

## Ocena niepewności estymacji funkcji autokorelacji metodą Monte Carlo

**Streszczenie.** Artykuł dotyczy problematyki wyznaczania niepewności estymacji funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego w warunkach konwersji a-c z sygnałem ditherowym. W pracy przedstawiono porównanie wyników badań różnych metod, analitycznej oraz symulacyjnej Monte Carlo. Przeprowadzone badania wskazują na przydatność stosowania metody Monte Carlo do oceny niepewności funkcji autokorelacji. Dodatkowo wykazano, że sygnał ditherowy najlepiej stosować zarówno dla małej wartości liczby próbek sygnału, jak i małej liczby bitów przetwornika a-c.

**Abstract.** The article discuss the problem of determining the uncertainty of autocorrelation function estimation for sinusoidal signal a-d converted with dither. The paper presents a comparison of test results for two techniques: the analytical method and Monte Carlo simulation. The results show that Monte Carlo method can be successfully applied to determine the autocorrelation function uncertainty. In addition, there were shown that use dither signal provides better results when applied to signals with small number of samples and a-d converter resolution limited do small number of bits. (**Uncertainty evaluation of autocorrelation function estimation using Monte Carlo method**)

**Słowa kluczowe:** funkcja autokorelacji, niepewność pomiaru, metoda Monte Carlo, dither.

**Keywords:** autocorrelation function, measurement uncertainty, Monte Carlo method, dither.

### Wprowadzenie

Artykuł przedstawia problematykę wyznaczania niepewności estymacji funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego w warunkach konwersji a-c z sygnałem ditherowym.

Funkcja autokorelacji stanowi ważne narzędzie analizy sygnałów. Możemy tu między innymi wyróżnić zastosowanie funkcji autokorelacji w filtracji i detekcji sygnałów w szumie, wyznaczaniu wartości parametrów sygnałów takich jak: wartość średnia, średniokwadratowa sygnału, czy wartość skuteczna oraz detekcji częstotliwości podstawowej sygnału, czy wyznaczanie zawartości energii w sygnale.

W systemach pomiarowych próbki sygnałów mają swoją cyfrową reprezentację. Oznacza to, że są one poddane kwantowaniu w przetworniku analogowo – cyfrowym. Przetwarzanie a-c zawiera operację kwantowania, która zawsze jest źródłem błędów kwantowania jest przetwarzanie z sygnałem ditherowym. Metoda ta polega na tym, że zasadniczy sygnał jest przetwarzany łącznie z dodatkowym sygnałem zwanym ditherowym, którym może być szum tkwiący w przetwarzanym sygnale lub szum celowo dodawany do sygnału wejściowego. Jeśli wartości badanej wielkości wyznacza się wiele razy w celu uśredniania, to dodanie sygnału ditherowego efektywnie poprawia dokładność tych średnich [1, 2]. Warunki odtwarzalności dla istniejących wariantów takiego kwantowania zostały podane oraz udowodnione w [3], gdzie wykazano, że taka konwersja jest efektywną metodą wpływania na wiarygodność pomiaru.

Wyznaczając niepewność można ocenić przydatność stosowania sygnału ditherowego. Narzędziem oceny niepewności może być metoda Monte Carlo, która umożliwia szacowanie przedziałów niepewności. W ten sposób można zawrzeć w wyniku zarówno obciążenie, jak i niepewność standardową. Dlatego też wyznaczenie niepewności estymacji funkcji autokorelacji sygnałów przy konwersji a-c z sygnałem ditherowym za pomocą metody Monte Carlo, zdaniem autorów, jest uzasadnione.

### Obciążenie estymatora funkcji autokorelacji

Jednym z parametrów oceny dokładności estymatora jest obciążenie opisujące systematyczną składową błąd. Zgodnie z Przewodnikiem [4], jeżeli znana jest dokładna wartość obciążenia, można ją uwzględnić stosując

poprawkę do wyniku, w innym przypadku obciążenie podawane jest w postaci niepewności.

Oznaczmy przez

$$(1) \quad y(t) = x(t) + d(t)$$

sumę sygnału sinusoidalnego  $x(t)$  o amplitudzie  $A$  i sygnału losowego  $d(t)$  o rozkładzie normalnym i odchyleniu standardowym  $\sigma$  oraz zerowej wartości oczekiwanej. Przyjmujemy, że  $x(t)$  i  $d(t)$  są sygnałami losowo niezależnymi. Zakładamy, że przetwarzanie odbywa się za pomocą idealnego przetwornika a-c typu zaokrąglenie.

Funkcję autokorelacji sygnału  $y(t)$  definiujemy w następujący sposób:

$$(2) \quad R_{y(t)}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) y(t + \tau) dt,$$

gdzie  $T \in \mathbf{R}_+$  to okres,  $\tau \in \mathbf{R}$  to opóźnienie sygnału  $y(t)$ .

Zwróćmy uwagę, że:

$$(3) \quad R_{y(t)}(0) = E[y^2],$$

gdzie  $E[y^2]$  jest wartością średniokwadratową sygnału  $y(t)$  nazywaną w probabilistyce momentem zwykłym drugiego rzędu zmiennej losowej  $y$ , która przyjmuje wartości sygnału  $y(t)$ .

Momenty  $k$ -tego rzędu zmiennej losowej  $y$  wyznaczamy na podstawie zależności [6]:

$$(4) \quad E[y^k] = (-j)^k \frac{d^k}{dv^k} \Phi_y(v) \Big|_{v=0}, \quad j = \sqrt{-1},$$

gdzie  $\Phi_y(v)$  jest funkcją charakterystyczną zmiennej  $y$ .

Załóżmy, że sygnał  $y(t)$  poddany został kwantowaniu w przetworniku a-c z krokiem kwantowania  $q$ . Wtedy:

$$(5) \quad E[y_q^k] = (-j)^k \frac{d^k}{dv^k} \Phi_{y_q}(v) \Big|_{v=0},$$

przy czym  $y_q$  jest zmienną losową odpowiadającą sygnałowi skwantowanemu  $y_q(t)$ , gdzie:

$$(6) \quad \Phi_{y_q}(v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Phi_y\left(v + \frac{2\pi}{q}i\right) \text{sinc}\left(\frac{qv}{2} + \pi i\right)$$

jest funkcją charakterystyczną sygnału  $y_q(t)$ .

Teoretyczne obciążenie (błąd systematyczny) funkcji autokorelacji w zerze dla sygnału  $y_q(t)$  można przedstawić następująco:

$$(7) \quad b_{R_{y(0)}} = R_{y_q}(0) - R_y(0) = E[y_q^2] - E[y^2] = \\ = (-j)^2 \frac{d^2}{dv^2} \Phi_{y_q}(v) \Big|_{v=0} - (-j)^2 \frac{d^2}{dv^2} \Phi_y(v) \Big|_{v=0}.$$

Dla sumy sygnału sinusoidalnego o amplitudzie  $A$  i sygnału Gaussa o odchyleniu standardowym  $\sigma$ , o zerowej wartości oczekiwanej każdy, funkcja charakterystyczna przyjmuje postać:

$$(8) \quad \Phi_y(v) = \Phi_x(v) \cdot \Phi_d(v) = J_0(A \cdot v) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\sigma^2\right).$$

Na podstawie (7) i (8) oraz uwzględniając poprawkę Sheppard'a  $q^2/12$  otrzymujemy [2]:

$$(9) \quad b_{R_{y(0)}}^* = A^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \left[ \left( 2 \cdot \frac{\sigma}{q} \cdot \left(\frac{A}{q}\right)^{-1} \right)^2 + \beta^{-2} \right] \cdot \\ \cdot \left[ J_0(2\beta) + 2\beta^{-1} \cdot J_1(2\beta) \right] \cdot \exp\left(-2\left(\pi i \frac{\sigma}{q}\right)^2\right),$$

gdzie sumę można ograniczyć do 100 wyrazów,  $\beta = \pi A/q$ ,  $J_0$ ,  $J_1$  – funkcje Bessel'a. Wzory (7) i (9) związane są następującą zależnością:

$$(10) \quad b_{R_{y(0)}} = b_{R_{y(0)}}^* + \frac{q^2}{12}.$$

### Niepewność standardowa estymatora funkcji autokorelacji

Drugim parametrem stosowanym do opisu dokładności estymatorów, poza obciążeniem, jest wariancja, z której pierwiastek stanowi niepewność standardową. W literaturze rozpatrywane są przypadki analitycznego wyznaczenia wariancji na podstawie momentów zmiennej losowej, która przyjmuje wartości próbek sygnału [7]. Nierozwiązany jest jednak problem wyznaczania niepewności dla zmiennej losowej, którą stanowią wartości wyznaczone z zastosowaniem funkcji autokorelacji w warunkach konwersji a-c.

Niepewność standardową można jednak wyznaczyć na podstawie zaleceń Przewodnika [4]. Załóżmy, że analizowany jest sygnał sinusoidalny postaci:

$$(11) \quad y_s(t) = A \sin(2\pi ft + \varphi),$$

gdzie:  $A$  – amplituda,  $f$  – częstotliwość,  $t$  – czas,  $\varphi$  – faza początkowa.

Jeśli sygnał (11) zostanie spróbkowany, to uzyskamy:

$$(12) \quad y_{sp}(n) = A \sin\left(2\pi fn \frac{1}{f_p} + \varphi\right),$$

gdzie:  $n$  – numer próbki,  $f_p$  – częstotliwość próbkowania. Na podstawie próbek sygnału sinusoidalnego można wyznaczyć wartość autokorelacji:

$$(13) \quad R_y(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_{sp}(n) \cdot y_{sp}(n+k),$$

gdzie:  $k$  – numer przesunięcia czasowego,  $N$  – liczba próbek. Równanie (13) stanowi podstawę do wyznaczenia niepewności na podstawie Przewodnika. Przykład wyznaczania niepewności pomiaru obliczanego na podstawie próbek przedstawiono w [8]. W estymatorze (13) pary próbek  $y_{sp}(n)$ ,  $y_{sp}(n+k)$  traktowane są jako zmienne wejściowe estymatora, natomiast  $R_y(k)$  stanowi zmienną wyjściową. Ponieważ  $y_{sp}(n)$  oraz  $y_{sp}(n+k)$  zależą od siebie, więc we wzorze na niepewność wielkości wyjściowej uwzględniono korelację między parami próbek:

$$(14) \quad u_{R_{y(k)}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N c_{1(n)}^2 u_{y_{sp}(n)}^2 + \sum_{n=1}^N c_{2(n)}^2 u_{y_{sp}(n+k)}^2 + 2 \sum_{n=1}^N c_{1(n)} u_{y_{sp}(n)} c_{2(n)} u_{y_{sp}(n+k)} r(y_{sp}(n), y_{sp}(n+k))}{N}},$$

gdzie  $c_{1(n)}$  oraz  $c_{2(n)}$  to współczynniki wrażliwości ( $c_{1(n)} = \frac{\partial R_y}{\partial y_{sp}(n)} = \frac{1}{N} y_{sp}(n+k)$ ,  $c_{2(n)} = \frac{\partial R_y}{\partial y_{sp}(n+k)} = \frac{1}{N} y_{sp}(n)$ ),  $r(y_{sp}(n), y_{sp}(n+k))$  – współczynniki korelacji między parami próbek,  $u_{y_{sp}(n)}$ ,  $u_{y_{sp}(n+k)}$  – niepewności standardowe próbek. Zakładając, że dither i kwantowanie statystycznie jednakowo wpływają na każdą próbkę sygnału można dodatkowo zapisać:

$$(15) \quad u_{y_{sp}(n)} = u_{y_{sp}(n+k)} = \sqrt{u_{dither}^2 + u_q^2},$$

gdzie:  $u_{dither}$  – odchylenie standardowe dithera,  $u_q$  – odchylenie standardowe błędu kwantowania.

W praktyce najczęściej wartość autokorelacji wyznaczana jest dla chwili czasowej  $k=0$ , dlatego dalsze rozważania dotyczą tego przypadku. Dla  $k=0$  współczynnik korelacji  $r(y_{sp}(n), y_{sp}(n+0))=1$ . Na podstawie (14) i (15) uzyskamy wzór na niepewność funkcji autokorelacji w zerze:

$$(16) \quad u_{R_{y(0)}} = \sqrt{\left(\frac{4}{N^2} \sum_{n=1}^N y_{sp}^2(n)\right) (u_{dither}^2 + u_q^2)}$$

Ze wzoru (16) wynika, że wartość niepewności standardowej funkcji autokorelacji zależy od liczby próbek analizowanego sygnału.

### Wyznaczanie niepewności estymatora funkcji autokorelacji metodą Monte Carlo

Metoda Monte Carlo umożliwia rozwiązywanie złożonych zadań, między innymi matematycznych, z zastosowaniem eksperymentu losowania wartości wybranych wielkości charakteryzujących określone zadanie. W metrologii metoda Monte Carlo znalazła zastosowanie w wyznaczaniu niepewności pomiaru. Zalecenia odnośnie stosowania tej metody przedstawiono w międzynarodowym dokumencie [9].

W pracy metodę Monte Carlo zastosowano do szacowania obciążenia estymatora oraz niepewności standardowej estymatora funkcji autokorelacji w celu porównania wyników symulacyjnych z analitycznymi. Dodatkowo z zastosowaniem tej metody wyznaczano niepewności dla określonego prawdopodobieństwa w celu oceny przydatności stosowania dithera przy konwersji a-c sygnału sinusoidalnego.

Własności estymatora funkcji autokorelacji badano przyjmując następujące założenia:

- Wielkością wyjściową jest obciążenie estymatora funkcji autokorelacji w zerze:

$$(17) \quad b_{R_{y_{MC}}(0)} = \hat{R}_y(0) - R_y(0) + p,$$

gdzie:  $\hat{R}_y(0)$ ,  $R_y(0)$  to odpowiednio estymator i wartość prawdziwa funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego,  $p$  – poprawka, która wynosi albo  $q^2/12$  w przypadku badania wpływu kwantowania albo  $q^2/12 - u_{dither}^2$  dla wpływu kwantowania z ditherem na estymator funkcji autokorelacji w zerze dla sygnału sinusoidalnego.

- Estymator  $\hat{R}_{y_{MC}}(0)$  wyliczany jest ze wzoru:

$$(18) \quad \hat{R}_{y_{MC}}(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_q^2(n)$$

na podstawie skwantowanych  $y_q(n)$  wartości próbek sygnału.

- Kwantowanie realizowane jest z zastosowaniem wzoru:

$$(19) \quad y_q(n) = q \cdot \text{Ent} \left( \left( y(n) + 0,5q \frac{y(n)}{|y(n)|} q \right) / q \right),$$

gdzie:  $q$  – krok kwantowania,  $\text{Ent}$  – część całkowita, dla  $y_{sp}(n)$  próbek sygnału sinusoidalnego powiększonych o  $y_{dither}(n)$  wartość losową dithera:

$$(20) \quad y(n) = y_{sp}(n) + y_{dither}(n).$$

- Wartości próbek sygnału sinusoidalnego  $y_{sp}(n)$  obliczane są ze wzoru (12) na podstawie określonych wartości parametrów  $A$ ,  $f$ ,  $f_p$  oraz losowej wartości fazy początkowej  $\varphi$  [10].
- Wartości  $y_{dither}(n)$ ,  $\varphi$  generowane są losowo za pomocą generatora liczb losowych zgodnie z określonym rozkładem: dither – rozkład Gaussa, faza początkowa – rozkład równomierny.
- Na podstawie wielu eksperymentów losowych ( $M=10^6$  realizacji dla poziomu ufności  $p=0,95$  wg [9]) otrzymuje się zbiór wartości  $b_{R_{y_{MC}}(0)_j}$ , gdzie  $j \in \langle 1; M \rangle$ , umożliwiające wyznaczenie oceny obciążenia estymatora funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego w zerze, zgodnie ze wzorem:

$$(21) \quad \hat{b}_{R_{y_{MC}}(0)} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M b_{R_{y_{MC}}(0)_j}.$$

- Niepewność standardowa estymatora funkcji autokorelacji wyznaczana jest ze wzoru:

$$(22) \quad u_{R_{y_{MC}}(0)} = u_{b_{R_{y_{MC}}(0)}} = \sqrt{\frac{1}{(M-1)} \sum_{j=1}^M (b_{R_{y_{MC}}(0)_j} - \hat{b}_{R_{y_{MC}}(0)})^2}.$$

- Niepewność dla przyjętego prawdopodobieństwa  $p=0,95$ , zwana przedziałem objęcia, wyznaczana jest na podstawie  $G$  dyskretnej reprezentacji dystrybuanty wielkości wyjściowej  $b_{R_{y_{MC}}(0)}$  zgodnie z [9]. Dyskretną reprezentację dystrybuanty stanowią posortowane w niemalejącym porządku wartości  $b_{R_{y_{MC}}(0)_j}$ . Uzyskany

przedział objęcia określany jest dolną granicą  $U_{R_y(0)low}$  i górną granicą  $U_{R_y(0)high}$ .

## Wyniki badań

Badania analityczne i symulacyjne przeprowadzono dla przykładowej wartości amplitudy napięcia sinusoidalnego  $A=4,7$  V, stosunku częstotliwości  $f/f_p=1/N$  (w każdym rozpatrywanym przypadku próbki pochodziły z jednego okresu napięcia sinusoidalnego), a krok kwantowania wyznaczany był ze wzoru:

$$(23) \quad q = \frac{2A}{2^B - 3}.$$

Zależność (23) wynika z doboru zakresu przetwornika a-c odpowiadającego wartości  $2A+3u_{dither}$ . Poza tym przyjęto  $u_{dither}=0,5q$ , ponieważ w takim przypadku występuje najkorzystniejszy wpływ dithera [2].

W tabeli 1 przedstawiono zestawienie wyników badań analitycznych i symulacyjnych dla obciążenia i niepewności standardowej funkcji autokorelacji napięcia sinusoidalnego wyznaczanej na podstawie próbek skwantowanych oraz próbek skwantowanych z dodanym sygnałem ditherowym. Można zauważyć dużą zgodność wyników obciążenia i niepewności standardowej estymatora uzyskanych dla obu metod obliczeń. Wskazuje to na skuteczność i prawidłowość stosowania metody Monte Carlo do określania parametrów funkcji autokorelacji, tj. obciążenia i niepewności standardowej.

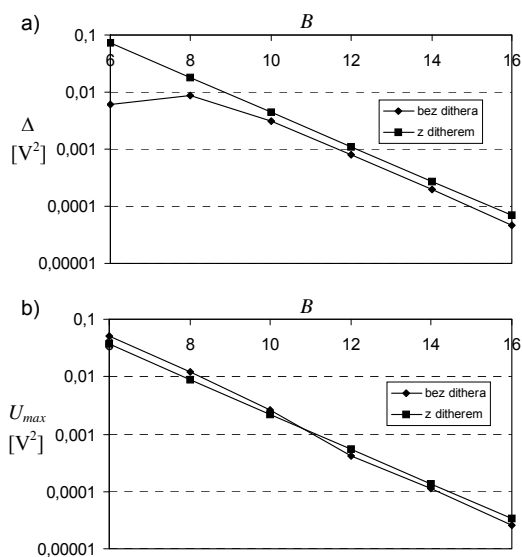
Tabela1. Wyniki obliczeń analitycznych i symulacyjnych obciążenia i niepewności standardowej funkcji autokorelacji dla różnych  $B$  wartości rozdzielczości przetwornika a-c oraz  $N=1000$

Dither	B	Obliczenia analityczne		Obliczenia metodą MC	
		$b^*_{R_y(0)}$ $V^2$	$u_{R_y(0)}$ $V^2$	$\hat{b}_{R_{y_{MC}}(0)}$ $V^2$	$u_{R_{y_{MC}}(0)}$ $V^2$
wyłączony	6	-4,8E-2	9,3E-3	-4,9E-2	1,6E-3
	8	-5,7E-3	2,3E-3	-5,8E-3	2,6E-3
	10	-7,0E-4	5,6E-4	-7,1E-4	8,1E-4
	12	-8,7E-5	1,4E-4	-8,9E-5	2,0E-4
	14	-1,1E-5	3,5E-5	-1,1E-5	5,1E-5
	16	-1,4E-6	8,7E-6	-1,4E-6	1,2E-5
włączony	6	-1,3E-4	1,9E-2	-1,2E-4	1,9E-2
	8	-1,6E-5	4,5E-3	-1,5E-6	4,5E-3
	10	-2,0E-6	1,1E-3	-1,8E-6	1,1E-3
	12	-2,5E-7	2,8E-4	-2,3E-7	2,8E-4
	14	-3,0E-8	7,0E-5	-2,7E-8	7,0E-5
	16	-3,8E-9	1,7E-5	-8,4E-9	1,7E-5

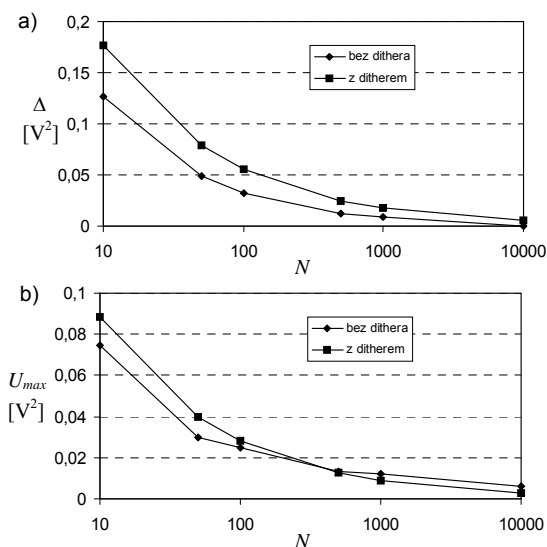
Na podstawie obliczeń analitycznych nie do końca jesteśmy w stanie określić przydatność stosowania dithera w określonym pomiarze. Z jednej strony dodanie dithera do sygnału sinusoidalnego powoduje zmniejszenie wartości obciążenia estymatora funkcji autokorelacji, ale z drugiej strony wzrasta niepewność standardowa estymatora. Wydaje się, że najlepszym sposobem oceny skuteczności stosowania dithera byłby taki parametr, który łączyłby dwa parametry tj. obciążenie i niepewność standardową. Takie możliwości stwarza metoda Monte Carlo. Umożliwia ona wyznaczenie przedziału niepewności (objęcia) dla określonego prawdopodobieństwa (tabela 2). Na podstawie przedziału można np. określić wartość maksymalną niepewności  $U_{max}=\max(|U_{R_y(0)low}|, |U_{R_y(0)high}|)$  lub szerokość przedziału  $\Delta=U_{R_y(0)high}-U_{R_y(0)low}$ . Na rysunku 1 przedstawiono wykresy  $U_{max}$  i  $\Delta$  w funkcji liczby bitów przetwornika uzyskane na podstawie danych z tabeli 2.

Tabela 2. Wyniki obliczeń symulacyjnych przedziału niepewności funkcji autokorelacji dla poziomu ufności  $p=0,95$ , różnych wartości  $B$  rozdzielczości przetwornika a-c oraz  $N=1000$

Dither	$B$	$(u_{Ry(0)low}; u_{Ry(0)high}) V^2$
wyłączony	6	-5,2E-02..-4,6E-02
	8	-1,2E-02..-3,4E-03
	10	-2,6E-03..5,3E-04
	12	-4,1E-04..3,9E-04
	14	-1,2E-04..8,3E-05
włączony	6	-2,5E-05..2,0E-05
	8	-3,7E-02..3,6E-02
	10	-8,7E-03..8,9E-03
	12	-2,2E-03..2,2E-03
	14	-5,5E-04..5,5E-04
16	-3,4E-05..3,4E-05	



Rys. 1. Charakterystyka a) przedziału niepewności oraz b) wartości maksymalnej niepewności w funkcji liczby bitów przetwornika A/C dla  $p=0,95$ ,  $N=1000$



Rys. 2. Charakterystyka a) przedziału niepewności oraz b) wartości maksymalnej niepewności w funkcji liczby próbek  $N$  dla  $p=0,95$ ,  $B=8$

Przedstawione wyniki badań wskazują (rys. 1 oraz rys 2.), że stosowanie dithera powoduje zwiększenie przedziału niepewności bez względu na liczbę bitów przetwornika a-c.

Rozpatrując z kolei maksymalną wartość niepewności, można zauważyć, że przydatność dithera zależy od parametrów przetwarzania: liczby bitów oraz liczby próbek użytych do estymacji.

### Podsumowanie

Przeprowadzone badania analityczne i symulacyjne właściwości funkcji autokorelacji w warunkach konwersji a-c z ditherem wskazują na przydatność stosowania metody Monte Carlo do oceny niepewności funkcji autokorelacji. Stosując metodę Monte Carlo w badaniach funkcji autokorelacji można wyznaczyć przedział niepewności, który umożliwia ocenę skuteczności stosowania sygnału ditherowego. Analiza wyników badań uzyskanych za pomocą metody Monte Carlo pozwala stwierdzić, że w pomiarach funkcji autokorelacji, w których dokonuje się korekcji błędu systematycznego (obciążenia funkcji) dodanie dithera do sygnału sinusoidalnego spowoduje wzrost niepewności pomiaru. Stosowanie dithera może mieć uzasadnienie w pomiarach bez korekcji powstałego błędu systematycznego. Analizując wtedy maksymalną niepewność  $U_{max}$  można określić, dla jakiej liczby próbek  $N$  i rozdzielczości  $B$  przetwornika a-c warto zastosować dither.

**Autorzy:** dr inż. Elżbieta Kawecka, Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii, Elektroniki i Informatyki, ul. Szafrana 2, 65-514 Zielona Góra, E-mail: [E.Kaweckai@imei.uz.zgora.pl](mailto:E.Kaweckai@imei.uz.zgora.pl); dr inż. Mariusz Krajewski, Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii, Elektroniki i Informatyki, ul. Szafrana 2, 65-514 Zielona Góra, E-mail: [M.Krajewskii@imei.uz.zgora.pl](mailto:M.Krajewskii@imei.uz.zgora.pl).

### LITERATURA

- [1] Lal-Jadziak J., Estimation of correlation functions on the basis of digital signal representation, *Measurements models systems and design* / ed. by J. Korbicz, Wydaw. Komunikacji i Łączności, Warszawa, (2007), 29–47
- [2] Kawecka E., Oddziaływanie na dokładność cyfrowych pomiarów korelacyjnych, *Rozprawa doktorska*, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra, (2008)
- [3] Domańska A., Oddziaływanie na wiarygodność w systemach pomiarowych poprzez zastosowanie konwersji a-c z sygnałem ditherowym, Seria Rozprawy, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, (1995), nr 308
- [4] Guide to the expression of uncertainty in measurement, 1993-95 ISO. Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik – tłumaczenie i komentarz J. Jaworskiego, Wydawnictwo Głównego Urzędu Miar Alfero, (1999), (2002)
- [5] Widrow B., Kollar I., Quantization noise – roundoff error in digital computation, signal processing, control, and communications, Cambridge University Press, New York, (2008)
- [6] Papoulis A., Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, New York, McGraw-Hill, (1991)
- [7] Lal-Jadziak J., Sienkowski S., Variance of random signal mean square value digital estimator, *Metrology and Measurement Systems*, (2009), Vol. 16, no 2
- [8] Betta G., Liguori C., Pietrosanto A., Propagation of uncertainty in a discrete Fourier transform algorithm. *Measurement* 27, (2000)
- [9] Evaluation of measurement data, Supplement 1 to the „Guide to the expression in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method, Joint Committee for Guides in Metrology, (2008)
- [10] Krajewski M., Budowa budżetu niepewności z zastosowaniem metody Monte Carlo do analizy właściwości algorytmów cyfrowego przetwarzania sygnałów, *Pomiary Automatyka Kontrola*, (2012), Vol. 58, nr 9