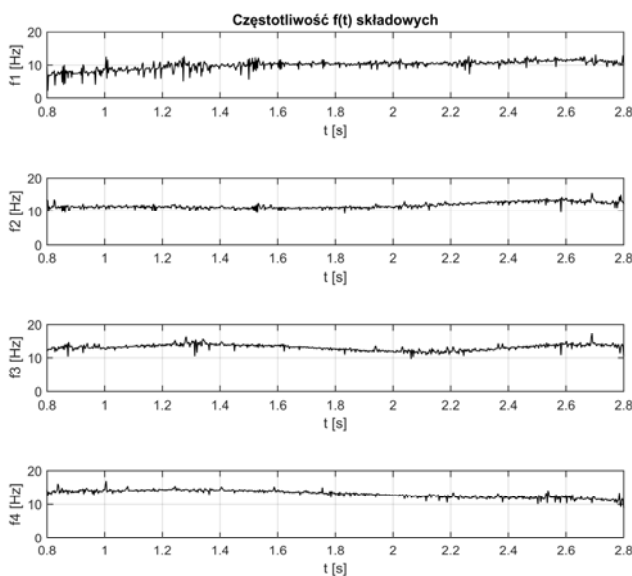
Na rysunku 3 przedstawiono wyniki rozkładu sygnału przyspieszenia drgań gruntu  $u(t)$  na składowe za pomocą algorytmu HVD. Zaprezentowano cztery pierwsze dominujące składowe w przedziale czasu pomiędzy 0,8 s a 2,8 s czasu rejestracji. Na rysunkach 4 oraz 5 pokazano przebiegi chwilowych częstotliwości oraz chwilowych amplitud składowych sygnału  $u(t)$  (z rys. 2), w przedziale pomiędzy 0,8 s a 2,8 s czasu rejestracji.

## Analiza uzyskanych wyników

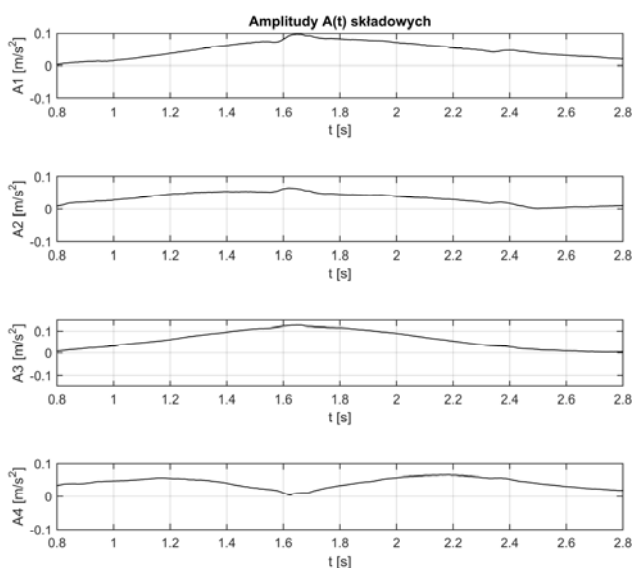
W wyniku przeprowadzonych eksperymentów symulacyjnych wyodrębniono funkcje składowe sygnału drgań gruntu  $u(t)$  (rys. 3). Funkcje składowe mają charakter funkcji sinusoidalnych z modulowaną amplitudą i częstotliwością, zgodnie z (9).



Rys. 3. Funkcje składowe sygnału  $u(t)$  (z rys. 2)



Rys. 4. Przebiegi czasowe częstotliwości składowych sygnału  $u(t)$



Rys. 5. Przebiegi czasowe amplitud składowych sygnału  $u(t)$

Kolejność wyodrębniania składowych przebiega od częstotliwości najniższych do najwyższych. Wartości częstotliwości składowych sygnału  $u(t)$  można odczytać z rysunku 4. Przybliżone wartości średnie częstotliwości poszczególnych składowych wynoszą: 10 Hz, 11 Hz, 12 Hz i 14 Hz. Wartości amplitud składowych sygnału  $u(t)$  można odczytać z rysunku 5. Wartości maksymalne amplitud składowych występują w chwili czasu, w której występuje maksymalna wartość przyspieszenia drgań sygnału  $u(t)$ .

### Podsumowanie

Przedstawione w artykule wyniki eksperymentów potwierdzają możliwość zastosowania czasowej transformacji Hilbert Vibration Decomposition do analizy sygnałów parasejsmicznych. W wyniku zastosowania transformacji HVD, wyznaczone zostały dla przykładowego sygnału drgań gruntu składowe sinusoidalne o modulowanej amplitudzie i częstotliwości. Z diagnostycznego punktu widzenia istotna jest możliwość wiarygodnego określania wartości częstotliwości składowych występujących w sygnale, dla nieliniowego i niestacjonarnego charakteru oddziaływania drgań parasejsmicznych na rurociągi. Znaczącą trudnością w zastosowaniu algorytmu HVD jest konieczność odpowiedniego doboru parametrów algorytmu, tzn. parametrów filtra dolnoprzepustowego oraz liczby iteracji. Jest to poważna wada tej metody, szczególnie w przypadku dekompozycji sygnałów o nieznanym charakterze.

Praca została sfinansowana ze środków na działalność statutową Katedry Metrologii i Elektroniki AGH.

### LITERATURA

- [1] Gawędzki W., Modelowanie obrazów modułów krótkookresowej transformaty Fouriera sygnałów odkształceń i drgań rurociągu oraz podłoża funkcją Gaussa, *Pomiary, Automatyka, Kontrola*, vol. 59 (2013), nr 4, 308–311
- [2] Gawędzki W., Analiza wpływu drgań gruntu na odkształcenia rurociągów w warunkach ich dodatkowego obciążenia statycznego, *Pomiary, Automatyka, Kontrola*, vol. 56 (2010), nr 8, 879–882
- [3] Feldman M., Hilbert transform in vibration analysis, *Mechanical Systems and Signal Processing* 25 (2011), 735-802
- [4] Feldman M., Hilbert Transform Applications in Mechanical Vibration, *WILEY*, ISBN: 9780470978276, (2011)
- [5] <http://hitech.technion.ac.il/feldman/hvd.html>
- [6] Braun S., Feldman M., Decomposition of non-stationary signals into varying time scales: Some aspects of the EMD and HVD methods, *Mechanical Systems and Signal Processing* 25 (2011), 2608-2630
- [7] Feldman M., Time-varying vibration decomposition and analysis based on the Hilbert transform, *Journal of Sound and Vibration* 295 (2006), 518-530
- [8] Bertha M., Golinval J.C. – Identification of Time-varying Beam Using Hilbert Vibration Decomposition, *Proceedings of the International Modal Analysis Conference (IMAC) XXXII* (2014).
- [9] Zieliński T.P., Cyfrowe przetwarzanie sygnałów – Od teorii do zastosowań, *Wydawnictwa Komunikacji i Łączności*, ISBN: 9788320616408, (2009)
- [10] Serzysko B., Sławik P., Modelowanie sygnałów drgań oraz odkształceń rurociągów wywołanych oddziaływaniami parasejsmicznymi gruntu, Praca dyplomowa magisterska, Materiały niepublikowane, AGH Kraków (2014)
- [11] Matlab User's Guide, *The Mathworks Inc.*

Autorzy: dr inż. Wacław Gawędzki, E-mail: [waga@agh.edu.pl](mailto:waga@agh.edu.pl), mgr inż. Bartosz Serzysko, E-mail: [bartosz.serzysko@agh.edu.pl](mailto:bartosz.serzysko@agh.edu.pl), AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Katedra Metrologii i Elektroniki, al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków