

Rozkłady G, B operatorów immitancyjnych zaburzonych modulacyjnie – zaburzenia wyższego rzędu

Streszczenie. W artykule przedstawiono modyfikację operatorów liniowych czasowo niezmienniczych tak, aby dostosować je do przetwarzania sygnałów prawie-okresowych zmodulowanych. Tym razem w modyfikacji tej uwzględniono zaburzenia modulacyjne wyższych rzędów co pozwala z większą dokładnością wyznaczyć prądy czynny i bierny dwójnika elektrycznego.

Abstract. The article presents a modification of linear time-invariant operators in order to adapt them to the almost-periodic modulated signal processing. This time the disruption modification includes higher level modulation which can more accurately determine the active and passive current in two-terminal electric circuit. (**The G, B distribution of modulation disrupted operators – higher level disruptions.**)

Słowa kluczowe: operatory, energia, modulacja, filtry cyfrowe

Keywords: operators, energy, modulation, digital filters.

Wprowadzenie

Głównym zadaniem teorii mocy z pojedynczym portem energetycznym jest rozkład operatora admitancyjnego na sumę:

$$Y(s) = G(s) + B(s),$$

gdzie: $G(-s) = G(s)$, $B(-s) = -B(s)$.

Ten jednoznaczny rozkład skutkuje rozbiem prądu dwójnika na dwie składowe:

$$i = Gu + Bu = i_G + i_B,$$

wzajemnie do siebie ortogonalne:

$$\|i\|^2 = \|i_G\|^2 + \|i_B\|^2.$$

Jednocześnie zachodzi:

$$(u, i) = (u, i_G),$$

co oznacza, że składowa i_B , zwana bierną, nie przenosi energii do dwójnika, ale szkodliwie powiększa wartość skuteczną prądu.

Tak jak i w poprzednich artykułach wejściowy sygnał napięcia $u(t)$ nie jest okresowy również i w tym opracowaniu. Jest on prawie okresowo zmodulowany, co powoduje tzw. modulacyjne zniekształcenie operatorów.

W tym artykule pokazuje się jakie konsekwencje pociąga za sobą uwzględnienie wyższych potęg rozwinięć modulacyjnych:

$$G(s) \xrightarrow{MOD} G(s) + \frac{dG}{ds} \frac{d}{dt} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m G}{ds^m} \frac{d^m}{dt^m},$$

$$B(s) \xrightarrow{MOD} B(s) + \frac{dB}{ds} \frac{d}{dt} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m B}{ds^m} \frac{d^m}{dt^m}.$$

Rozpatruje się realizację za pomocą filtrów cyfrowych.

Operatorowa modulacja wyższego rzędu

Przebieg zmodulowanego sygnału monoharmonicznego przez układ $H(s)$ przedstawiono na rysunku 1, gdzie: $x(t)$, $y(t)$ – sygnał wejściowy (wyjściowy), $X(t)$, $Y(t)$ – amplituda

sygnału wejściowego (wyjściowego) zależna od czasu, $e^{j\omega t}$ – sygnał nośny (sinusoida).

$$x(t) = X(t)e^{j\omega t} \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow y(t) = Y(t)e^{j\omega t}$$

Rys.1. Przechodzenie sygnału zmodulowanego przez układ liniowy, czasowo niezmienniczy o transmitancji $H(s)$.

Transformaty Laplace'a obwiedni sygnałów wejściowego $x(t)$ oraz wyjściowego $y(t)$ związane są zależnością:

$$(1) \quad \bar{Y}(s) = H(s + j\omega) \bar{X}(s).$$

Rozwijając transmitancję (1) w szereg potęgowy względem s otrzymuje się:

$$H(s + j\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m H(j\omega)}{(dj\omega)^m} s^m.$$

Dla sygnału wieloharmonicznie zmodulowanego, tj. o sygnałach wejścia $x(t)$ i wyjścia $y(t)$ postaci:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{jn\omega}(t) e^{jn\omega t},$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_{jn\omega}(t) e^{jn\omega t},$$

gdzie: $X_{jn\omega}(t)$, $Y_{jn\omega}(t)$ – widma chwilowe n-tej harmonicznej, działanie operatora $H(s)$ określa szereg:

$$\bar{Y}_{jn\omega}(t) = \left[H(jn\omega) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m H}{d(jn\omega)^m} \frac{d^m}{dt^m} \right] \bar{X}_{jn\omega}(t).$$

Uogólniając rozważanie na sygnały nieokresowe opisane całkami Fouriera:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \bar{X}(s, t) e^{st} ds; \quad y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \bar{Y}(s, t) e^{st} ds.$$

gdzie: $\bar{X}(s,t)$, $\bar{Y}(s,t)$ - tzw. chwilowe widma ciągłe, otrzymuje się operator przejścia w postaci:

$$\bar{Y}(s,t) = \left[H(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m H}{ds^m} \frac{d^m}{dt^m} \right] \bar{X}(s,t).$$

Modelowanie cyfrowe operatorów G, B z zaburzeniem modulacyjnym wyższego rzędu

Modelowaniu cyfrowemu poddano zaburzenia modulacyjne operatorów $G(s)$ i $B(s)$ uwzględniając rozwinięcia wyższego rzędu:

$$G(s) \xrightarrow{MOD} G(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m G}{ds^m} \frac{d^m}{dt^m}$$

oraz

$$B(s) \xrightarrow{MOD} B(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m B}{ds^m} \frac{d^m}{dt^m},$$

dla których zachodzi:

$$\frac{d^m G}{ds^m} = \frac{1}{2} \left[\frac{d^m Y}{ds^m} + (-1)^m \left(\frac{d^m Y}{ds^m} \right)^* \right],$$

oraz:

$$\frac{d^m B}{ds^m} = \frac{1}{2} \left[\frac{d^m Y}{ds^m} + (-1)^{m+1} \left(\frac{d^m Y}{ds^m} \right)^* \right],$$

gdzie symbol * oznacza działanie sprzężenia operatora.

Uwzględniając, że:

$$\frac{d^m Y}{ds^m} = \frac{d^m}{ds^m} \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} (-1)^m t^m y(t) e^{-st} dt,$$

funkcję $(-1)^m t^m y(t)$ przedstawia się jako ciąg cyfrowych

próbek sygnału $\left\{ (-1)^m (n\tau)^m y(n\tau) \right\}_{n=0}^{\infty}$, który dla

$m = 0, 1, 2, \dots$ został oznaczony jako $\left\{ y_n^{(m)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ [1].

Tworząc N-periodyczne filtry cyfrowe realizujące operatory $d^m G/ds^m$ oraz $d^m B/ds^m$ otrzymuje się ich cykliczne funkcje impulsowe:

$$\frac{d^m G}{ds^m} \rightarrow \tilde{g}_n^{(m)} = \frac{1}{2} y_n^{(m)} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \left[y_{pN+n}^{(m)} + (-1)^m y_{pN-n}^{(m)} \right],$$

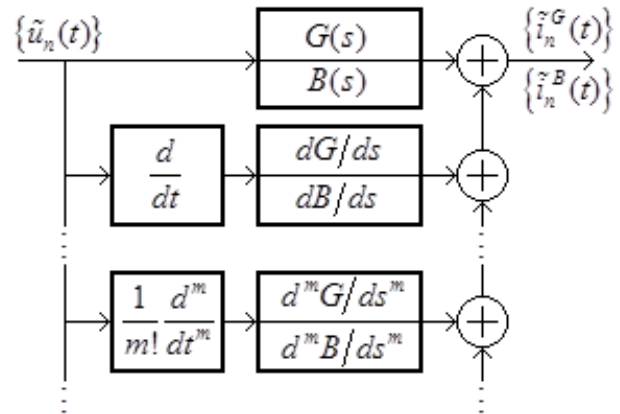
oraz:

$$\frac{d^m B}{ds^m} \rightarrow \tilde{b}_n^{(m)} = \frac{1}{2} y_n^{(m)} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \left[y_{pN+n}^{(m)} + (-1)^{m+1} y_{pN-n}^{(m)} \right],$$

dla $n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ oraz $m = 0, 1, 2, \dots$ [1].

Działanie filtrów cyfrowych symulujących operatory $d^m G/ds^m$ i $d^m B/ds^m$ na sygnał napięciowy

przedstawia rysunek 2. Na wejście filtrów podaje się sygnał periodyczny $\tilde{u}_n(t)$, tj. $n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ modulowany w czasie $t \in (-\infty, +\infty)$.



Rys.2. Schemat blokowy operatorów czynnego G, biernego B wraz z ich s-pochodnymi.

Zgodnie z algorytmem przedstawionym na rysunku 2 na jego wyjściu otrzymuje się próbki zmodulowanych periodycznych sygnałów prądów: czynnego i^G i biernego i^B .

Model stanu nieustalonego w postaci homotopii

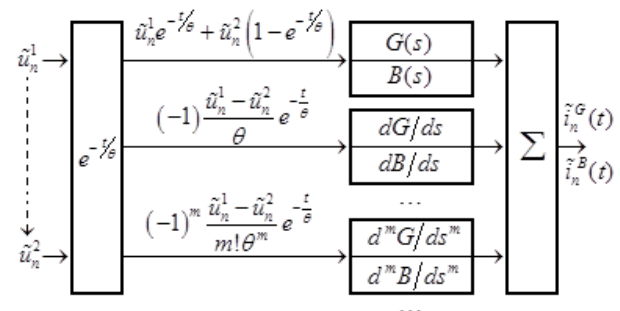
Stan nieustalony sygnału należy rozumieć w tym rozważaniu jako ciągły proces przejścia (homotopia) z jednego okresowego stanu ustalonego w inny, również okresowy i ustalony. Spośród przedstawionych w [1] postaci homotopii wybrano homotopię wykładniczą jako dowolnie wiele razy różniczkowalną co jest kluczowe w tym przypadku.

Homotopia wykładnicza ze stałą czasową θ , tj. ciągłe przejście pomiędzy stanami ustalonymi $\tilde{u}_n^1(t) \rightarrow \tilde{u}_n^2(t)$ dla $n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ i $t \in (-\infty, +\infty)$ jest przedstawiona w postaci:

$$\tilde{u}_n(t) = \tilde{u}_n^1 e^{-t/\theta} + \tilde{u}_n^2 (1 - e^{-t/\theta}) \text{ dla } \frac{t}{\theta} \in [0, \infty),$$

i posiada „m-tą” pochodną:

$$\frac{d^m \tilde{u}_n(t)}{dt^m} = (-1)^m \frac{\tilde{u}_n^1 - \tilde{u}_n^2}{\theta^m} e^{-t/\theta} \text{ dla } \frac{t}{\theta} \in [0, \infty).$$



Rys.3. Schemat blokowy operatora dla homotopii wykładniczej.

Schemat blokowy dla stanu nieustalonego przejścia sygnału periodycznego od \tilde{u}_n^1 do \tilde{u}_n^2 według homotopii

wykładniczej pokazano na rysunku 3. Układ zrealizowano za pomocą filtrów cyfrowych z zaburzeniem modulacyjnym wyższego rzędu.

Graniczne sygnały dyskretne występujące w przejściu $\tilde{u}_n^1 \rightarrow \tilde{u}_n^2$ mają tą samą częstotliwość. Realizacja takiej homotopii bez zmiany częstotliwości odbywa się w ujednoczony sposób, tj. sygnały graniczne oprócz tego, że mają taką samą częstotliwość to zdyskretyzowane ich próbki pobierane są z takim samym odstępem czasu τ .

Dyskusja zbieżności szeregu operatorowego

Aby powyższe rozważania były prawidłowe, muszą być spełnione określone warunki zbieżnościowe. Dlatego w następujący sposób określa się tzw. stabilizację filtra

$\frac{1}{m!} \frac{d^m Y}{ds^m}$. Stabilizacja to całka z modułu odpowiedzi

impulsowej w przedziale $[0, \infty)$. Tu badanie stabilizacji zostanie ograniczone do jednomodalnej składowej odpowiedzi impulsowej o stałej czasowej T . Służy ona do oszacowania szybkości zanikania odpowiedzi przejściowych filtra. Należy w tym celu udowodnić przynależność funkcji impulsowej $t^m y(t)$ do przestrzeni sygnałów absolutnie sumowalnych L^1 [2]:

$$\frac{1}{m!} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} t^m e^{-\frac{t}{T}} dt = T^m \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} x^m e^{-x} dx.$$

Całkę wyznacza się rekurencyjnie ze wzoru:

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-x} dx = m \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx = m!.$$

Zatem stabilizacja filtra $\frac{1}{m!} \frac{d^m Y}{ds^m}$ wynosi:

$$\frac{1}{m!} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} t^m e^{-\frac{t}{T}} dt = T^m$$

i funkcja impulsowa $t^m y(t)$ należy do przestrzeni sygnałów absolutnie sumowalnych L^1 .

Wnioski

Gdy sygnały wejściowe dla filtrów G, B modulowane są z większą prędkością uwzględnienie tylko początkowych składników rozwinięć Taylora operatorów zaburzonych może nie wystarczyć. Pojawiają się wtedy w rozwinięciu filtry pochodne $d^m G/ds^m$ i $d^m B/ds^m$, na przemian parzyste i nieparzyste. Operacje te ilustrują schematy blokowe na rysunkach 2 i 3. W niniejszym artykule bada się również zbieżność wspomnianych szeregów Taylora z użyciem pojęcia tzw. stabilizacji filtra.

LITERATURA

- [1] Siwczyński M., Hawron K.: Rozkłady G, B operatorów imitacyjnych zaburzonych modulacyjnie – realizacja za pomocą filtrów cyfrowych, *Przegląd Elektrotechniczny*, (w recenzji)
- [2] Hawron K.: Rachunek operatorowy dla sygnałów impulsowych i okresowych w dziedzinie czasu, *Przegląd Elektrotechniczny*, 90 (2014), nr 9, 225-228
- [3] Siwczyński M., Hawron K.: Rozkłady G, B operatorów dwójników elektrycznych i ich zaburzenia modulacyjne, *Przegląd Elektrotechniczny*, (w recenzji)
- [4] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu – obwody jednofazowe, *Przegląd Elektrotechniczny*, 86 (2010), nr 6, 196-201
- [5] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu dyskretnego, *Przegląd Elektrotechniczny*, 86 (2010), nr 7, 338-341
- [6] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu – podstawy matematyczne, metoda splotowa, *Przegląd Elektrotechniczny*, 87 (2011), nr 3, 254-257
- [7] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu – podstawy matematyczne, metoda operatorowa, *Przegląd Elektrotechniczny*, 87 (2011), nr 4, 134-141
- [8] Siwczyński M.: Postać wykładnicza i hiperboliczna operatora bądź sygnału okresowego w dziedzinie czasu – zastosowania w teorii mocy, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr 6, 194-197
- [9] Pasko M., Walczak J.: Optymalizacja energetyczno-jakościowych właściwości obwodów elektrycznych z przebiegami okresowymi niesinusoidalnymi, ZN Pol. Śl. Elektryka, 150, Gliwice 1996
- [10] Porada R.: Właściwości energetyczne procesów w układach elektrycznych, Wydawn. Pol. Poznańskiej, Rozprawy nr 369, Poznań 2002

Autorzy: prof. zw. dr hab. inż. Maciej Siwczyński, Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, E-mail: e-3@pk.edu.pl;

mgr inż. Konrad Hawron, Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków,

E-mail: konhawpk@gmail.com.