

Estymacja największej wiarygodności w obecności pomiarów anomalnych w nieliniowym kanale pomiarowym

Streszczenie. W artykule opisano nowy suboptymalny algorytm estymacji dla systemów pomiarowych, w których zakłócenia powodują pojawianie się pomiarów anomalnych. Proponowana metoda wykorzystuje dwurozkładowy gaussowski model zakłóceń procesu pomiarowego. Na jego podstawie opracowano algorytm wyznaczania a posteriori prawdopodobieństwa stanu kanału pomiarowego, który zastosowano jako rozszerzenie estymatora największej wiarygodności pozwalające na wykrycie i eliminację pomiarów anomalnych. W artykule rozpatrzono zakłócenia pojawiające się w nieliniowym torze pomiarowym oraz śledzenie obiektu opisanego nieliniowymi równaniami stanu. Zaprezentowano również wyniki badań symulacyjnych.

Abstract. The paper presents a new outlier detection and suppression suboptimal algorithm for the maximum likelihood estimation method. The proposed method is based on the mathematical model of disturbances in a form of noise variance changes. The outliers detection is done on the basis of the a posteriori probabilities of the measurement channels state. The system with measurement channel described by nonlinear equation and object with nonlinear dynamics are considered. Simulation results are presented. The proposed algorithm reveals better performance than typical MLE method. **Maximum likelihood estimation in presence of outliers in nonlinear measurement channel**

Słowa kluczowe: przetwarzanie sygnałów, pomiary anomalne, estymator największej wiarygodności, nieliniowy kanał pomiarowy.

Keywords: signal processing, outliers, maximum likelihood estimation, nonlinear measurement channel.

Wstęp

Jednym z problemów spotykanych w systemach pomiarowych jest ich wrażliwość na zakłócenia elektromagnetyczne, które mimo zabezpieczeń mogą prowadzić do pojawiania się pomiarów anomalnych. Pomiary tego typu, w systemach telekomunikacyjnych, mogą być również powodowane przez zjawiska takie jak transmisja wielodrogowa, fluktuacje sygnału, nagłe zmiany właściwości kanału transmisji, a nawet zakłócenia celowe. Pojawienie się pomiarów anomalnych prowadzi do ogólnego pogorszenia jakości danych pomiarowych, a co za tym idzie do pogorszenia warunków przetwarzania oraz wzrostu błędu estymacji. W związku z tym, na etapie przetwarzania danych należy zastosować metody wykrycia pomiarów anomalnych i ich tłumienia [1, 2, 3, 4]. Poza tym metody te powinny mieć możliwość zastosowania w systemach wielosensorowych, które z natury są potencjalnie mniej wrażliwe na zakłócenia w porównaniu z systemami jednosensorowymi. Opracowanie metody estymacji spełniającej powyższe wymagania można oprzeć na metodzie największej wiarygodności (MLE ang. maximum likelihood estimation) [5]. Jednak metoda ta, jak pokazano w [6], nie jest odporna na obecność pomiarów anomalnych, które powodują znaczne zwiększenie błędów estymacji.

Celem artykułu jest przedstawienie nowego algorytmu pozwalającego na prowadzenie estymacji w systemie o nieliniowym kanale pomiarowym w warunkach pojawiających się pomiarów anomalnych. Proponowana metoda wykorzystuje dwurozkładowy gaussowski model zakłóceń procesu pomiarowego. Na jego podstawie opracowano algorytm wyznaczania a posteriori prawdopodobieństwa stanu kanału pomiarowego. Algorytm ten zastosowano jako rozszerzenie estymatora MLE, co w efekcie pozwoliło na znaczne zmniejszenie błędów estymacji w przypadku pojawiających się pomiarów anomalnych.

W artykule zostaną rozpatrzone zakłócenia nieliniowego toru pomiarowego. Ponadto zostanie zaprezentowany algorytm śledzenia obiektu, którego trajektoria opisana jest nieliniowymi równaniami stanu. Sytuacja ta będzie zilustrowana na przykładzie radarowego śledzenia obiektu poruszającego się po trajektorii balistycznej.

Model śledzonego obiektu

Ruch obiektu poruszającego się po trajektorii balistycznej [7] może być modelowany w kartezjańskim układzie współrzędnych związanym z punktem startowym. Na skutek działających na obiekt sił aerodynamicznych model matematyczny jest nieliniowy i niestacjonarny:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = V_x(t) \\ \dot{y}(t) = V_y(t) \\ \dot{z}(t) = V_z(t) \\ \dot{V}_x(t) = -\frac{\rho[z(t)]}{2\beta[V(t)]} V(t) \cdot V_x(t) \\ \dot{V}_y(t) = -\frac{\rho[z(t)]}{2\beta[V(t)]} V(t) \cdot V_y(t) \\ \dot{V}_z(t) = -\frac{\rho[z(t)]}{2\beta[V(t)]} V(t) \cdot V_z(t) - g \end{cases}$$

gdzie $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ są kartezjańskimi współrzędnymi obiektu, a $V_x(t)$, $V_y(t)$, $V_z(t)$ są odpowiednimi składowymi prędkości, przy czym $V(t) = \sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t) + V_z^2(t)}$ to

prędkość obiektu; funkcja $\rho[z(t)]$ opisuje zależność gęstości powietrza od wysokości, $\beta[V(t)]$ jest nieliniowym współczynnikiem balistycznym opisującym oddziaływanie atmosfery na obiekt, g oznacza przyspieszenie ziemskie.

Wektor stanu $X(t)$ zawiera kartezjańskie składowe położenia i prędkości. Jego wartość początkowa ma postać:

$$(2) \quad X_0 = [x_0, y_0, z_0, V_{x0}, V_{y0}, V_{z0}]^T$$

i praktycznie określa całą trajektorię obiektu opisanego modelem (1).

Model kanału pomiarowego

W przypadku sensora radarowego [8] pomiary uzyskiwane są w dyskretnych chwilach czasowych kT_s i prowadzone są w sferycznym układzie współrzędnych. Sensor ten dostarcza pomiarów odległości $r(k)$, azymutu $\alpha(k)$ oraz elewacji $\varepsilon(k)$. Jeśli trajektoria obserwowanego obiektu opisana jest w kartezjańskim układzie współrzędnych, jak ma to miejsce w rozpatrywanym przykładzie, to równania obserwacji będą nieliniowe. Pomiary anomalne spowodowane zakłóceniami procesu

miarowego mogą być modelowane jako zmiany wariancji szumu pomiarowego [4, 9, 10] i wówczas model nieliniowego kanału pomiarowego można przedstawić w postaci:

$$(3) \quad Z(k) = H[X(k)] + \gamma(k)w(k)$$

gdzie $Z(k) = [r(k), \alpha(k), \varepsilon(k)]^T$ jest wektorem pomiarów, $X(k) = [x(k), y(k), z(k), V_x(k), V_y(k), V_z(k)]^T$ to wektor stanu zawierający współrzędne kartezjańskie położenia $x(k)$, $y(k)$, $z(k)$ oraz prędkości $V_x(k)$, $V_y(k)$, $V_z(k)$ obserwowanego obiektu, funkcja $H[X(k)]$ modeluje pomiar jako konwersję z kartezjańskiego do sferycznego układu współrzędnych:

$$(4) \quad H[X(k)] = \begin{bmatrix} h_r[X(k)] \\ h_\alpha[X(k)] \\ h_\varepsilon[X(k)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x(k)^2 + y(k)^2 + z(k)^2} \\ \arctan \frac{x(k)}{y(k)} \\ \arcsin \frac{z(k)}{\sqrt{x(k)^2 + y(k)^2 + z(k)^2}} \end{bmatrix},$$

$w(k) = [w_r(k), w_\alpha(k), w_\varepsilon(k)]^T$ to biały, gaussowski szum pomiarowy o zerowej wartości oczekiwanej i macierzy kowariancyjnej $R(k)$, która jest macierzą diagonalną zawierającą wariancje $\sigma_r^2(k)$, $\sigma_\alpha^2(k)$, $\sigma_\varepsilon^2(k)$ wzajemnie niezależnych szumów pomiarowych z kanałów pomiaru $r(k)$, $\alpha(k)$, $\varepsilon(k)$, natomiast $\gamma(k)$ jest mnożnikiem pozwalającym na modelowanie pomiarów anomalnych. W przypadku reprezentacji dwurozkładowej, $\gamma(k)$ przyjmuje jedną z dwu wartości: $\gamma(k)=1$ gdy pomiary prowadzone są w warunkach typowych (brak zakłóceń) oraz $\gamma(k)=\gamma_0 > 1$ gdy pojawiają się pomiary anomalne (wpływ zakłóceń). Zakładając możliwość powstania niezależnych zakłóceń w każdym z trzech kanałów pomiarowych, mnożnik $\gamma(k)$ powinien zawierać trzy składowe: $\gamma_r(k)$, $\gamma_\alpha(k)$, $\gamma_\varepsilon(k)$. Ostatecznie macierz kowariancyjna szumu $R_\gamma(k)$ przyjmuje postać:

$$(5) \quad R_\gamma(k) = \begin{bmatrix} \gamma_r^2(k)\sigma_r^2(k) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_\alpha^2(k)\sigma_\alpha^2(k) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_\varepsilon^2(k)\sigma_\varepsilon^2(k) \end{bmatrix}$$

Rozpatrując zależności czasowe ciągu pomiarów anomalnych należy zauważyć, że może on stanowić ciąg nieskorelowany lub skorelowany. Przypadek nieskorelowany można modelować nieskorelowaną sekwencją $\gamma(k)$ opisaną prawdopodobieństwem P^{γ_0} przyjęcia wysokich wartości $\gamma(k)=\gamma_0$, natomiast przypadek drugi można zamodelować ciągiem $\gamma(k)$ opisanym stacjonarnym ciągiem Markowa z wektorem prawdopodobieństwa początkowego $P^\gamma(0)$ i macierzą przejścia $P^\gamma(k/k-1)$:

$$(6) \quad P^\gamma(0) = \begin{bmatrix} P^1 \\ P^{\gamma_0} \end{bmatrix}, \quad P^\gamma(k/k-1) = \begin{bmatrix} P^{11} & P^{1\gamma_0} \\ P^{\gamma_0 1} & P^{\gamma_0 \gamma_0} \end{bmatrix}$$

Algorytm estymacji

W przypadku kanału pomiarowego opisanego w poprzednim rozdziale, funkcja gęstości prawdopodobieństwa uzyskanych pomiarów przy zakładanym początkowym wektorze stanu X_0 ma postać:

$$L(X_0) = f(Z(1), Z(2), \dots, Z(M) / X_0) = \prod_{k=1}^M \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(r(k) - h_r[X(k)])^2}{2\sigma_r^2}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_\alpha \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\alpha(k) - h_\alpha[X(k)])^2}{2\sigma_\alpha^2}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\varepsilon(k) - h_\varepsilon[X(k)])^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)$$

gdzie M oznacza liczbę pomiarów, $r(k)$, $\alpha(k)$, $\varepsilon(k)$ to pomiary odległości, azymutu, elewacji uzyskane przez radar, natomiast $h_r[X(k)]$, $h_\alpha[X(k)]$, $h_\varepsilon[X(k)]$ to odległość, azymut i elewacja obliczone poprzez przeniesienie do współrzędnych sferycznych (związanych z radarem) symulowanych punktów trajektorii o początkowym wektorze stanu X_0 i chwilach czasowych zgodnych z k -tym pomiarem radarowym.

Definiując $\lambda(X_0) = -\ln(L(X_0))$ otrzymamy:

$$(8) \quad \lambda(X_0) = -\ln(f(Z(1), Z(2), \dots, Z(M) / X_0)) = M(\ln(\sigma_r \sqrt{2\pi}) + \ln(\sigma_\alpha \sqrt{2\pi}) + \ln(\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi})) + \sum_{k=1}^M \left[\frac{(r(k) - h_r[X(k)])^2}{2\sigma_r^2} + \frac{(\alpha(k) - h_\alpha[X(k)])^2}{2\sigma_\alpha^2} + \frac{(\varepsilon(k) - h_\varepsilon[X(k)])^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right]$$

Estymatę MLE [5] wektora stanu \hat{X}_0 można uzyskać rozwiązując następujące zagadnienie optymalizacji:

$$(9) \quad \hat{X}_0 = \arg \min_{X_0} \{\lambda(X_0)\}$$

Jednak jak pokazano w [6], pojawienie się pomiarów anomalnych powoduje zwiększenie błędów estymacji. W związku z tym niezbędne staje się wprowadzenie metody wykrycia pomiarów anomalnych oraz tłumienia ich wpływu. Rozwiązanie problemu wykrycia anomalii można oprzeć na wyznaczonym aposteriorycznym prawdopodobieństwie stanu kanału pomiarowego. W przypadku nieskorelowanych zakłóceń z apriorycznym prawdopodobieństwem ich zaistnienia równym P^{γ_0} , prawdopodobieństwo a posteriori pojawienia się anomalii $P_c^\gamma(k)$ w c -tym kanale pomiarowym $y_c(k)$ można wyznaczyć następująco:

$$(10) \quad P_c^\gamma(k) = \frac{f(y_c(k)/\gamma(k) = \gamma_0, Y_1^N) P^{\gamma_0}(k)}{\sum_{i=1, \gamma_0} f(y_c(k)/\gamma(k) = i, Y_1^N) P^i(k)}, \quad c \in \{r, \alpha, \varepsilon\}$$

gdzie

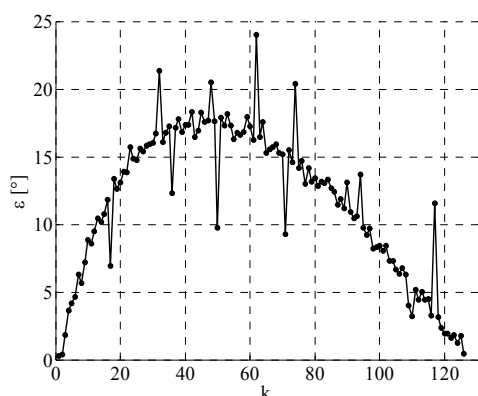
$$(11) \quad f(y_c(k)/\gamma(k) = i, Y_1^N) = N[\tilde{y}_c(k), R_{\tilde{y}_c}(k) + i^2 \sigma_c^2(k)]$$

oznacza gaussowską funkcję gęstości prawdopodobieństwa, gdzie $\tilde{y}_c(k)$ oraz $R_{\tilde{y}_c}(k)$ oznaczają pomiary i macierz kowariancyjną odnoszące się do pierwszej estymacji (9) na podstawie danych zawierających anomalie, $\sigma_c^2(k)$ jest wariancją szumu pomiarowego. Korzystając z wyznaczonych prawdopodobieństw (10) można przeprowadzić usuwanie lub tłumienie pomiarów anomalnych przed drugą iteracją procedury (9).

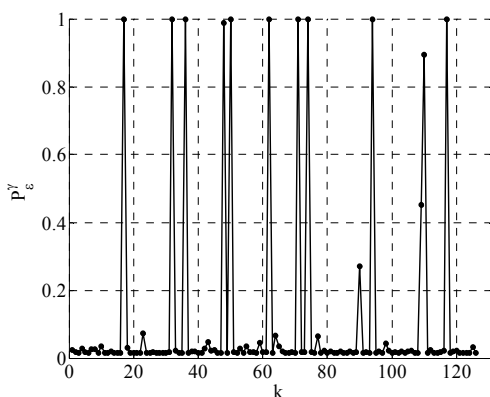
Badania symulacyjne

Efektywność proponowanej metody została sprawdzona na podstawie badań symulacyjnych, które prowadzono metodą Monte Carlo (przy $K=500$ przebiegów). Przyjęto następujące wartości parametrów: odchylenia standardowe szumów pomiarowych: $\sigma_r=15m$, $\sigma_\alpha=0,3^\circ$, $\sigma_\epsilon=0,5^\circ$, okres próbkowania: $T_s=0,2s$, mnożnik modelujący pomiary anomalne $\gamma_0=10$. Ciąg $\gamma(k)$ modelowano jako ciąg nieskorelowany z prawdopodobieństwem $P^{\gamma_0}=0,1$.

Na rysunku 1. zamieszczono przykładowy przebieg radarowych pomiarów elewacji trajektorii balistycznej z parametrami startu: $X_0=[1000, 1000, 0, 0, 141, 141]^T$. W tym przypadku nieskorelowane anomalie pojawiały się tylko w kanale elewacji. Na rysunku 2 przedstawiono wyznaczone a posteriori prawdopodobieństwo wystąpienia anomalii dla sekwencji pomiarów z rysunku 1.



Rys. 1. Przykład pomiarów elewacji z nieskorelowanymi anomaliami



Rys. 2. Prawdopodobieństwo a posteriori pomiarów anomalnych

Z porównania rysunków 1 i 2 wynika, że proponowany algorytm umożliwia wykrycie pojawienia się pomiarów anomalnych. W tabeli 1 zamieszczono wyniki badań dokładności estymacji położenia punktu startu (PS) i punktu upadku (PU) oraz prędkości początkowej V_0 uzyskanych z użyciem metody MLE oraz MLE uzupełnionej o proponowany algorytm wykrycia i usuwania anomalii. Zastosowaną miarą dokładności estymacji V_0 jest błąd średniokwadratowy (RMSE - ang. root mean square error), natomiast dokładność wyznaczania PS i PU jest określana za pomocą miary CEP (ang. circular error probability). Miara CEP jest definiowana jako długość promienia koła o środku w rzeczywistym punkcie położenia zawierającego 50% estymat. W tabeli przedstawiono wyniki badań dla dwóch przypadków zakłóceń: pojawiających się jednocześnie w trzech kanałach pomiarowych (odległość,

azymut, elewacja) lub pojawiających się jedynie w kanale pomiaru elewacji. Dla porównania zamieszczono również wyniki estymacji MLE w przypadku pomiarów nie zawierających anomalii.

Tabela 1. Dokładność estymacji PS, PU i V_0

Rodzaj	PS		PU
	CEP [m]	V_0 RMSE [m/s]	CEP [m]
anomalie tylko w kanale elewacji			
MLE	8,5	0,7	6,5
MLE z tłumieniem anomalii	4,0	0,3	3,9
anomalie jednocześnie w trzech kanałach (odległość, azymut, elewacja)			
MLE	11,1	0,9	11,2
MLE z tłumieniem anomalii	4,0	0,3	4,0
brak anomalii			
MLE	3,7	0,3	3,5

Jak wynika z danych zawartych w tabeli 1, proponowany algorytm wykazuje mniejszy błąd estymacji niż typowy algorytm MLE, a co za tym idzie większą odporność na pojawiające się pomiary anomalne.

Podsumowanie

W przypadku pojawiających się zakłóceń procesu pomiarowego powodujących powstanie pomiarów anomalnych następuje pogorszenie jakości estymacji typowego algorytmu MLE. W artykule zaproponowano nowy suboptymalny nieliniowy algorytm estymacji, który stanowi rozszerzenie estymatora MLE o procedurę wykrycia i usuwania anomalii. Wykrycie anomalii prowadzone jest na podstawie wyznaczanego prawdopodobieństwa a posteriori stanu kanałów pomiarowych. Jak wykazały badania symulacyjne proponowany algorytm charakteryzuje poprawa dokładności estymacji w stosunku do typowego algorytmu MLE w przypadku pojawiających się pomiarów anomalnych przy jednoczesnym umiarkowanym obciążeniu obliczeniowym.

Autor: dr inż. Dariusz Jańczak, Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny, ul. Wiejska 45 D, 15-351 Białystok, E-mail: d.janczak@pb.edu.pl.

LITERATURA

- [1] Aggarwal C. C., *Outlier Analysis*, Springer, 2013
- [2] Gupta M., Gao J., Aggarwal C., Han J., Outlier Detection for Temporal Data: A Survey, *IEEE Trans. on Knowledge and Data Engineering*, 25, (2014), no. 1, 2250-2267
- [3] Basu S., Meckesheimer M., Automatic outlier detection for time series: An application to sensor data, *Knowl. Inform. Syst.*, 11 (2007), no. 2, 137-154
- [4] Grishin Yu., Robust data processing on the presence of outliers, *Przegląd Elektrotechniczny*, 86 (2010), nr 3, 25-27
- [5] S. Kay, *Fundamentals of statistical signal processing: Estimation theory*, Prentice-Hall, 1993
- [6] Janczak D., Sankowski M., Grishin Yu., Measurement fusion using maximum likelihood estimation of ballistic trajectories, *IET Radar, Sonar & Navigation*, (2015), DOI: 10.1049/iet-rsn.2014.0316
- [7] Szadkowski J., *Balistyka zewnętrzna: model balistyczny*, Wydaw. Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 2004
- [8] Barton D., *Radar Systems Analysis and Modelling*, Artech House, 2005
- [9] Janczak D., An adaptive algorithm of state estimation in the presence of multiplicative interference, *Przegląd Elektrotechniczny*, 86 (2010), 30-31
- [10] Grishin Yu., Janczak D., A detection-estimation method for systems with random jumps with application to target tracking and fault diagnosis, *Nonlinear dynamics*, Intech, 2010, 343-366