

## Obliczenia dławika z dzielonym rdzeniem magnetycznym, symulacje, pomiary

**Streszczenie.** Artykuł przedstawia analityczny sposób obliczenia indukcyjności dławika z dzielonym cylindrycznym rdzeniem magnetycznym. Obliczenia uwzględniają wpływ geometrii materiału magnetycznego, szczelin powietrznych oraz uzwojenia dławika. Wyniki obliczeń zestawiono z symulacjami dławika w oparciu o metodę elementów skończonych. Dodatkowo dokonano pomiaru indukcyjności dwoma niezależnymi metodami - analizatorem impedancji oraz metodą techniczną.

**Abstract.** The paper presents analytic approach to inductance calculation of coil with split cylindrical magnetic core. Calculations include impact of magnetic material geometry, as well as air gaps, winding. Results of calculations are verified with FEM simulations. Additionally, two independent measurements were applied - impedance analyzer and 4-point probes method have been performed. (Analytic approach to calculation of coil with split magnetic core; simulations; measurements).

**Słowa kluczowe:** cewka z rdzeniem, rdzeń magnetyczny, weryfikacja

**Keywords:** coil, magnetic core, verification

### Wstęp

Zastosowanie materiału ferromagnetycznego w konstrukcji dławika może zwiększyć jego indukcyjność wielokrotnie, dzięki czemu możliwe jest zmniejszenie gabarytów dławika przy zachowaniu niezmięnionej indukcyjności. Jednocześnie wprowadzenie materiału magnetycznego, który cechuje się nasyceniem magnetycznym, zawęża zakres zastosowania względem wartości dopuszczalnego prądu dławika. Dobierając parametry obwodu magnetycznego (ilość zwojów, średnica, przekrój uzwojenia; kształt, objętość i przenikalność materiału magnetycznego, wprowadzenie szczelin powietrznych, etc.) należy uwzględnić wiele zmiennych, często zależnych od siebie.

Podjęto próbę analitycznego obliczenia indukcyjności dławika z otwartym rdzeniem magnetycznym. W celu uproszczenia konstrukcji wybrano rdzeń w kształcie walca wewnątrz cewki oraz rdzeń cylindryczny na zewnątrz cewki. Dodatkowo w rdzeniu cewki wprowadzono szczeliny powietrzne w celu kontrolowania nasycenia materiału magnetycznego.

Obliczenia analityczne poparto obliczeniami komputerowymi z zastosowaniem metody elementów skończonych oraz przeprowadzono szereg badań i pomiarów laboratoryjnych. Opracowana metoda pozwala na oszacowanie celowości stosowania materiału magnetycznego w projektowanym dławiku.

### Opis matematyczny

Strumień magnetyczny wytworzony przez siłę magnetomotoryczną w danym obwodzie magnetycznym zależy od reluktancji obwodu, na którą składają się wymiary geometryczne oraz właściwości materiału. Siła magnetomotoryczna zależy od ilości zwojów cewki oraz prądu płynącego przez nią wg. zależności (1), a natężenie pola magnetycznego wg. zależności (2):

$$(1) \quad F = I \cdot z \text{ [amperozwojów]}$$

$$(2) \quad H = \frac{F}{l} = \frac{I \cdot z}{l},$$

gdzie  $F$  – siła magnetomotoryczna,  $I$  – prąd płynący przez uzwojenie cewki,  $z$  – liczba zwojów cewki,  $l$  – długość drogi magnetycznej obwodu magnetycznego,  $H$  – natężenie pola magnetycznego.

Indukcja magnetyczna w rdzeniu jest gęstością strumienia magnetycznego, a więc:

$$(3) \quad B = \frac{\phi}{S},$$

gdzie  $\phi$  – strumień indukcji magnetycznej, pole przekroju rdzenia (obwodu magnetycznego). W przypadku wystąpienia w obwodzie różnych materiałów magnetycznych lub zastosowania szczeliny powietrznej, dla poszczególnych ośrodków gęstość strumienia będzie różna.

Pomiędzy gęstością strumienia magnetycznego, a natężeniem pola magnetycznego zachodzi poniższa zależność:

$$(4) \quad B = \mu \cdot H,$$

Aby dla danej cewki przy założonym prądzie wyznaczyć nasycenie, należy rozłożyć cały obwód magnetyczny na poszczególne reluktancje, które można opisać ogólnym wzorem:

$$(5) \quad \mathfrak{R} = \frac{l}{\mu_r \mu_0 S},$$

gdzie  $\mathfrak{R}$  – reluktancja,  $\mu_r$  – względna przenikalność magnetyczna materiału magnetycznego,  $\mu_0$  – przenikalność powietrza.

Dla każdego obwodu magnetycznego siła magnetomotoryczna jest iloczynem strumienia magnetycznego oraz reluktancji:

$$(6) \quad F = \phi \cdot \mathfrak{R}_m,$$

gdzie  $\mathfrak{R}_m$  – suma reluktancji elementarnych odcinków obwodu magnetycznego jak np. szczelina powierzana, odcinek materiału magnetycznego o stałej przenikalności magnetycznej i stałym polu przekroju.

Znając siłę magnetomotoryczną, poszczególne reluktancje oraz prąd można określić indukcyjność zastępczą i nasycenie materiału magnetycznego dławika.

$$(7) \quad \phi = I \frac{L}{z}$$

Indukcyjność dławika można wyznaczyć z zależności (11), wg następujących zależności. Przepływ  $\Theta$  od uzwojenia o  $z$  zwojach, w którym płynie prąd  $I$  wynosi:

$$(8) \quad \Theta = I \cdot z,$$

a zależność przepływu i strumienia magnetycznego wyraża się [1]:

$$(9) \quad \phi = \frac{\Theta}{\sum_{k=1}^n \frac{l_k}{\mu_k S_k}}, \text{ podstawiając (7) i (8)}$$

$$(10) \quad L = \frac{z^2}{\sum_{k=1}^n \frac{l_k}{\mu_k S_k}}, \text{ upraszczając:}$$

$$(11) \quad L = \frac{z^2}{\mathfrak{R}_m}$$

Znając wymiary geometryczne obwodu magnetycznego oraz parametry materiału, można wyznaczyć reluktancje poszczególnych elementów obwodu.

Oprócz przypadku referencyjnego, czyli solenoidu, rozpatrzono cztery przypadki:

- solenoid z rdzeniem wewnętrznym
- solenoid z rdzeniem wewnętrznym ze szczelinami
- solenoid z rdzeniem wewnętrznym i rdzeniem cylindrycznym zewnętrznym
- solenoid z rdzeniem wewnętrznym ze szczelinami i rdzeniem cylindrycznym zewnętrznym

### Opis geometrii obwodu magnetycznego

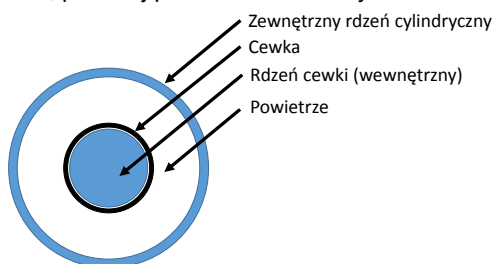
We wszystkich rozpatrywanych przypadkach wykorzystano tą samą cewkę, o długości 500mm, z nawiniętymi zwojami w ilości 450, drutem o średnicy 1 mm. W przypadkach, gdzie zastosowano rdzeń magnetyczny, miał on wymiary odpowiednio:

Rdzeń cewki – składany z taśmy elektrotechnicznej 0,27mm, o długości 50cm i polu przekroju 32,75cm<sup>2</sup>

Rdzeń cewki ze szczelinami – składany z taśmy elektrotechnicznej 0,27mm, o łącznej długości 50cm i polu przekroju 32,75cm<sup>2</sup>; trzy szczeliny powietrzne o długości 0,5cm

Rdzeń cylindryczny – arkusze ze stali transformatorowej o grubości 0,3mm; cylinder o długości 50cm i polu przekroju 117,2 cm<sup>2</sup> i średnim promieniu 9,3 cm. Rdzeń zewnętrzny, cylindryczny został osadzony w rurze stalowej St3.

Dla ogólnego przypadku, gdzie przedstawiono oba rdzenie, przekrój przedstawiono na rys.1 .



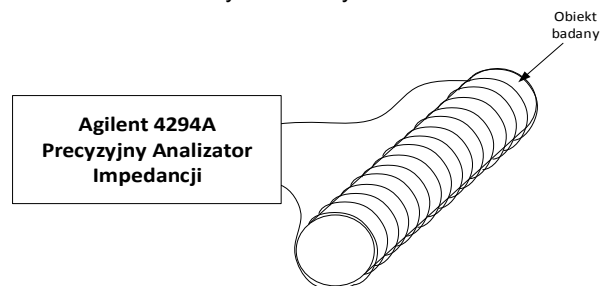
Rys. 1 Przekrój przez cewkę z rdzeniem oraz rdzeń cylindryczny

### Pomiary laboratoryjne

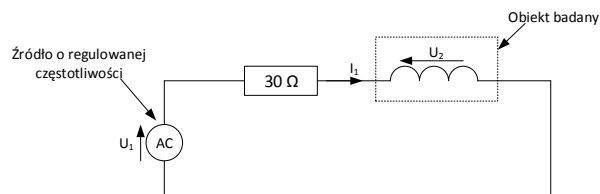
Przeprowadzono pomiary laboratoryjne stosując dwie metody. W pierwszej metodzie wykorzystano precyzyjny analizator impedancji Agilent 4294A. W tym układzie, badany obiekt był bezpośrednio podłączony do zacisków testowych analizatora, jak na rys.2.

W drugim pomiarze zastosowano metodę techniczną, z wykorzystaniem źródła napięcia przemiennego o regulowanej częstotliwości. Rejestrowano prąd w układzie

i napięcie na źródle zasilania oraz na obiekcie badanym z wykorzystaniem oscyloskopu. Układ pomiarowy przedstawiono schematycznie na rys.3.



Rys. 2 Układ z wykorzystaniem precyzyjnego analizatora impedancji



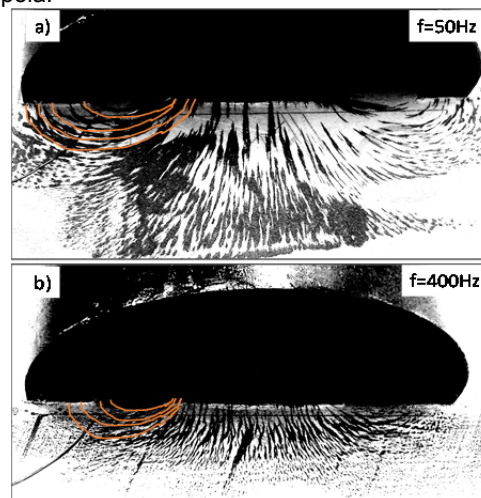
Rys. 3 Układ pomiarowy wykorzystany w metodzie technicznej

### Model matematyczny

Schemat zastępczy obwodu magnetycznego stworzono w oparciu o wymiary geometryczne poszczególnych elementów, takich jak wymiary cewki, rdzenia magnetycznego, ich wzajemne rozmieszczenie, wymiary szczelin powietrznych. Zastępczy obwód magnetyczny składa się ze skupionych reluktancji, których wartość, prócz wymiarów, zależy od właściwości materiału oraz rozkładu linii pola. Dla elementów o dużej przenikalności magnetycznej (rdzeń magnetyczny), skupiających strumień, wyznaczenie średniej drogi magnetycznej sprowadza się do wyznaczenia jej z wymiarów geometrycznych elementu.

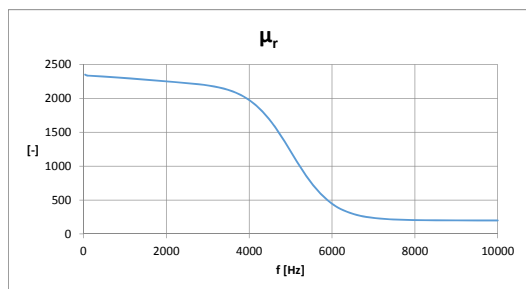
W przypadku szczelin powietrznych, wyznaczenie ich reluktancji może być zależne od częstotliwości. W celu wizualizacji wpływu częstotliwości na rozkład linii pola przeprowadzono badanie mające na celu ukazanie rozkładu linii pola; w tym celu wykorzystano badany układ cewki z dwoma rdzeniami oraz sproszkowany ferryt. Badaną cewkę zasilano ze źródła o regulowanej częstotliwości.

Rys. Rys. 4 przedstawia wpływ częstotliwości na rozkład linii pola magnetycznego. Dla wyższych częstotliwości można zaobserwować skrócenie drogi, na jakiej układają się linie pola.



Rys. 4 Rozkład linii pola magnetycznego zależny od częstotliwości prądu cewki. a) dla częstotliwości 50Hz, b) dla częstotliwości 400Hz.

Charakterystykę przenikalności magnetycznej w funkcji częstotliwości dla materiału, z którego wykonano rdzenie przedstawia rys.5. . Dane dostarczone przez producenta.

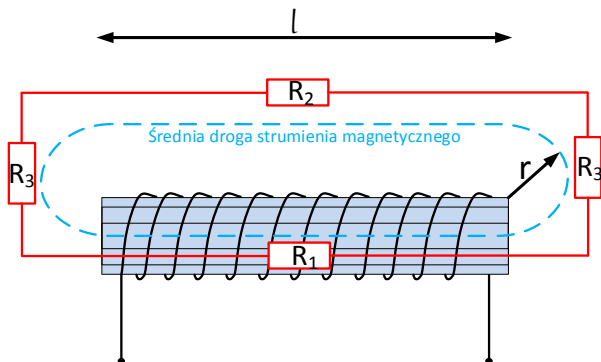


Rys. 5 Przenikalność magnetyczna zastosowanej blachy transformatorowej w funkcji częstotliwości

Dla poszczególnych przypadków, opis modeli zastępczych przedstawiono poniżej.

### Cewka z rdzeniem magnetycznym – dopasowanie modelu zastępczego

Obwód składa się z solenoidu oraz rdzenia magnetycznego umieszczonego wewnątrz solenoidu.

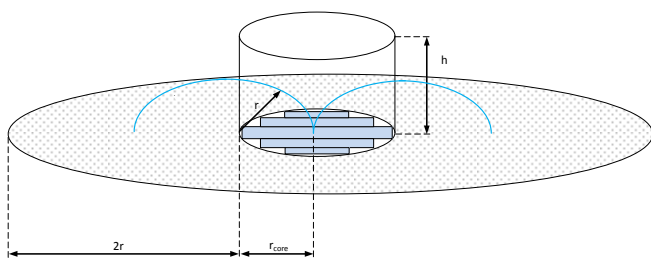


Rys. 6 Obwód zastępczy cewki z rdzeniem magnetycznym

Obliczenia poszczególnych reluktancji dokonano wg poniższych wzorów:

$$(12) \quad R_1 = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S_{core}}$$

Dla szczeliny powietrznej, założono przepływ przez pole przekroju w kształcie walca o wysokości  $h$  i promieniu  $r$ , gdzie średnia droga wynosi  $\pi r$ , jak na rys.7Rys. .



Rys. 7 Opis geometrii szczeliny powietrznej

$$(13) \quad R_2 = \frac{l}{\mu_0 \pi [(r_{core} + 2r)^2 - r_{core}^2]}$$

$$(14) \quad R_2 = \frac{l}{4\mu_0 \pi (r_{core} r + r^2)}$$

$$(15) \quad R_3 = \frac{\pi r}{\mu_0 2\pi r h}$$

Wartości indukcyjności zmierzone dwoma metodami (analyzer impedancji i metoda techniczna) przyjęto jako

referencję dla dopasowania wymiarów geometrycznych szczeliny powietrznej. Dla zbieżnych wyników przyjęto promień zmieniający się wg:

$$(16) \quad r = 0,07272 \cdot \{3 + \log_{10^{-4}}(f)\}$$

oraz

$$(17) \quad h = 2r$$

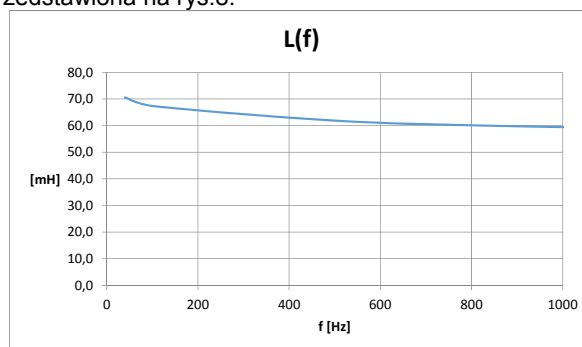
$$(18) \quad R_3 = \frac{1}{4\mu_0 r}$$

Sumaryczna reluktancja dla cewki z rdzeniem magnetycznym wynosi:

$$(19) \quad \mathfrak{R}_m = \sum R = R_1 + R_2 + 2R_3$$

$$(20) \quad L = \frac{z^2}{\mathfrak{R}_m}$$

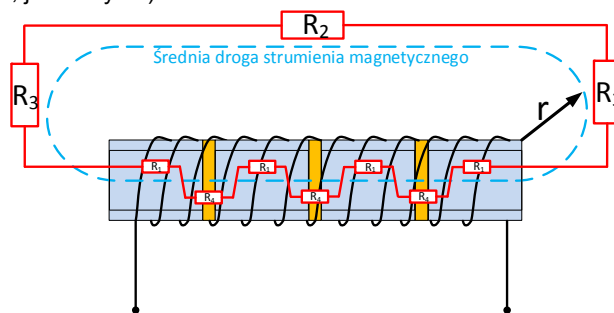
Wynikowa indukcyjność w funkcji częstotliwości jest przedstawiona na rys.8.



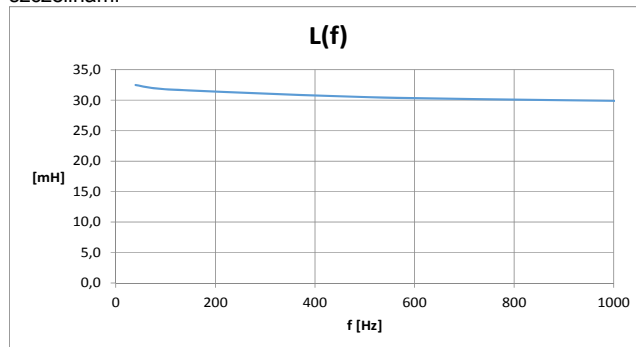
Rys. 8 Indukcyjność cewki z rdzeniem w funkcji częstotliwości

### Cewka z rdzeniem magnetycznym ze szczelinami – dopasowanie modelu zastępczego

Obwód składa się z cewki oraz rdzenia magnetycznego wewnątrz, który przedzielony jest trzema szczelinami powietrznymi każdy 0,5cm każda. Dla tego przypadku przyjęto identyczne założenia dla geometrii, jak w przypadku rdzenia bez szczelin (promień  $r$  oraz wysokość  $h$ , jak na rys.9).



Rys. 9. Obwód zastępczy cewki z rdzeniem magnetycznym ze szczelinami



Rys. 10 Indukcyjność cewki z rdzeniem za szczelinami w funkcji częstotliwości

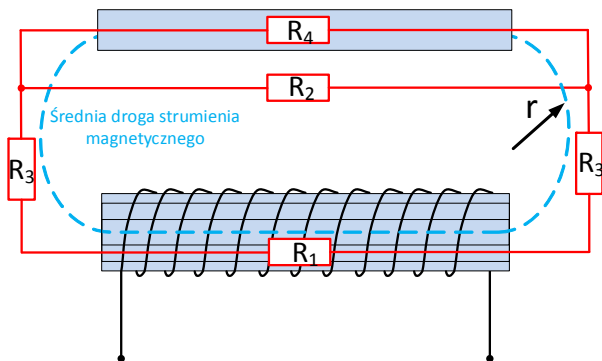
Sumaryczna reluktancja dla cewki z rdzeniem magnetycznym wynosi:

$$(21) \quad \mathfrak{R}_m = \sum R = 4R_1 + R_2 + 2R_3 + 3R_4$$

Wynikowa indukcyjność w funkcji częstotliwości jest przedstawiona na rys.10.

### Cewka z rdzeniem magnetycznym i z rdzeniem cylindrycznym – dopasowanie modelu zastępczego

Obwód składa się z cewki z rdzeniem magnetycznym wewnątrz, oraz rdzeniem cylindrycznym.



Rys. 11 Obwód zastępczy cewki z rdzeniem magnetycznym i rdzeniem cylindrycznym

Reluktancja szczeliny  $R_3$  w obecności rdzenia cylindrycznego jest obliczona przy poniższych założeniach, przy oznaczeniach jak na rys.11.

$$(22) \quad r = 0,07272 \cdot \{0,89 + \log_{10}^{-7}(f)\}$$

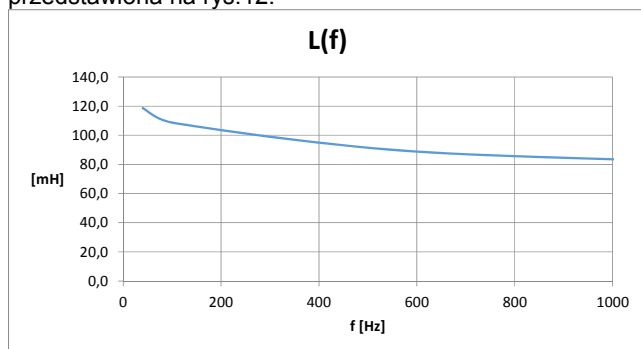
$$(23) \quad h = 5 \cdot r$$

$$(24) \quad R_3 = \frac{\pi r}{\mu_0 2\pi r h}$$

$$(25) \quad R_3 = \frac{1}{10\mu_0 r}$$

$$(26) \quad \mathfrak{R}_m = \sum R = R_1 + 2R_3 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

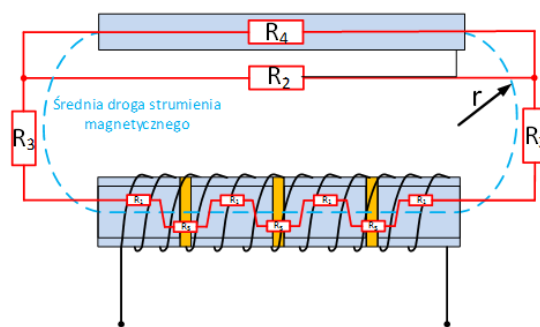
Wynikowa indukcyjność w funkcji częstotliwości jest przedstawiona na rys.12.



Rys. 12 Indukcyjność cewki z rdzeniem i rdzeniem cylindrycznym w funkcji częstotliwości

### Cewka z rdzeniem magnetycznym ze szczelinami i z rdzeniem cylindrycznym – dopasowanie modelu zastępczego

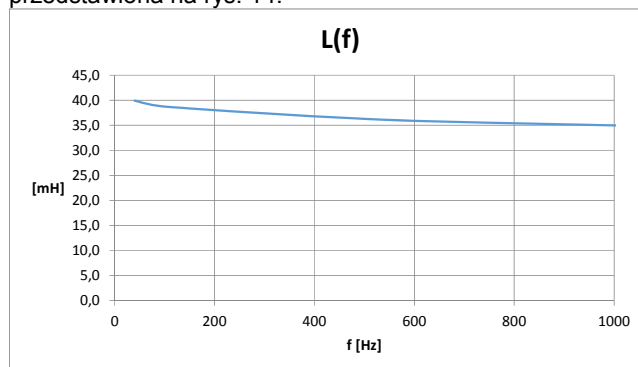
Obwód składa się z cewki z rdzeniem magnetycznym ze szczelinami wewnątrz, oraz rdzeniem cylindrycznym. Parametry promienia  $r$  oraz wysokości  $h$  przyjęto jak dla przypadku cewki z rdzeniem magnetycznym wewnątrz, oraz rdzeniem cylindrycznym.



Rys. 13 Obwód zastępczy cewki z rdzeniem magnetycznym ze szczelinami i z rdzeniem cylindrycznym

$$(27) \quad \mathfrak{R}_m = \sum R = 4R_1 + 2R_3 + 3R_5 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

Wynikowa indukcyjność w funkcji częstotliwości jest przedstawiona na rys. 14.



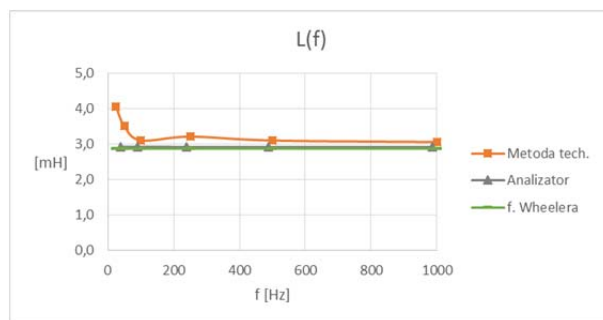
Rys. 14 Indukcyjność cewki z rdzeniem ze szczelinami i rdzeniem cylindrycznym w funkcji częstotliwości

### Porównanie wyników

Otrzymane wyniki z obliczeń analitycznych zestawiono z wynikami pomiarów laboratoryjnych. Zostały one odniesione do indukcyjności solenoidu, którego indukcyjność została obliczona wg formuły Wheeler'a [2], przy założeniu, że długość solenoidu jest większa niż  $0.4\phi$ , dokładność poniższego wzoru jest lepsza niż 1%:

$$(28) \quad L = \frac{10\pi\mu_0 N^2 \phi_{Fe}}{(18\phi_{Fe} + 40d)}$$

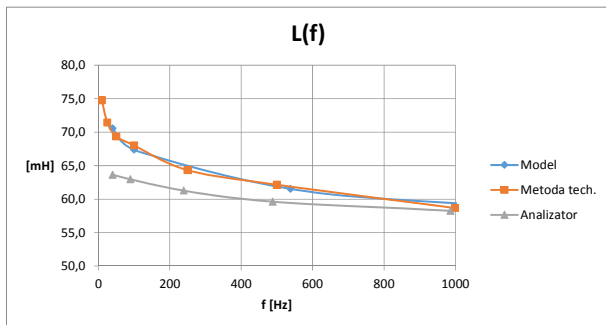
gdzie:  $\mu_0$  – przenikalność powietrza,  $N$  – ilość zwojów,  $\phi$  – średnica solenoidu [m],  $d$  – długość solenoidu [m]



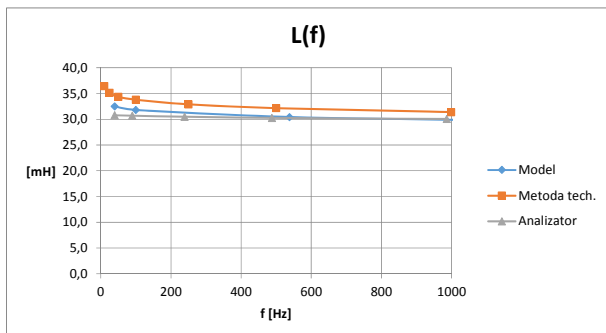
Rys. 15 Indukcyjność solenoidu w funkcji częstotliwości – zestawienie różnych metod obliczeń

Obliczona indukcyjność solenoidu wg wzoru (28) wynosi 2,87 mH; dla analizatora impedancji 2,92 mH; metodą techniczną od 3,1mH do 4,0 mH (przy niskich częstotliwościach). Zestawienie obliczeń z pomiarami wykonanymi dwoma metodami (techniczną oraz z wykorzystaniem analizatora impedancji), przedstawiono poniżej.

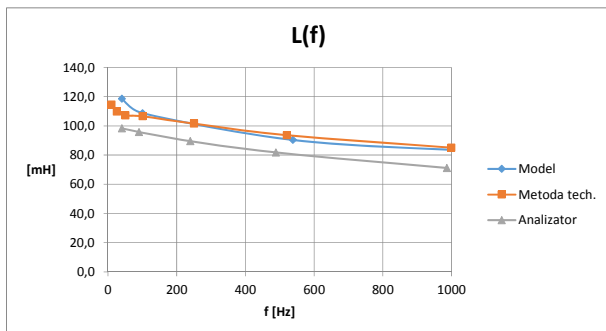
Indukcyjność solenoidu w funkcji częstotliwości obliczoną i zmierzoną dwoma metodami, przedstawia rys.15. Indukcyjność cewki z rdzeniem w funkcji częstotliwości obliczoną i zmierzoną dwoma metodami, przedstawia rys. 16.



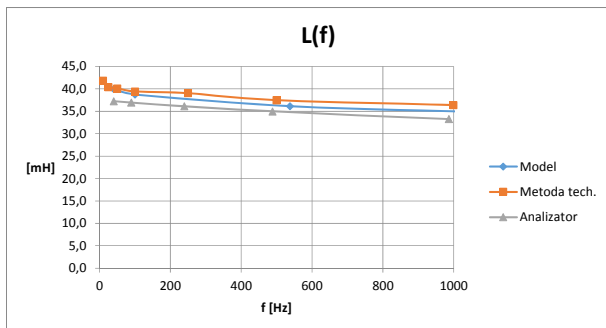
Rys. 16 Indukcyjność cewki z rdzeniem w funkcji częstotliwości – zestawienie różnych metod obliczeń



Rys. 17. Indukcyjność cewki z rdzeniem ze szczelinami w funkcji częstotliwości – zestawienie różnych metod obliczeń



Rys. 18 Indukcyjność cewki z rdzeniem i rdzeniem cylindrycznym w funkcji częstotliwości – zestawienie różnych metod obliczeń



Rys. 19 Indukcyjność cewki z rdzeniem ze szczelinami i rdzeniem cylindrycznym w funkcji częstotliwości – zestawienie różnych metod obliczeń

Indukcyjność cewki z rdzeniem ze szczelinami w funkcji częstotliwości obliczoną i zmierzoną dwoma metodami, przedstawia rys.17.

Indukcyjność cewki z rdzeniem i rdzeniem cylindrycznym w funkcji częstotliwości obliczoną i zmierzoną dwoma metodami, przedstawia rys.18.

Indukcyjność cewki z rdzeniem ze szczelinami i rdzeniem cylindrycznym w funkcji częstotliwości obliczoną i zmierzoną dwoma metodami, przedstawia rys.19Rys. .

Przedstawione wyniki obliczeń zestawione z pomiarami laboratoryjnymi wykazują zbieżność. Wyniki obliczeń pokrywają się z wynikami badań, poza jednym punktem pomiarowym, dla niskich częstotliwości.

### Obliczenia metodą elementów skończonych (FEM)

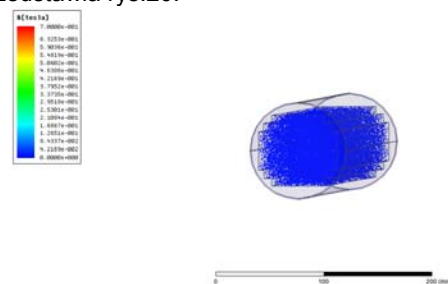
Dla opisanych wyżej geometrii zostały stworzone modele symulacyjne, dla obliczeń metodą elementów skończonych. Na podstawie modelu geometrycznego wyznaczono indukcyjność. Tabela 1 przedstawia wyniki obliczeń i pomiarów (w formie przedziału wartości) zestawione z wartością indukcyjności otrzymaną z symulacji FEM.

Wartości indukcyjności zostały odczytane bezpośrednio z programu symulacyjnego. Wyznaczanie indukcyjności metodą FEM charakteryzuje niższa wartości indukcyjności, co widać wyraźnie dla przypadku cewki z rdzeniem oraz cewki z rdzeniem i rdzeniem cylindrycznym.

Tabela 1 Zestawienie wyników pomiarów, obliczeń oraz symulacji dla częstotliwości 50 Hz.

Rozważany przypadek	Wyniki obliczeń i pomiarów [mH]	Wynik symulacji FEM [mH]
Solenoid	2,9 - 4	2,9
Cewka z rdzeniem	63 - 75	53,9
Cewka z rdzeniem ze szczelinami	30-37	31,5
Cewka z rdzeniem i rdzeniem cylindrycznym	100-120	93,8
Cewka z rdzeniem ze szczelinami i rdzeniem cylindrycznym	37-42	41

Poniższe ilustracje ukazują rozkład indukcji w rdzeniu magnetycznym lub powietrznym dla przypadku solenoidu. Rozkład indukcji w rdzeniu powietrznym solenoidu przedstawia rys.20.



Rys. 20 Rozkład indukcji w modelu solenoidu – rozkład w rdzeniu powietrznym

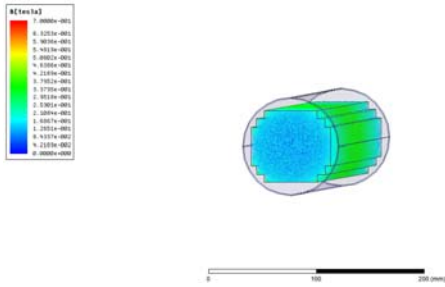
Rozkład indukcji w rdzeniu dla cewki z rdzeniem przedstawia rys.21.

Rozkład indukcji w rdzeniu dla cewki z rdzeniem ze szczelinami przedstawia rys.22.

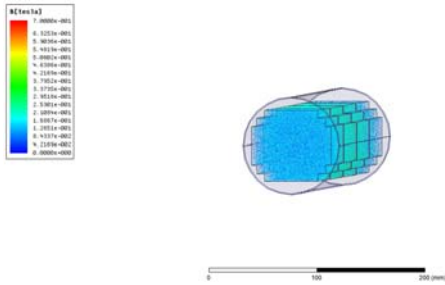
Rozkład indukcji w rdzeniu dla cewki z rdzeniem i rdzeniem cylindrycznym przedstawia rys.23.

Rozkład indukcji w rdzeniu dla cewki z rdzeniem ze szczelinami i rdzeniem cylindrycznym przedstawia rys.24.

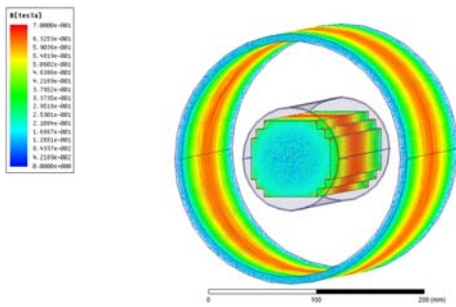




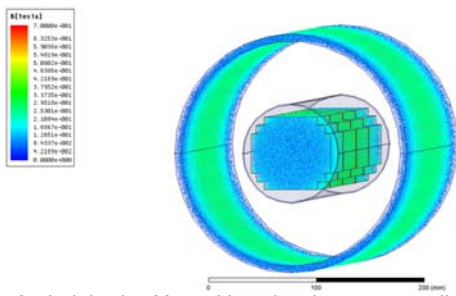
Rys. 21. Rozkład indukcji w modelu cewki z rdzeniem – rozkład w rdzeniu



Rys. 22. Indukcyjność cewki z rdzeniem ze szczelinami w funkcji częstotliwości – zestawienie różnych metod obliczeń



Rys. 23. Indukcyjność cewki z rdzeniem i rdzeniem cylindrycznym w funkcji częstotliwości – zestawienie różnych metod obliczeń



Rys. 24. Indukcyjność cewki z rdzeniem ze szczelinami i rdzeniem cylindrycznym w funkcji częstotliwości – zestawienie różnych metod obliczeń

## Podsumowanie

Przeprowadzono obliczenia, symulacje i pomiary dla dławika z otwartym rdzeniem magnetycznym, w formie walca. Zbieżność wyników pomiarów, obliczeń oraz symulacji dowodzi, iż założony model analityczny jest poprawny. Dla dławika z rdzeniem magnetycznym, bez rdzenia zewnętrznego przyjęto promień średniej drogi w powietrzu wg (16):

$$r = 0,07272 \cdot \{3 + \log_{10}^{-4}(f)\}$$

Natomiast w obecności dodatkowego rdzenia zewnętrznego przyjęto promień drogi w szczelinie r wg (22):

$$r = 0,07272 \cdot \{0,89 + \log_{10}^{-7}(f)\}$$

Próba oszacowania indukcyjności metodą analityczną daje dobre rezultaty, jako wskaźniki wpływu wprowadzenia szczelin, rozmieszczenia materiału magnetycznego, czy zastosowanie materiału o różnej przenikalności magnetycznej. Wyniki z przyjętymi w obliczeniach promieniami, potwierdzono symulacyjnie i za pomocą pomiarów dwoma niezależnymi metodami.

W powyższych rozważaniach nie uwzględniono wpływu nasycenia materiału magnetycznego na wypadkową indukcyjność.

## LITERATURA

- [1] Bolkowski S., Teoria Obwodów Elektrycznych, WNT 2001
- [2] Thompson M. T.: Inductance calculation techniques Part II: *Approximations and Handbook Methods*, 1999, PCIM
- [3] McLyman Colonel Wm. T.: Transformer and Inductor Design Handbook: *CRC Press*, 2011
- [4] Grover Frederick W.: Inductance Calculations: Working Formulas and Tables: *Dover Phoenix Editions* 1946
- [5] Wheeler A. H., Formulas for the Skin Effect, *Proceedings of the I.R.E.*, 1942
- [6] Saxena N., Electrical Engineering, 191 – 194, *University Science Press New Delhi*, 2010
- [7] McLyman C., Transformer and inductor design handbook, 1.21 – 1.26, *Marcel Dekker Inc.*, 2004
- [8] Kazimierczuk M. K., High-Frequency Magnetic Components, 54 – 59, *John Wiley & Sons* 2014

## Filip Grecki

Senior Scientist, Ph.D. Eng.  
ABB Sp. z o.o.  
Starowiślna 13a  
31-038, Kraków, PL  
email: [filip.grecki@pl.abb.com](mailto:filip.grecki@pl.abb.com)