

## Analiza niestacjonarnego pola temperatury elektrycznego grzejnika podłogowego z wykorzystaniem procesora karty graficznej

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono równoległą metodę obliczania niestacjonarnego pola temperatury elektrycznego grzejnika podłogowego sterowanego regulatorem dwupołożeniowym. Dwuwymiarowe równanie przewodnictwa cieplnego, opisujące rozkład pola temperatury w grzejniku, zdyskretyzowano niejawną metodą różnic skończonych. Do rozwiązania otrzymanego układu równań zastosowano metodę BiCGStab z prekondycjonerem Jacobiego. Algorytm powyższej metody zaimplementowano na procesor karty graficznej.

**Abstract.** The article presents a parallel method of computing the non-stationary temperature field of an electric floor heater regulated by an on/off controller. A two-dimensional heat equation, which describes a temperature field distribution in the heater, was discretized with the use of the implicit finite difference method. In order to solve the obtained system of equations, the BiCGStab method with the Jacobi preconditioner was used. The algorithm of this method was implemented on a graphics processing unit. (The analysis of a non-stationary temperature field of an electric floor heater with the use of a graphics processing unit).

**Słowa kluczowe:** elektryczne ogrzewanie podłogowe, pole temperatury, niejawna metoda różnic skończonych, GPGPU.

**Keywords:** electric floor heating, temperature field, implicit finite difference method, GPGPU.

### Wstęp

Systemy ogrzewania podłogowego stosowane są w budownictwie od bardzo wielu lat i ciągle zyskują na popularności. Zdecydowały o tym przede wszystkim zalety tej metody dostarczania ciepła do pomieszczeń [1-3]: równomierny i korzystny rozkład temperatury powietrza w pomieszczeniu, odpowiednia wilgotność powietrza zmniejszająca prawdopodobieństwo powstawania chorób układu krążenia, większa powierzchnia pomieszczenia ze względu na brak zewnętrznych grzejników, możliwość wykorzystania niekonwencjonalnych źródeł energii, niskie koszty inwestycyjne oraz mniejsze zużycie energii niż w przypadku tradycyjnych systemów grzewczych. Wyróżnia się trzy typy ogrzewania podłogowego [1]: wodne, elektryczne oraz powietrzne. W przypadku ogrzewania wodnego czynnikiem grzewczym jest ciepła woda cyrkulująca w rurach wykonanych z miedzi lub z tworzywa sztucznego. Ogrzewanie elektryczne wykorzystuje energię elektryczną dostarczaną poprzez kable lub maty grzewcze. Najmniej popularne jest ogrzewanie powietrzne, w którym źródłem ciepła jest gorące powietrze przepływające przez rury lub kanały grzewcze.

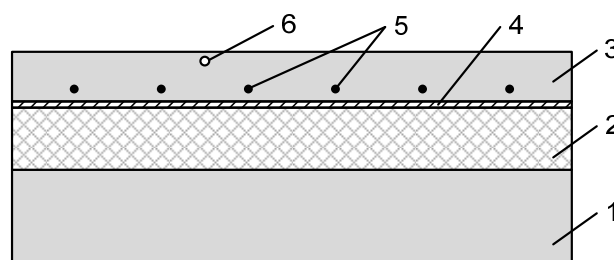
Analizie i symulacji pracy układów ogrzewania podłogowego poświęcono wiele publikacji. Dotyczyły one zarówno ogrzewania wodnego [4-7], elektrycznego [8-10], jak i powietrznego [11-13]. Stosowane w nich były metody analityczne [6-8,10,11] lub numeryczne [4,5,9,12,13]. W wielu przypadkach zastosowanie metod numerycznych w obliczeniach termicznych skutkuje długim czasem pracy komputera [5] i wymaga wykorzystania systemu o dużej wydajności (komputery równoległe, klastry, gridy). Interesującą alternatywą dla tego typu systemów są, znacznie tańsze, procesory kart graficznych (GPU). Wydajność obliczeniowa jednego procesora graficznego wielokrotnie przewyższa wydajność tradycyjnego procesora (CPU). Zastosowanie procesora graficznego w obliczeniach termicznych pozwala więc znacząco skrócić czas ich trwania. Technologia ta powszechnie nazywana jest obliczeniami ogólnego przeznaczenia realizowanymi na procesorach kart graficznych (GPGPU - General-Purpose Computing on Graphics Processing Units) [14,15].

W artykule przedstawiono zastosowanie procesora karty graficznej do wyznaczania rozkładu niestacjonarnego pola temperatury w modelu elektrycznego grzejnika

podłogowego pracującego z regulatorem dwupołożeniowym. Otrzymane wyniki przedstawiono w postaci przebiegów i rozkładów temperatury w modelu grzejnika. Oceniono przyspieszenie obliczeń równoległych wykonywanych na procesorze karty graficznej.

### Model grzejnika i zagadnienie brzegowo-początkowe

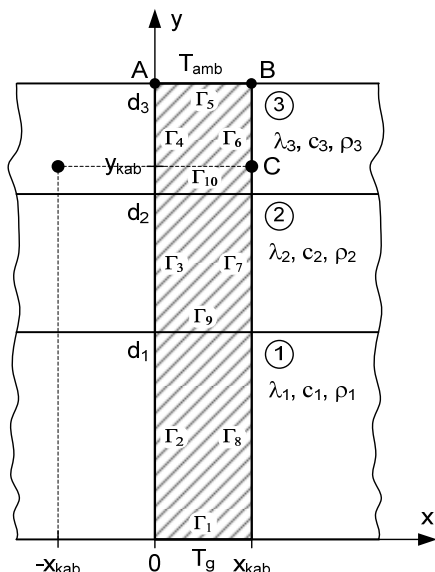
Typową konstrukcją podłogi [1] z elektrycznym ogrzewaniem przedstawia rysunek 1.



Rys.1. Przekrój podłogi z elektrycznym ogrzewaniem podłogowym: 1 - podkład betonowy, 2 - izolacja cieplna, 3 - wylewka betonowa, 4 - izolacja przeciwwilgociowa 5 - kable grzejne, 6 - czujnik temperatury

Na podkładzie betonowym umieszcza się izolację termiczną wykonaną najczęściej z utwardzonego styropianu. Izolacja ta zapobiega przenikaniu ciepła w dół. Na styropianie układa się izolację przeciwwilgociową. Kabel grzejny umieszczany jest na warstwie wylewki wstępnej i mocowany do podłoża za pomocą taśmy lub siatki montażowej. Następnie wylewana jest betonowa warstwa wyrównująca. Na zewnętrznych pionowych krawędziach podłogi stosuje się dodatkową izolację w postaci pasków lub taśm brzegowych zapobiegających przenikaniu ciepła przez ściany pomieszczenia. Na tak wykonanym grzejniku podłogowym można umieścić zaprawę klejową i posadzkę lub położyć odpowiednią wykładzinę. Regulację temperatury w pomieszczeniu zapewnia termostat. Czujnik temperatury montowany jest (w odległości minimum 0,5 m od pionowej krawędzi) w strefie grzejnej, jak najbliższej górnej powierzchni wylewki i w równej odległości pomiędzy dwoma odcinkami kabla. Moc i długość kabla dobierana jest na podstawie wymaganej mocy grzewczej, wynikającej ze strat ciepła w pomieszczeniu. Natomiast odległość pomiędzy

odcinkami kabla (tzw. moduł C-C) określana jest na podstawie powierzchni użytkowej pomieszczenia i długości kabla.



Rys.2. Analizowany fragment elektrycznego grzejnika podłogowego

W analizowanym modelu grzejnika podłogowego założono, że jego konstrukcja składa się z trzech warstw (rys.2): podkładu betonowego, izolacji cieplnej i wylewki betonowej. Pominięto izolację przeciwwilgociową ze względu na jej małą grubość (ok. 0,2 mm) i niewielki wpływ na przepływ ciepła. Przyjmując, że długość rozpatrywanego układu jest znacznie większa niż wymiary jego przekroju poprzecznego, rozkład termicznego pola w grzejniku może być modelowany jako płasko-równoległy. W takim przypadku pole temperatury opisuje dwuwymiarowe równanie przewodnictwa cieplnego [16]:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 T_i(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i(x, y, t)}{\partial y^2} - \frac{1}{\chi_i} \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial t} = -\frac{g_i(x, y, t)}{\lambda_i},$$

gdzie  $T_i(x, y, t)$  jest rozkładem temperatury w  $i$ -tej warstwie grzejnika ( $i = 1, 2, 3$ ) oraz jest funkcją współrzędnych geometrycznych punktu  $(x, y)$  i czasu  $t$ . Występujące w (1)  $g_i(x, y, t)$  określa objętościową wydajność źródeł ciepła ( $W/m^3$ ), zaś  $\chi_i$  dyfuzyjność termiczną  $i$ -tej warstwy, opisaną zależnością:

$$(2) \quad \chi_i = \frac{\lambda_i}{c_i \rho_i}.$$

Ze względu na niewielki zakres temperatury pracy układu, założono stałe wartości (niezależne od temperatury) przewodności cieplnej -  $\lambda_i$ , ciepła właściwego -  $c_i$  oraz gęstości masy -  $\rho_i$  w każdej warstwie modelu grzejnika.

Przyjęto, że pionowe ściany grzejnika są idealnie izolowane i nie następuje na nich wymiana ciepła z otoczeniem. Wtedy w połowie odległości między kablami ( $x = 0$ ) temperatura  $T_i(x, y, t)$  osiąga minimum, zaś w punkcie położenia kabla ( $x = x_{kab}$ ) - maksimum. W takim przypadku spełnione są następujące warunki:

$$(3) \quad \left. \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{dla } y \in \langle 0, d_3 \rangle, t \geq 0,$$

$$(4) \quad \left. \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=x_{kab}} = 0 \quad \text{dla } y \in \langle 0, d_3 \rangle, t \geq 0.$$

Przestrzenno-czasowy rozkład pola temperatury jest zatem powtarzalny co  $2x_{kab}$  i symetryczny względem osi  $y$ . Analizę rozkładu tego pola można zatem ograniczyć do obszaru wyróżnionego na rysunku 2.

Na górnej powierzchni grzejnika (kontur  $\Gamma_5$ ) następuje oddawanie ciepła do otoczenia przez konwekcję i promieniowanie. Opisuje to warunek brzegowy III rodzaju (Hankela):

$$(5) \quad -\lambda_3 \left. \frac{\partial T_3(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=d_3} = \alpha \cdot [T_3(x, y = d_3, t) - T_{amb}]$$

dla  $x \in \langle 0, x_{kab} \rangle, t \geq 0,$

gdzie  $\alpha$  jest całkowitym współczynnikiem przyjmowania ciepła, zaś  $T_{amb}$  - temperaturą otoczenia.

Dolna powierzchnia modelu (kontur  $\Gamma_1$ ) znajduje się na gruncie o stałej temperaturze  $T_g$ :

$$(6) \quad T_1(x, y = 0, t) = T_g \quad \text{dla } x \in \langle 0, x_{kab} \rangle, t \geq 0.$$

Na obu granicach warstw (kontury  $\Gamma_9$  i  $\Gamma_{10}$ ) muszą być spełnione warunki ciągłości temperatury (7a,b) i strumienia ciepła (8a,b):

$$(7a) \quad T_1(x, y = d_1, t) = T_2(x, y = d_1, t) \quad \text{dla } x \in \langle 0, x_{kab} \rangle, t \geq 0,$$

$$(7b) \quad T_2(x, y = d_2, t) = T_3(x, y = d_2, t) \quad \text{dla } x \in \langle 0, x_{kab} \rangle, t \geq 0,$$

$$(8a) \quad \lambda_1 \left. \frac{\partial T_1(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=d_1} = \lambda_2 \left. \frac{\partial T_2(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=d_1}$$

dla  $x \in \langle 0, x_{kab} \rangle, t \geq 0,$

$$(8b) \quad \lambda_2 \left. \frac{\partial T_2(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=d_2} = \lambda_3 \left. \frac{\partial T_3(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=d_2}$$

dla  $x \in \langle 0, x_{kab} \rangle, t \geq 0.$

Masa kabla jest pomijalnie mała w stosunku do masy betonu. Średnica kabla jest niewielka w porównaniu do przekroju poprzecznego grzejnika podłogowego. Z powyższych względów w analizie nie jest uwzględniana struktura kabla i pole w jego wnętrzu. Kabel grzejny modelowany jest małym otoczeniem  $S_{kab}$  (powierzchnią kontrolną) osi kabla. Wspomniana powierzchnia jest źródłem ciepła i zostanie zdefiniowana w następnym rozdziale. Oś kabla znajduje się w punkcie o współrzędnych  $(x_{kab}, y_{kab})$ . W pozostałych punktach modelu (poza otoczeniem  $S_{kab}$ ) gęstość wydzielanej mocy zeruje się:

$$(9) \quad g_i(x, y, t) = 0 \quad \text{dla } (x, y) \notin S_{kab} \cap t \geq 0.$$

Układ grzejnika podłogowego sterowany jest regulatorem dwupołożeniowym. Czujnik regulatora znajduje się pomiędzy dwoma odcinkami kabla - punkt A na rysunku 2. Jeśli temperatura punktu A osiągnie wartość  $T_{OFF}$ , to przepływ prądu w kablu grzewczym jest przerywany i wtedy:

$$(10) \quad T(A, t) \geq T_{OFF} \cap (x, y) \in S_{kab} \Rightarrow g_i(x, y, t) = 0.$$

Gdy temperatura punktu A spadnie do wartości  $T_{ON}$  ( $T_{ON} < T_{OFF}$ ), to przepływ prądu jest wznowiany:

$$(11) \quad T(A, t) \leq T_{ON} \cap (x, y) \in S_{kab} \Rightarrow g_i(x, y, t) = g_{kab},$$

gdzie  $g_{kab}$  jest stałą objętościową wydajnością źródła ciepła.

W chwili  $t = 0$  układ znajduje się w stanie ustalonym i kabel nie jest zasilany. Ze względu na inne wartości temperatury otoczenia ( $T_{amb}$ ) i gruntu ( $T_g$ ) oraz przyjęte warunki brzegowe, nie można założyć jednakowej temperatury stanu ustalonego dla wszystkich punktów modelu. Konieczne jest wyznaczenie rozkładu pola temperatury w stanie ustalonym  $T_{ui}(x,y)$  przy wyłączonym źródle ciepła, co opisuje dwuwymiarowe równanie przewodnictwa [16]:

$$(12) \quad \frac{\partial^2 T_{ui}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{ui}(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

W celu ujednoznaczenia rozwiązania powyższego równania należy przyjąć podobne warunki brzegowe (3)-(8) jak w przypadku równania (1). We wspomnianych zależnościach należy zastąpić temperaturę  $T_i(x,y,t)$  temperaturą  $T_{ui}(x,y)$ .

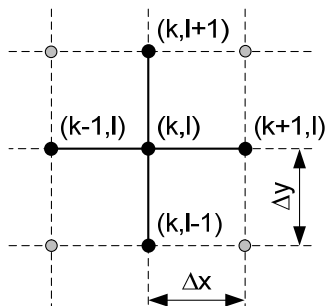
Rozwiązanie równania (12) ze zmodyfikowanymi warunkami (3)-(8) staje się warunkiem początkowym dla równania (1):

$$(13) \quad T_i(x,y,t=0) = T_{ui}(x,y).$$

Równania (1)-(11) oraz (13) opisują zatem zagadnienie brzegowo-początkowe, którego rozwiązanie modeluje pracę elektrycznego grzejnika podłogowego z regulatorem dwupołożeniowym.

#### Dyskretyzacja zagadnienia brzegowo-początkowego

Do dyskretyzacji zagadnienia brzegowo-początkowego zastosowano niejawną metodę różnic skończonych [16]. Przedstawiony na rysunku 2 fragment przekroju elektrycznego grzejnika podłogowego pokryto siatką różnic skończonych. Sposób numeracji węzłów siatki pokazano na rysunku 3.



Rys.3. Fragment siatki różnic skończonych

Równanie (1) dyskretyzowano w przestrzeni i czasie. Drugie pochodne przestrzenne zastąpiono centralnymi ilorazami różnicowymi, zaś pochodną pierwszego rzędu względem czasu ilorazem różnicowym przednim. Otrzymano w ten sposób dwuwymiarowe równanie przewodnictwa cieplnego w postaci różnicowej:

$$(14) \quad \frac{T_{k+1,l}^{n+1} + T_{k-1,l}^{n+1} - 2T_{k,l}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{k,l+1}^{n+1} + T_{k,l-1}^{n+1} - 2T_{k,l}^{n+1}}{(\Delta y)^2} - \frac{1}{\chi} \frac{T_{k,l}^{n+1} - T_{k,l}^n}{\Delta t} = \frac{-g_i}{\lambda_i},$$

gdzie indeksy dolne ( $k,l$ ) określają położenie węzła w siatce różnic skończonych, zaś indeks górny  $n$  oznacza kolejny krok czasu.

Zakładając jednakowy skok siatki w kierunku osi  $x$  i  $y$  ( $\Delta x = \Delta y$ ) oraz dokonując odpowiednich przekształceń,

równanie (14) można zapisać jako:

$$(15) \quad (1 + 4Fo_i)T_{k,l}^{n+1} - Fo_i(T_{k+1,l}^{n+1} + T_{k-1,l}^{n+1} + T_{k,l+1}^{n+1} + T_{k,l-1}^{n+1}) = T_{k,l}^n + \frac{g_i(\Delta x)^2 Fo_i}{\lambda_i},$$

gdzie  $Fo_i$  jest liczbą Fouriera w  $i$ -tej warstwie modelu grzejnika:

$$(16) \quad Fo_i = \frac{\chi_i \Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

W modelowaniu numerycznym kabla grzejnego wydajność źródła ciepła związana jest z powierzchnią kontrolną, którą jest połowa prostokąta utworzonego przez skok siatki różnic skończonych. Oś kabla znajduje się na brzegu tego prostokąta. Wynika to z warunków symetrii (3), (4). Zatem stała objętościowa wydajność źródła ciepła wyraża się zależnością:

$$(17) \quad g_{kab} = \frac{Q_{kab}}{\frac{\Delta x}{2} \Delta y},$$

gdzie  $Q_{kab}$  jest liniową gęstością wydzielanej mocy ( $W/m$ ).

Sterowanie źródłem ciepła wynika z opisanej w poprzednim rozdziale zasady pracy regulatora:

$$(18) \quad g_i = \begin{cases} g_{kab} & \text{dla } n=0 \cup T_A^n \leq T_{ON}, \\ 0 & \text{dla } T_A^n \geq T_{OFF} \end{cases},$$

gdzie  $T_A^n$  jest temperaturą punktu  $A$ .

Ze względu na sposób modelowania kabla grzejnego, objętościowe źródło ciepła  $g_i$  będzie występowało tylko w równaniu jednego węzła leżącego na konturze  $\Gamma_6$  (punkt C na rysunku 2). W przypadku węzłów ( $k,l$ ) leżących wewnątrz analizowanego modelu i mających cztery węzły sąsiadujące ( $k+1,l$ ), ( $k-1,l$ ), ( $k,l+1$ ), ( $k,l-1$ ), wydajność  $g_i = 0$ . Zatem równanie (15) można zapisać w prostszej formie:

$$(19) \quad (1 + 4Fo_i)T_{k,l}^{n+1} - Fo_i(T_{k+1,l}^{n+1} + T_{k-1,l}^{n+1} + T_{k,l+1}^{n+1} + T_{k,l-1}^{n+1}) = T_{k,l}^n.$$

Węzły leżące na granicach modelu lub na granicach materiałów wymagają wyznaczenia innych równań, uwzględniających warunki brzegowe. Można tego dokonać poprzez eliminację z (19) nieistniejących węzłów [12]. W przypadku brzegu oddającego ciepło do otoczenia (kontur  $\Gamma_3$ ) należy z równania (19) wyeliminować węzeł ( $k,l+1$ ). W tym celu zastosowano warunek (5) przekształcony do postaci różnicowej:

$$(20) \quad -\lambda_3 \frac{T_{k,l+1}^{n+1} - T_{k,l-1}^{n+1}}{2\Delta y} = \alpha [T_{k,l}^{n+1} - T_{amb}].$$

Wyznaczając z (20) temperaturę w węzle ( $k,l+1$ ), wstawiając do (19) i porządkując, otrzymano wzór różnicowy dla węzłów leżących na konturze  $\Gamma_3$ :

$$(21) \quad (1 + 2Fo_3(2 + Bi))T_{k,l}^{n+1} - Fo_3(T_{k+1,l}^{n+1} + T_{k-1,l}^{n+1} + 2T_{k,l-1}^{n+1}) = T_{k,l}^n + 2BiFo_3T_{amb},$$

gdzie  $Bi$  jest liczbą Biota wyrażoną zależnością:

$$(22) \quad Bi = \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\lambda_3} \quad \text{dla} \quad \Delta x = \Delta y.$$

W przypadku wyznaczania równań dla węzłów znajdujących się na powierzchniach adiabatycznych  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  i  $\Gamma_4$  zastosowano warunek brzegowy (3) zapisany w postaci różnicowej:

$$(23) \quad \frac{T_{k+1,l}^{n+1} - T_{k-1,l}^{n+1}}{2\Delta x} = 0.$$

Następnie z (23) wyznaczono temperaturę w węźle  $(k-1,l)$ , którą wstawiono do (19), otrzymując następującą zależność:

$$(24) \quad (1 + 4Fo_i)T_{k,l}^{n+1} - Fo_i(2T_{k+1,l}^{n+1} + T_{k,l+1}^{n+1} + T_{k,l-1}^{n+1}) = T_{k,l}^n.$$

W analogiczny sposób, stosując warunek brzegowy (4), wyprowadzono równania dla powierzchni adiabatycznych  $\Gamma_6$ ,  $\Gamma_7$  i  $\Gamma_8$ :

$$(25) \quad (1 + 4Fo_i)T_{k,l}^{n+1} - Fo_i(2T_{k-1,l}^{n+1} + T_{k,l+1}^{n+1} + T_{k,l-1}^{n+1}) = T_{k,l}^n.$$

Na konturze  $\Gamma_6$  znajduje się jeden węzeł siatki różnic skończonych odpowiadający położeniu kabla grzejnego w modelu. Równanie dla tego węzła otrzymano z (15) poprzez wyeliminowanie węzła  $(k+1,l)$ :

$$(26) \quad (1 + 4Fo_3)T_{k,l}^{n+1} - Fo_3(2T_{k-1,l}^{n+1} + T_{k,l+1}^{n+1} + T_{k,l-1}^{n+1}) = T_{k,l}^n + \frac{g_3(\Delta x)^2 Fo_3}{\lambda_3},$$

gdzie zgodnie z (18) zachodzi  $g_3 = g_{kab}$ .

Na granicach materiałów (kontury  $\Gamma_9$  i  $\Gamma_{10}$ ) muszą być spełnione warunki (7a,b) i (8a,b). Z powodu większej dokładności do wyznaczenia równań dla węzłów leżących na tych konturach zastosowano jednak metodę bilansu energetycznego [16]. Otrzymane równania mają następującą postać:

$$(27) \quad \left( 4\lambda_i + 4\lambda_{i+1} + \frac{\lambda_i}{Fo_i} + \frac{\lambda_{i+1}}{Fo_{i+1}} \right) T_{k,l}^{n+1} - (\lambda_i + \lambda_{i+1}) T_{k+1,l}^{n+1} - (\lambda_i + \lambda_{i+1}) T_{k-1,l}^{n+1} - 2\lambda_{i+1} T_{k,l+1}^{n+1} - 2\lambda_i T_{k,l-1}^{n+1} = \left( \frac{\lambda_i}{Fo_i} + \frac{\lambda_{i+1}}{Fo_{i+1}} \right) T_{k,l}^n \quad \text{dla} \quad i = 1, 2$$

Tę samą metodę zastosowano do wyprowadzenia zależności dla węzłów rogowych. W przypadku węzłów łączących brzeg adiabatyczny z brzegiem oddającym ciepło otrzymano odpowiednio:

$$(28a) \quad (1 + 2Fo_3(2 + Bi))T_{k,l}^{n+1} - 2Fo_3(T_{k+1,l}^{n+1} + T_{k,l-1}^{n+1}) = T_{k,l}^n + 2BiFo_3T_{amb} \quad \text{dla} \quad \Gamma_4 \cap \Gamma_5,$$

$$(28b) \quad (1 + 2Fo_3(2 + Bi))T_{k,l}^{n+1} - 2Fo_3(T_{k-1,l}^{n+1} + T_{k,l+1}^{n+1}) = T_{k,l}^n + 2BiFo_3T_{amb} \quad \text{dla} \quad \Gamma_5 \cap \Gamma_6.$$

Jeszcze inną postać przyjmą wzory dla węzłów łączących granicę materiałów z powierzchnią adiabatyczną. Równania dla węzłów łączących kontury  $\Gamma_2 \cap \Gamma_3 \cap \Gamma_9$  oraz  $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 \cap \Gamma_{10}$  będą miały postać:

$$(29) \quad \left( 4\lambda_i + 4\lambda_{i+1} + \frac{\lambda_i}{Fo_i} + \frac{\lambda_{i+1}}{Fo_{i+1}} \right) T_{k,l}^{n+1} - 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) T_{k+1,l}^{n+1} - 2\lambda_{i+1} T_{k,l+1}^{n+1} - 2\lambda_i T_{k,l-1}^{n+1} = \left( \frac{\lambda_i}{Fo_i} + \frac{\lambda_{i+1}}{Fo_{i+1}} \right) T_{k,l}^n \quad \text{dla} \quad i = 1, 2,$$

zaś dla węzłów łączących kontury  $\Gamma_7 \cap \Gamma_8 \cap \Gamma_9$  oraz  $\Gamma_6 \cap \Gamma_7 \cap \Gamma_{10}$ :

$$(30) \quad \left( 4\lambda_i + 4\lambda_{i+1} + \frac{\lambda_i}{Fo_i} + \frac{\lambda_{i+1}}{Fo_{i+1}} \right) T_{k,l}^{n+1} - 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) T_{k-1,l}^{n+1} - 2\lambda_{i+1} T_{k,l+1}^{n+1} - 2\lambda_i T_{k,l-1}^{n+1} = \left( \frac{\lambda_i}{Fo_i} + \frac{\lambda_{i+1}}{Fo_{i+1}} \right) T_{k,l}^n \quad \text{dla} \quad i = 1, 2.$$

Wszystkie węzły znajdujące się na dolnej powierzchni podłogi (kontur  $\Gamma_1$ ) mają stałą temperaturę równą temperaturze gruntu  $T_g$ .

Zapisując odpowiednie równania różnicowe (14)-(30) dla kolejnych węzłów siatki różnic skończonych otrzymuje się układ algebraicznych równań liniowych. W przypadku zastosowania siatki o  $K$  węzłach w kierunku osi  $x$  i  $L$  węzłach w kierunku osi  $y$ , układ będzie liczył  $K \cdot (L-1)$  równań. Odjęcie wartości 1 od  $L$  wynika z faktu, iż temperatura węzłów znajdujących się na konturze  $\Gamma_1$  jest znana.

Rozpoczęcie analizy stanu nieustalonego grzejnika podłogowego wymaga wyznaczenia rozkładu pola temperatury w stanie ustalonym przed załączeniem zasilania. Odpowiednie zagadnienie brzegowe postawiono na końcu poprzedniego rozdziału. Obecnie równanie (12) zostało zdyskretyzowane poprzez zastąpienie drugich pochodnych przestrzennych centralnymi ilorazami różnicowymi. Po dokonaniu odpowiednich przekształceń równanie to przyjęło następującą postać różnicową:

$$(31) \quad T_{k+1,l} + T_{k-1,l} + T_{k,l+1} + T_{k,l-1} - 4T_{k,l} = 0.$$

Powyższa zależność obowiązuje dla węzłów znajdujących się wewnątrz analizowanego modelu i mających cztery węzły sąsiadujące. Dla węzłów znajdujących się na granicach modelu lub materiałów wyznaczono nowe równania. W tym celu zastosowano eliminację brakujących węzłów lub metodę bilansu energetycznego.

W przypadku brzegu oddającego ciepło do otoczenia (kontur  $\Gamma_5$ ) równania będą miały następującą postać:

$$(32) \quad T_{k+1,l} + T_{k-1,l} + 2T_{k,l-1} - 2 \left( \frac{\alpha \Delta x}{\lambda_3} \right) T_{k,l} = -2 \frac{\alpha \Delta x}{\lambda_3} T_{amb}.$$

Dla powierzchni adiabatycznych  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  i  $\Gamma_4$  otrzymano:

$$(33) \quad 2T_{k+1,l} + T_{k,l+1} + T_{k,l-1} - 4T_{k,l} = 0,$$

zaś dla powierzchni  $\Gamma_6$ ,  $\Gamma_7$  i  $\Gamma_8$ :

$$(34) \quad 2T_{k-1,l} + T_{k,l+1} + T_{k,l-1} - 4T_{k,l} = 0.$$

Równania dla węzłów na granicach materiałów (kontury  $\Gamma_9$  i  $\Gamma_{10}$ ) opisuje poniższa zależność:

$$(35) \quad (\lambda_i + \lambda_{i+1}) T_{k+1,l} + (\lambda_i + \lambda_{i+1}) T_{k-1,l} + 2\lambda_{i+1} T_{k,l+1} + 2\lambda_i T_{k,l-1} - 4(\lambda_i + \lambda_{i+1}) T_{k,l} = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2.$$

Dla węzłów rogowych łączących brzeg adiabatyczny z brzegiem oddającym ciepło  $\Gamma_4 \cap \Gamma_5$  oraz  $\Gamma_5 \cap \Gamma_6$  wyprowadzono, odpowiednio, następujące równania:

$$(36a) \quad T_{k+1,l} + T_{k,l-1} - \left( \frac{\alpha \Delta x}{\lambda_3} + 2 \right) T_{k,l} = - \frac{\alpha \Delta x}{\lambda_3} T_{amb},$$

$$(36b) \quad T_{k-1,l} + T_{k,l-1} - \left( \frac{\alpha \Delta x}{\lambda_3} + 2 \right) T_{k,l} = - \frac{\alpha \Delta x}{\lambda_3} T_{amb}.$$

Równania dla węzłów łączących granicę materiałów z powierzchnią adiabatyczną  $\Gamma_2 \cap \Gamma_3 \cap \Gamma_9$  oraz  $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 \cap \Gamma_{10}$  będą miały postać:

$$(37) \quad (\lambda_i + \lambda_{i+1})T_{k+1,l} + \lambda_{i+1}T_{k,l+1} + \lambda_i T_{k,l-1} - 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})T_{k,l} = 0 \quad \text{dla } i=1,2,$$

zaś dla węzłów  $\Gamma_7 \cap \Gamma_8 \cap \Gamma_9$  oraz  $\Gamma_6 \cap \Gamma_7 \cap \Gamma_{10}$ :

$$(38) \quad (\lambda_i + \lambda_{i+1})T_{k-1,l} + \lambda_{i+1}T_{k,l+1} + \lambda_i T_{k,l-1} - 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})T_{k,l} = 0 \quad \text{dla } i=1,2.$$

Wszystkie węzły znajdujące się na konturze  $\Gamma_j$  mają stałą temperaturę równą temperaturze gruntu  $T_g$ .

Zapisując równania różnicowe (31)-(38) dla wszystkich węzłów siatki różnic skończonych otrzymuje się układ algebraicznych równań liniowych, którego rozwiązanie jest warunkiem początkowym dla układu równań opisującego pracę grzejnika w stanie nieustalonym.

### Program komputerowy rozwiązujący układ równań różnicowych

Do rozwiązania układu równań różnicowych napisano autorski program komputerowy w języku C++. Działanie programu można podzielić na kilka etapów. W pierwszym etapie odczytywana jest geometria analizowanego modelu grzejnika podłogowego oraz jego parametry materiałowe. Następnie na podstawie geometrii i odczytanego sposobu podziału modelu, generowana jest siatka węzłów różnic skończonych. Każdemu węzłowi przypisywane są dwa parametry: typ węzła i indeks materiału. Typ węzła wynika z miejsca jego położenia w modelu (wewnętrzny, na konturze, rogowy) oraz przypisanych mu warunków brzegowych. Indeks materiału oznacza natomiast typ materiału odpowiadający danemu węzłowi lub zawiera informację o położeniu węzła na granicy materiałów.

W trzecim etapie obliczane są wartości współczynników dwóch układów liniowych równań algebraicznych. Pierwszy układ równań odpowiada za wyznaczenie pola temperatury w stanie ustalonym ( $t=0$ ) przy wyłączonym źródle ciepła. Natomiast drugi układ dotyczy analizy pracy grzejnika w stanie nieustalonym. Macierze współczynników obu układów równań są rzadkie (zawierają bardzo małą liczbę elementów niezerowych). Z tego względu do przechowywania ich w pamięci zastosowano metodę CSR (Compressed Sparse Row) [17, 18]. W metodzie tej elementy niezerowe zapamiętywane są wierszami.

W ostatnim etapie pracy programu rozwiązywane są oba układy równań. Jako pierwsze wyznaczone są wartości pola temperatury w stanie ustalonym przed włączeniem zasilania. Operacja ta wymaga tylko jednokrotnego rozwiązania układu. Natomiast wyznaczenie niestacjonarnego pola temperatury wymaga wielokrotnego rozwiązania drugiego układu równań dla kolejnych chwil czasu. W tym przypadku jako przybliżenie początkowe (krok  $n=0$ ) przyjmuje się wartości pola temperatury w stanie ustalonym przed włączeniem zasilania.

W kolejnych krokach ( $n=2, 3, \dots$ ) jako przybliżenie początkowe stosowane są wartości rozwiązania z kroku poprzedniego. Włączenie lub wyłączenie zasilania kabla grzejnego wpływa na prawą stronę drugiego układu równań. Z tego względu w programie zdefiniowano dwa wektory wyrazów wolnych odpowiadające włączonemu i wyłączonemu zasilaniu kabla grzejnego. W zależności od aktualnego stanu pracy grzejnika stosowany jest odpowiedni wektor. Obliczenia wykonywane są dla określonej liczby kroków wynikającej z długości przedziału czasu, w którym analizowana jest praca grzejnika.

Macierze współczynników obu rozwiązywanych układów równań są niesymetryczne i rzadkie. Z tego względu do rozwiązywania układów równań zastosowano metodę iteracyjną - stabilizowaną metodę wzajemnie sprzężonych gradientów (BiCGStab) [17, 18, 19] z prekondycjonerem Jacobiego (diagonalnym) [17, 18]. Głównym zadaniem prekondycjonera jest poprawa zbieżności metody iteracyjnej.

Rozwiązywanie układów równań jest najbardziej czasochłonnym etapem pracy całego programu. Algorytm zastosowanej metody BiCGStab składa się z szeregu typowych operacji algebraicznych na wektorach i macierzach (np. mnożenia macierzy przez wektor, dodawania wektorów, obliczania iloczynu skalarnego i norm wektorów). Skrócenie czasu wykonywania powyższych operacji osiągnięto poprzez zastosowanie w obliczeniach procesora karty graficznej i środowiska CUDA (Compute Unified Device Architecture) [14, 15]. CUDA umożliwia pisanie, kompilowanie i uruchamianie programów działających jednocześnie na tradycyjnych procesorach i na procesorach graficznych firmy Nvidia. Wraz ze środowiskiem dostarczane są dwie biblioteki implementujące procedury algebry liniowej na procesor GPU. W bibliotece CUBLAS [20] znajdują się funkcje przeznaczone dla macierzy gęstych, zaś w bibliotece CUSPARSE [21] - dla macierzy rzadkich. W opracowanym programie komputerowym zastosowano procedury z obu bibliotek.

### Parametry modelu i programu komputerowego

W analizowanym modelu elektrycznego grzejnika podłogowego (rys.2) założono, że pierwsza i trzecia warstwa wykonane są z betonu o jednakowych parametrach materiałowych, zaś druga warstwa - ze styropianu. Przyjęte grubości warstw oraz wartości parametrów materiałowych zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Parametry materiałowe modelu grzejnika podłogowego

Parametr	Oznaczenie [jednostka]	Warstwa $i$		
		1	2	3
Grubość warstwy	- [m]	0,15	0,1	0,08
Przewodność cieplna	$\lambda_i$ [W/(m·K)]	1,0	0,04	1,0
Ciepło właściwe	$c_i$ [J/(kg·K)]	840	1460	840
Gęstość masy	$\rho_i$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2000	20	2000

Pozostałe dane zastosowane w symulacji przedstawiono poniżej:

$$(39) \quad T_{amb} = 14^\circ C, \quad T_{ON} = 25,5^\circ C, \quad T_{OFF} = 26,5^\circ C, \\ T_g = 10^\circ C, \quad \alpha = 9 \text{ W}/(m^2 K), \quad Q_{kab} = 20 \text{ W}/m, \\ x_{kab} = 0,07 \text{ m}, \quad y_{kab} = 0,27 \text{ m}.$$

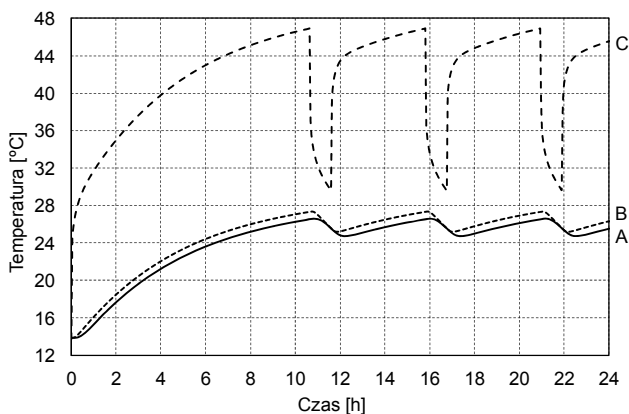
Analizowany fragment modelu grzejnika pokryto siatką różnic skończonych o  $K=29$  węzłach w kierunku osi  $x$  i  $L=133$  węzłach w kierunku osi  $y$ . Zastosowano siatkę o skoku  $\Delta x = \Delta y = 0,0021875 \text{ m}$ . Otrzymano w ten sposób układy algebraicznych równań liniowych posiadające 3 828

niewiadomych. Analizowano niestacjonarne pole temperatury w ciągu 24 h od włączenia zasilania kabla grzejnego. Przy założonej długości kroku po czasie  $\Delta t = 2 s$ , dało to w sumie 43 200 kroków metody obliczeniowej.

Wszystkie obliczenia wykonano na komputerze klasy PC wyposażonym w procesor Intel Core 2 Quad CPU Q9650 3,00 GHz, 4 GB pamięci RAM DDR3, dysk SerialATA 512 GB oraz kartę graficzną Gigabyte Nvidia GeForce GTX480 (480 rdzeni CUDA, 1536 MB pamięci RAM GDDR5). Komputer pracował pod kontrolą 64-bitowego systemu operacyjnego Microsoft Windows 7 Professional PL. Na komputerze zostało zainstalowane środowisko Microsoft Visual Studio 2008 Standard Edition oraz współpracujące z nim środowisko CUDA w wersji 5.5. W opracowanym programie komputerowym wszystkie obliczenia zmiennoprzecinkowe wykonywano w podwójnej precyzji (double).

### Wyniki obliczeń i ich interpretacja

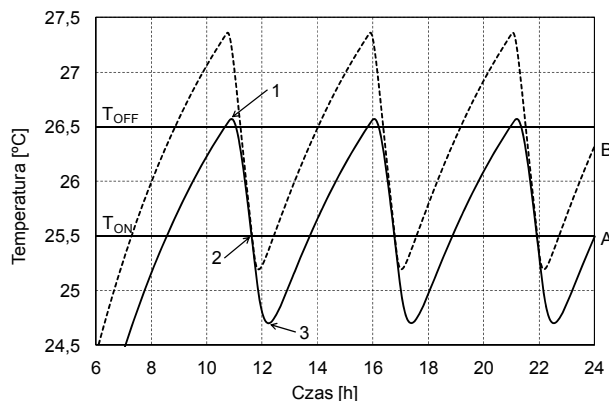
Na rysunku 4 przedstawiono otrzymane przebiegi temperatury w trzech punktach grzejnika (A, B, C). W analizowanym zakresie czasu pracy układu można wyróżnić dwa charakterystyczne przedziały. W pierwszym, trwającym ok. 10,5 godziny, następuje „rozgrzewanie” grzejnika podłogowego. Natomiast w drugim przedziale układ pracuje z regulatorem. Punkt A znajdują się na powierzchni podłogi, pomiędzy dwoma odcinkami kabla grzejnego (rys.2). Jego położenie odpowiada miejscu umieszczenia czujnika temperatury. Temperatura punktu A jest najniższa na powierzchni podłogi, gdyż jego odległość od źródła ciepła jest największa. Punkt B znajduje się bezpośrednio nad kablem grzejnym, więc jego temperatura jest najwyższa wśród wszystkich punktów powierzchni podłogi. Punkt C określa natomiast temperaturę kabla grzejnego. Jest to najwyższa temperatura w całym przekroju poprzecznym analizowanego modelu. Temperatura ta ulega największym zmianom po włączeniu zasilania kabla grzejnego.



Rys.4. Przebieg temperatury w wybranych punktach grzejnika

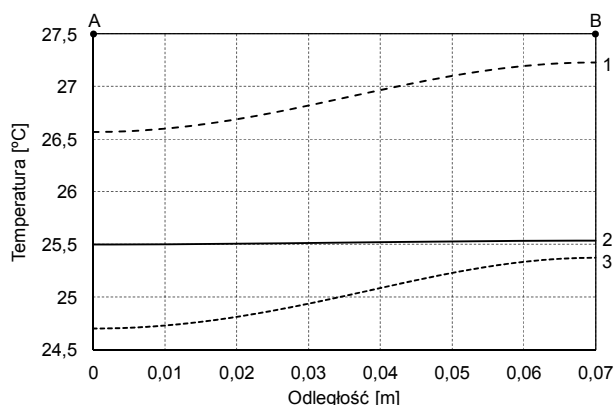
Wpływ pracy regulatora na temperaturę w charakterystycznych punktach A i B pokazano na rysunku 5. Po włączeniu zasilania kabla grzejnego temperatura wszystkich punktów modelu grzejnika rośnie. Gdy temperatura punktu A osiągnie wartość  $T_{OFF}$  następuje wyłączenie zasilania kabla. Pomimo tego temperatura punktu A jeszcze przez pewien czas wzrasta, osiągając wartość maksymalną w punkcie 1 (rys.5). Następnie zaczyna spadać i gdy osiągnie wartość  $T_{ON}$  (punkt 2 na rysunku 5) następuje ponowne włączenie zasilania kabla grzejnego. Jednakże zanim strumień ciepła dotrze do punktu A jego temperatura będzie jeszcze przez pewien

czas spadała osiągając minimum w punkcie 3 (rys.5). Opisana sytuacja powtarza się dla każdego cyklu pracy regulatora. Analizując przebiegi temperatury na rysunku 5 można zauważyć, że przedziały czasu, w których zasilanie kabla jest włączone są znacznie dłuższe niż przedziały czasu, w których zasilanie jest wyłączone. Na przykład po pierwszym wyłączeniu przerwa w zasilaniu trwała ok. 1 godziny. Po upływie tego czasu układ pobierał prąd przez ponad 4 godziny.



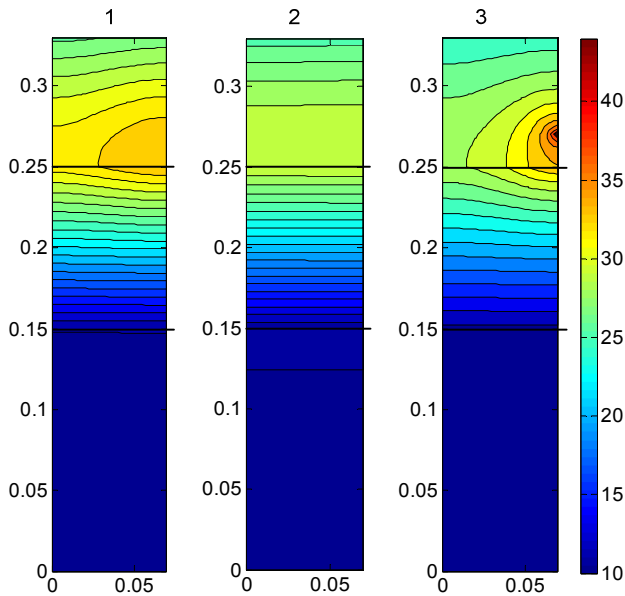
Rys.5. Praca grzejnika podłogowego z regulatorem

Z praktycznego punktu widzenia największe znaczenie mają rozkłady temperatury na powierzchni podłogi. Na rysunku 6 przedstawiono rozkłady dla trzech wybranych chwil czasu, odpowiadających punktom 1-3 na rysunku 5. W przypadku wszystkich rozkładów temperatura punktu A jest najniższa, zaś temperatura punktu B - najwyższa. Największe różnice pomiędzy najcieplejszym i najzimniejszym punktem podłogi występują dla krzywych nr 1 i 3. Nie przekraczają one jednak  $1^{\circ}\text{C}$ , a zatem nie powinny być odczuwalne przez użytkowników ogrzewania podłogowego. Przy wyłączonym zasilaniu kabla grzejnego wszystkie punkty powierzchni podłogi mają prawie jednakową temperaturę (krzywa nr 2).



Rys.6. Temperatura na powierzchni podłogi w wybranych chwilach czasu: 1 - 39 166 [s], 2 - 41 774 [s], 3 - 43 982 [s]

Na rysunku 7 przedstawiono rozkład pola temperatury w przekroju poprzecznym grzejnika w trzech chwilach czasu. Analizując rysunki można dokładnie zaobserwować miejsce położenia kabla grzewczego w wylewce betonowej oraz spadek temperatury na izolacji cieplnej.



Rys.7. Pole temperatury w przekroju poprzecznym grzejnika w wybranych chwilach czasu: 1 - 39 166 [s], 2 - 41 774 [s], 3 - 43 982 [s]

### Przyspieszenie obliczeń równoległych

W celu oceny wydajności obliczeń równoległych wykonywanych z wykorzystaniem procesora karty graficznej, wyznaczono przyspieszenie obliczeń  $S$ . W klasycznych obliczeniach równoległych przyspieszenie definiowane jest jako iloraz czasu wykonania programu sekwencyjnego na jednym procesorze i czasu wykonania programu równoległego na danej liczbie procesorów [22]. W przypadku zastosowania procesorów kart graficznych przyspieszenie definiowane jest w inny sposób [23]:

$$(40) \quad S = \frac{t_{CPU}}{t_{CPU+GPU}},$$

gdzie  $t_{CPU}$  jest czasem wykonania programu sekwencyjnego tylko na tradycyjnym procesorze (CPU), zaś  $t_{CPU+GPU}$  jest czasem wykonania programu równoległego na tradycyjnym procesorze (CPU) i procesorze karty graficznej (GPU).

Do wyznaczenia przyspieszenia obliczeń wykorzystano program równoległy opisany wcześniej w pracy oraz jego wersję sekwencyjną działającą tylko na procesorze CPU. W programie sekwencyjnym do realizacji operacji na wektorach i macierzach zastosowano bibliotekę Intel Math Kernel Library (MKL) w wersji 10.3 [24]. Biblioteka ta zawiera procedury algebry liniowej (BLAS - Basic Linear Algebra Subprograms) zoptymalizowane pod procesory firmy Intel.

Obliczenia przeprowadzono dla różnej gęstości siatki różnic skończonych. W tabeli 2 zestawiono zastosowane siatki oraz charakterystykę odpowiadających im układów algebraicznych równań liniowych (tzn. liczbę niewiadomych i liczbę niezerowych elementów macierzy współczynników).

Tabela 2. Podział modelu grzejnika podłogowego i parametry układu równań

Siatka	Liczba niewiadomych	Liczba niezerowych elementów macierzy współczynników
29 × 133	3 828	18 818
57 × 265	15 048	74 598
113 × 529	59 664	297 038
225 × 1057	237 600	1 185 438
449 × 2113	948 288	4 736 318

Czasy obliczeń oraz wyznaczone przyspieszenia przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3. Czasy działania i przyspieszenie obliczeń (CPU - własny program, CPU+GPU - środowisko CUDA)

Siatka	Czas obliczeń		Przyspieszenie
	CPU [s]	CPU+GPU [s]	
29 × 133	26,42	79,64	0,33
57 × 265	112,14	166,03	0,68
113 × 529	761,13	408,74	1,86
225 × 1057	11 242,00	1491,11	7,54
449 × 2113	107 677,94	7880,10	13,66

W przypadku zastosowania rzadkiej siatki różnic skończonych (29 × 133, 57 × 265) nie otrzymano przyspieszenia obliczeń. Oznacza to, że wykorzystanie dodatkowego procesora GPU wydłużyło czas obliczeń w porównaniu z obliczeniami wykonywanymi tylko na procesorze CPU. Dopiero w przypadku gęstszych siatek otrzymano skrócenie czasu działania programu. W przypadku siatki 512 × 2176 skrócono czas obliczeń ponad 13-krotnie (z prawie 30 godzin do nieco ponad 2 godzin).

### Uwagi końcowe

W artykule przedstawiono analizę nieustalonego pola temperatury w wielowarstwowym modelu elektrycznego grzejnika podłogowego pracującego z regulatorem dwupołożeniowym. W tym celu napisano autorski program komputerowy wykorzystujący w obliczeniach tradycyjny procesor oraz procesor karty graficznej. Otrzymane wyniki obliczeń przedstawiono w postaci przebiegów i rozkładów temperatury. Zbadano wydajność opracowanego programu komputerowego. Zastosowanie procesora GPU pozwoliło na skrócenie czasu obliczeń tylko w przypadku zastosowania gęstej siatki różnic skończonych. Brak przyspieszenia dla rzadkiej siatki jest spowodowany niewystarczającym obciążeniem procesora graficznego, wynikającym ze zbyt małej liczby elementów macierzy i wektorów występujących podczas rozwiązywania układów równań metodą BiCGStab.

Należy jednakże podkreślić, że otrzymane przyspieszenia obliczeń są porównywalne z wynikami prezentowanymi w innych publikacjach. W pracy [25] analizowano implementację metody BiCGStab z prekondycjonerem wykorzystującym niepełny rozkład LU (incomplete-LU preconditioner) podczas rozwiązywania testowych układów równań. Dla macierzy niesymetrycznych otrzymano przyspieszenia od 0,53 do 8,6. Podobne badania wykonano w pracy [26] otrzymując przyspieszenia w zakresie od 2 do 3. Z kolei w pracy [27] metodę BiCGStab zastosowano do rozwiązania układu równań powstałego podczas analizy problemu termicznego, otrzymując przyspieszenia od 3,2 do 6,0.

W opracowanym programie komputerowym wszystkie obliczenia zmiennoprzecinkowe wykonane zostały w podwójnej precyzji (double). Procesory kart graficznych mają większą wydajność w przypadku zastosowania pojedynczej precyzji. Jednakże w opracowanym programie nie było to możliwe, gdyż zastosowanie pojedynczej precyzji spowodowało brak zbieżności metody iteracyjnej podczas wyznaczania warunku początkowego.

*Praca zrealizowana w ramach projektu badawczego Politechniki Białostockiej nr S/WE/1/2013.*

### LITERATURA

- [1] Żukowski M., *Ogrzewanie podłogowe*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok, (2009).

- [2] Watson R.D., Chapman K.S., *Radiant Heating & Cooling Handbook*, McGraw-Hill Companies, (2004).
- [3] Woodson R.D., *Radiant Floor Heating, Second Edition*, McGraw-Hill, New York, (2009).
- [4] Sattari S., Farhanieh B., A parametric study on radiant floor heating system performance, *Renewable Energy*, 31 (2006), No. 10, 1617-1626.
- [5] Holopainen R., Tuomaala P., Piippo J., Uneven gridding of thermal nodal networks in floor heating simulations, *Energy and Buildings*, 39 (2007), No. 10, 1107-1114.
- [6] Jin X., Zhang X., Luo Y., A calculation method for the floor surface temperature in radiant floor system, *Energy and Buildings*, 42 (2010), No. 10, 1753-1758.
- [7] Liu Y., Wang D., Liu J., Study on heat transfer process for in-slab heating floor, *Building and Environment*, 54 (2012), 77-85.
- [8] Gołębiowski J., Kwiećkowski S., Dynamics of three-dimensional temperature field in electrical system of floor heating, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45 (2002), No. 12, 2611-2622.
- [9] Lin K., Zhang Y., Xu X., Di H., Yang R., Qin P., Modeling and simulation of under-floor electric heating system with shape-stabilized PCM plates, *Building and Environment*, 39 (2004), No. 12, 1427-1434.
- [10] Gołębiowski J., Kwiećkowski S., Zaręba M., Bycul R.P., *Analiza nieustalonego pola termicznego w elektrycznych grzejnikach podłogowych i w kablach prądu stałego*, Polska Akademia Nauk - Komitet Elektrotechniki, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Warszawa-Białystok, (2010).
- [11] Bozkır O., Canbazoğlu S., Unsteady thermal performance analysis of a room with serial and parallel duct radiant floor heating system using hot airflow, *Energy and Buildings*, 36 (2004), No. 6, 579-586.
- [12] Gołębiowski J., Forenc J., Parallel computations of the step response of a floor heater with the use of a graphics processing unit. Part 1: Models and algorithms, *Bull. Pol. Ac.: Tech.*, 61 (2013), No. 4, 943-948.
- [13] Gołębiowski J., Forenc J., Parallel computations of the step response of a floor heater with the use of a graphics processing unit. Part 2: Results and their evaluation, *Bull. Pol. Ac.: Tech.*, 61 (2013), No. 4, 949-954.
- [14] Farber R., *CUDA Application Design and Development*, Morgan Kaufmann, Amsterdam, (2011).
- [15] Cook S., *CUDA Programming. A Developer's Guide to Parallel Computing with GPUs*, Morgan Kaufmann, Amsterdam, (2013).
- [16] Incropera F., De Witt D., Bergman T., Lavine A., *Introduction to Heat Transfer*, John Wiley&Sons, Hoboken, (2007).
- [17] Barrett R., Berry M., Chan T.F., Demmel J., Donato J.M., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine Ch., Van der Vorst H., *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM, Philadelphia, (1994).
- [18] Saad Y., *Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Second Edition*, SIAM, (2003).
- [19] Van der Vorst H., Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. and Stat. Comput.*, 13 (1992), No. 2, 631-644.
- [20] CUBLAS Library, User Guide, NVIDIA Corporation, Santa Clara, CA, (2013).
- [21] CUSPARSE Library, NVIDIA Corporation, Santa Clara, CA, (2013).
- [22] Karbowski A., Niewiadomska-Szynkiewicz E. (red.), *Programowanie równoległe i rozproszone*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, (2009).
- [23] Jalili-Marandi V., Dinavahi V., SIMD-based large-scale transient stability simulation on the graphics processing unit, *IEEE Trans. on Power Systems*, 25 (2010), No. 3, 1589-1599.
- [24] Intel Math Kernel Library. Reference Manual, MKL 10.3 Update 10, Intel Corporation, (2012).
- [25] Naumov M., Incomplete-LU and Cholesky preconditioned iterative methods using CUSPARSE and CUBLAS. White Paper, NVIDIA Corporation, London, (2011).
- [26] Naumov M., Preconditioned Block-Iterative Methods on GPUs, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 12 (2012), No. 1, 11-14.
- [27] Haeri S., Shrimpton J.S., Fully resolved simulation of particle deposition and heat transfer in a differentially heated cavity, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 50 (2014), 1-15.

---

**Autorzy:** dr inż. Jarosław Forenc, Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny, ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok, E-mail: [j.forenc@pb.edu.pl](mailto:j.forenc@pb.edu.pl).