Ryszard SIKORA

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Informatyki

doi:10.15199/48.2016.10.62

Pochodne ułamkowe w teorii obwodów elektrycznych Uwagi krytyczne

***Streszczenie**: W pracy przedstawiono krytyczne uwagi dotyczące wykorzystania ułamkowych pochodnych w teorii obwodów elektrycznych. Wskazano na naruszenie zasady jednorodności wymiarowej równań fizycznych oraz na zmianę równań Maxwella.*

Abstract:** This paper presents the critical comments on the use of fractional derivatives in the theory of electrical circuits. It was pointed to the violation of the principle of dimensional physics equations uniformity, and changes the Maxwell equations.* ***The critical comments on the use of fractional derivatives in the theory of electrical circuits

Słowa kluczowe: jednorodność wymiarowa, równania fizyczne, pojemność, super kondensator
Keywords: uniformity dimensional, physical equations, capacity, supercapacitor.

Wstęp

Wprowadzenie nowych metod matematycznych lub wykorzystanie znanych lecz zapomnianych metod może poważnie pomóc w dalszym rozwoju elektrotechniki. Z tego powodu należy powitać wiele prac, w tym prace prof. T. Kaczorka, w których są wykorzystywane pochodne ułamkowego rzędu w opisie obwodów elektrycznych. Podobnie jest z prądem płynącym w kondensatorze opisanym czysto empirycznym wzorem Curie z 1889 r. a podanym w pracach [7] i [8]. Nie mniej muszą być brane pod uwagę obowiązujące prawa fizyki i zasady zapisu równań fizycznych. Jedną z nich jest wymiarowa jednorodność równań fizycznych i obowiązywanie praw Maxwella. Zauważyłem, że nie we wszystkich pracach dotyczących pochodnych ułamkowych jest to przestrzegane. Prace [7] i [8] są w jakimś sensie wyjątkiem. W pracy [8] uwzględniono równania Maxwella.

Modele obliczeniowe

Ostatnio ukazało się wiele prac na temat pochodnych ułamkowych. Odgrywają one poważną rolę w automatyce i robotyce. Mogą też być użyteczne w innych dziedzinach na przykład w elektrotechnice. Uważam, że fundamentalna bardzo interesująca praca prof. T. Kaczorka „STANDARD AND POSITIVE ELECTRICAL CIRCUITS WITH ZERO TRANSFER MATRICES” wygłoszona na ZKWE’16 i opublikowana w Poznan University of Technology Academic Journals Issue 85 2016 związana z tą tematyką, niestety w istotnej części jest obarczona poważnym błędem [1, 2]. Niestety podobnie jest z pracą [3] i wielu innymi pracami z obszaru pochodnych ułamkowych. Otóż równania (43), (44), (45) i (46) występujące w pracy [1], poniżej zapisane jako równania (1), (2), (3), i (4):

$$i_c(t) = \frac{d^\alpha q(t)}{dt^\alpha} \tag{1}$$

$$i_c(t) = C\frac{d^\alpha u_C(t)}{dt^\alpha} \tag{2}$$

$$u_L(t) = \frac{d^\alpha \Psi(t)}{dt^\alpha} \tag{3}$$

$$u_L(t) = L\frac{d^\alpha i_L(t)}{dt^\alpha} \tag{4}$$

są po prostu błędne. Poprawnie zapisane powyższe równania mają następującą postać:

$$i_c(t) = \frac{dq(t)}{dt} \tag{5}$$

$$i_c(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \tag{6}$$

$$u_L(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} \tag{7}$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \tag{8}$$

W postaci (5), (6), (7) i (8) znane są od dziesięcioleci. Czasami występują w publikacjach tak jak zapisał je prof. T. Kaczorek. Prawo Faradaya opisane równaniem (7) jest znane od ponad 100 lat. Do dnia dzisiejszego nie zostało zmienione. Jest to prawo bardzo ogólne. Dotyczy ono różnych przypadków i środowisk: liniowych, nieliniowych, układów ze stałymi lub zmiennymi parametrami. Tak jest zapisane w podręcznikach, publikacjach, monografiach i w Internecie. Nie stwierdziłem by zapisywano je w podręcznikach zgodnie z propozycją prof. T. Kaczorka. Na przykład równania (2) i (4) być może mogłyby być prawdziwe w przypadku gdyby pojemność i indukcyjność były funkcjami czasu. Jednak L i C zapisano tam jako wielkości stałe, niezależne od czasu. Konsekwentnie błędne są dalsze równania, w których użyto pochodnych ułamkowych. Jeżeli by powyższe równania były prawdziwe to straciła by ważność zasada mówiąca o wymiarowej jednorodności równań fizycznych. Powyższe równia jej nie spełniają. W pierwszej kolejności przyjrzyjmy się równaniu (1). Z jego lewej strony występuje prąd, którego wymiar może być zapisany jako kulomb dzielony przez sekundę a z prawej jest kulomb dzielony przez sekundę w potędze innej niż jeden. Nie jest to poprawne. Podobny problem występuje w pozostałych równaniach. Nie są one poprawne, więc cała budowana przez prof. T. Kaczorka teoria nie jest poprawna i nie ma znaczenia czy prof.

T. Kaczorek posługuje się super kondensatorami czy też kondensatorami klasycznymi. Wymiarowa jednorodność równań musi być spełniona zawsze. Równania fizyczne muszą być wymiarowo jednorodne. Na tę zasadę nie ma żadnego wpływu zasada działania elementów obwodu. Konsekwencje jakie powodują moim zdaniem wyżej wymienione równania są głębsze. Jeżeli byłyby one prawdziwe to wpłynęłyby na zapis równań Maxwella [4]. Utraciłyby ważność podstawowe dla elektromagnetyzmu pierwsze dwa prawa (równania) Maxwella:

(9) $$rot\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

(10) $$rot\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

W wyniku przyjętej przez prof. T. Kaczorka i niektórych autorów sposoby zapisu równań równania (9) i (10) zmieniają formę i przybierają następującą postać:

(11) $$rot\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial^{\alpha} \mathbf{D}}{\partial t^{\alpha}}$$

(12) $$rot\,\mathbf{E} = -\frac{\partial^{\alpha} \mathbf{B}}{\partial t^{\alpha}}$$

W ten sposób zmieniono ugruntowane podstawy elektromagnetyzmu i zasady zapisu równań fizycznych. Jeżeli przedstawiona teoria jest poprawna, to mamy do czynienia z fundamentalnym odkryciem w dziedzinie elektromagnetyzmu. Z rewelacją na skalę światową. Jeżeli ja mam rację to po prostu popełniono błąd i tworzona teoria jest po prostu przynajmniej w części nieprawdziwa.

Podobnie jest z ogromną energią gromadzoną przez super kondensatory. Zastosowanie nowej technologii poważnie zwiększyło ich pojemność w relacji do objętości. Jednak o wielkości zgromadzonej w kondensatorze energii decyduje nie tylko pojemność kondensatora ale i napięcie. Wynika to z następującego wzoru:

(13) $$W_e = \frac{CU^2}{2}$$

Zgromadzona w polu elektrycznym (elektrostatycznym) energia jest funkcją gęstości objętościowej energii:

(14) $$W_e' = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2}$$

oraz objętości międzyelektrodowej V i może być zapisana w następującej postaci:

(15) $$W_e = \int_V W_e' \cdot dV$$

Gęstość energii pola elektrycznego jest funkcją wytrzymałości dielektrycznej dielektryka między elektrodowego oraz jego stałej dielektrycznej ε. Można zwiększać powierzchnię elektrod, jednak nie przekroczymy równania (14) i związanych z nim ograniczeń. Maksymalna zgromadzona energia jest ograniczona skończonymi wartościami stałej dielektrycznej ε i wytrzymałością elektryczną dielektryka międzyelektrodowego, chyba że super kondensator nie jest kondensatorem a energia nie jest gromadzona w polu elektrycznym tylko w reakcjach chemicznych. Jednak to powinno być wyjaśnione. Nazwy powinny poprawnie opisywać zjawisko fizyczne.
Czy równanie (47)

(16) $$\frac{d^{\alpha} x(t)}{dt^{\alpha}} = Ax(t) + Bu(t)$$

z pracy [1] jest poprawne trudno jest powiedzieć ponieważ nie są znane wymiary poszczególnych elementów. Nie mniej równanie (48) [1]:

(18) $$e = RC_1 \frac{d^{\alpha} u_1}{dt^{\alpha}} + u_1$$

dla $\alpha \neq 1$ jest po prostu błędne. Jeżeli α nie jest równe 1 to wyrażenie $RC_1 \frac{d^{\alpha} u_1}{dt^{\alpha}}$ nie ma wymiaru napięcia. R jest rezystancją, a C_1 jest pojemnością. Nie można mieszać w równaniu różnych wielkości fizycznych. Wymiarowa jednorodność jest w dużym skrócie omówiona w p. 2.4 [5]. W trakcie wykładów wyjaśniamy naszym studentom, że jest ona bardzo pomocna w sprawdzaniu poprawności zapisanych równań. Czasami może być pomocna przy tworzeniu równań lub relacji opisujących różne zjawiska fizyczne. Bardzo pomocne jest twierdzenie π. Nie zależnie od konieczności przestrzegania jednorodności wymiarowej relacje między napięciem i prądem na poszczególnych elementach obwodów elektrycznych są ściśle ustalone przez obowiązujące prawa elektrotechniki. Rozpatrzmy trzy elementy pasywne R, L i C. Na tych elementach jest jasno zdefiniowana zależność między prądem a napięciem. W przypadku rezystancji zależność przybiera postać prawa Ohma:

(19) $$i = \frac{u}{R}$$

Ma ono powyższą postać a nie na przykład :

(20) $$i = \frac{u^{\alpha}}{R^{\alpha}}$$

Podobnie jest z indukcyjnością, która wiąże prąd i napięcie z pomocą równań:

(21) $$u = L\frac{di}{dt}$$

lub $$i = \frac{1}{L}\int u dt$$

a nie $$u = L\frac{d^{\alpha} i}{dt^{\alpha}}$$

Podobnie jest z pojemnością:

(22) $$u = \frac{1}{C}\int i dt$$

lub $$i = C\frac{du}{dt}$$

a nie $$i = C\frac{d^{\alpha} u}{dt^{\alpha}}$$

Mówiąc inaczej prąd w kondensatorze jest iloczynem pojemności C i pochodnej napięcia na kondensatorze. To jest prawo fizyki. Nie zostało ono obalone. Tak samo jak relacja między napięciem na indukcyjności i pochodną sprzężonego z nią strumienia.

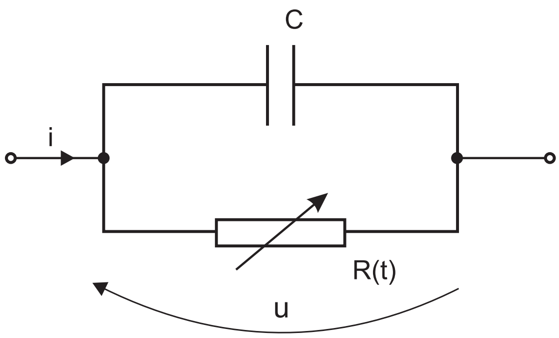
Niektórzy autorzy [6] zauważają niejednorodność wymiarową jaka się pojawia w równaniu fizycznym po skorzystaniu z pochodnych ułamkowego rzędu. Starają się ją usunąć wprowadzając „Planck units”, lub inaczej zdefiniowaną pojemność [7]. Niestety nie usuwa to nieprawdziwości użytych równań. Użyte w pracy [7] w oparciu o czysto doświadczalne prawo Curie z 1889r. równanie (w oryginalnym zapisie):

$$i(t) = \frac{U_0}{h_1 t^n} \quad 0 < n < 1, \quad t > 0 \tag{23}$$

budzi też poważne zastrzeżenie. Dotyczy ono prądu płynącego przez stratny kondensator po przyłożeniu do niego napięcia stałego. Otóż z wzoru (23) wynika, że w chwili t = 0 prąd $i(t) = \infty$, a tak jest w przypadku kondensatora idealnego kiedy prąd jest deltą Diraca nie w kondensatorze stratnym.

Innym bardzo ważnym problemem są powszechnie używane w elektrotechnice schematy zastępcze. Zapis przy symbolach pojemności C_1 i C_2 na rysunku 7 [7] $\frac{1}{s^{n_1} C_1}$ i $\frac{1}{s^{n_2} C_2}$ dla $n_1 \neq 1$ i $n_2 \neq 1$ jest po prostu błędny. Należałoby napisać: $\frac{1}{sC_1}$ i $\frac{1}{sC_2}$.

W przypadku pracy [7] odpowiednim schematem zastępczym kondensatora stratnego wydaje się być schemat przedstawiony na rysunku 1, gdzie rezystancja równoległa dla czasu $t = \infty$ jest równa ∞. To jednak nie jest zgodne z prawdą.



Rys. 1. Schemat zastępczy kondensatora

Podsumowanie

Wprowadzane nowe metody matematyczne pomagają w rozwoju fizyki. Upraszczają zapis skomplikowanych równań. Z tego powodu należy docenić wymienione prace prof. T. Kaczorka i innych autorów dążących do wprowadzenia do teorii obwodów elektrycznych pochodnych ułamkowych. Matematyka umożliwia wykonywanie skomplikowanych obliczeń ale jest też sposobem myślenia. Przykładem kłopotów z matematyką mogą służyć przygody z nią Alberta Einsteina [9]. Początkowo pisał On, że gdy matematycy wzięli się za jego teorię względności to on sam przestał ją rozumieć. Potem docenił rolę matematyki i prac Hermana Minkowskiego. Jednak nawet najnowsze bardzo cenne metody matematyczne użyte do opisu zjawisk fizycznych nie mogą być sprzeczne z opisywanymi prawami fizyki. Nie mogą burzyć matematycznego sposobu myślenia. Skomplikowane metody modelowania matematycznego mogą utrudnić zrozumienie zachodzącego zjawiska lecz nie powinny go całkowicie zamazywać. Jest to szczególnie ważne w naukach technicznych. Kiedyś istniało trywialne powiedzenie, że dobry wzór można przykryć kciukiem. Jest to przesada.

Czy przedstawione rozważania są poprawne pozostawiam do oceny czytelnikom. Może to ja jestem w błędzie.

Autor: *Emerytowany prof. zw. dr inż. Ryszard Sikora, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Informatyki, ul. Sikorskiego 37, 70-313 Szczecin, E-mail: rs@zut.edu.pl*

LITERATURA

[1] Kaczorek T., STANDARD AND POSITIVE ELECTRICAL CIRCUITS WITH ZERO TRANSFER MATRICES, Poznan *University of Technology Academic Journals* Issue 85, 2016.
[2] Kaczorek T., Rogowski K., Fractional Linear Systems and Electrical Circuits, Studies in Systems, *Decision and Control, Vol.*13 , Springer, 2015.
[3] Włodarczyk M., Zawadzki A., OBWODY RLC W ASPEKCIE POCHODNYCH NIECAŁKOWITYCH RZĘDÓW DODATNICH, *ELEKTRYKA*, ZESZYT 1(217), Kielce 2011.
[4] Sikora R., TEORIA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO, WNT Warszawa 1997.
[5] Sikora R., Chady T., Łopato P., Psuj G., ELEKTROTECHNIKA TEORETYCZNA, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, Szczecin 2016.
[6] Ertik H,. et. al., Investigation of electtrical RC circuit within the framework of ractinal calculus, *Revista Mexicana de Fisica* 61, (2015).
[7] Westerlund S., Ekstam L., Capacitor Theory, Tnasaction on Dielectrics and Electrical Insulation, V. 1 No. 5, October 1994.
[8] Morales M. A., Lainez R., MATHEMATICAL MODELLING OF FRACTIONAL ORDER CIRCUITS, arXiv:1602.03541v1 [physics.class-ph] 21 Jan 2016
[9] Kaku M., „Kosmos Einsteina”, *Pruszyński i S-ka*, Warszawa 2004.