

# Analiza błędów częstotliwościowych rezystorów

## Część 1. Modele rezystorów przy prądzie przemiennym i ich parametry

**Streszczenie.** W części 1 rozpatrzono cztery modele (schematy zastępcze) impedancji rezystora przy prądzie przemiennym zawierające parametr główny rezystancję  $R$  i parametry resztkowe: szeregową indukcyjność  $L$  i bocznikującą pojemność  $C$ . Przy prądzie przemiennym część rzeczywista impedancji rezystora nie jest równa jego rezystancji  $R$  przy prądzie stałym i pojawia się różna od zera część urojona. Wyznaczono wzory błędów częstotliwościowych rezystorów w formie uogólnionej, tj. w funkcji względnych wielkości rezystancji i częstotliwości. Wyniki obliczeń tych błędów przedstawiono w postaci wykresów. Rozważania zilustrowano przykładami liczbowymi i sformułowano wnioski. Część 2 pracy poświęcona będzie omówieniu możliwości korekcji charakterystyki częstotliwościowej rezystorów.

**Abstract.** In the part 1 four models of resistors for the AC current are considered. As the most useful model the equivalent circuit with two parallel branches  $R$ ,  $L$  and  $C$  is chosen. The characteristic parameters of its impedance in relative terms are introduced and its properties as a function of relative frequency are analyzed. The formulas of relative frequency errors, i.e. changes of resistance and reactance components of the impedance of few AC equivalent circuits of resistor have been determined in relative parameters and analyzed. The considerations are illustrated by the numerical example and conclusions were drawn. Corrections of the resistor frequency characteristic will be discussed in the Part 2 of this work. (**Analysis of frequency errors of resistors. Part 1 AC models of resistor and its parameters**)

**Słowa kluczowe:** rezystor, modele przemiennie-prądowe, schematy zastępcze, impedancja, parametry charakterystyczne, błędy częstotliwościowe

**Keywords:** resistor, AC models, equivalent circuits, impedance, characteristic parameters, frequency errors.

### 1. Wprowadzenie

Do modelowania zjawisk w urządzeniach elektrycznych i ich elementach, w tym w układach elektrycznych przyrządów pomiarowych, wykorzystuje się teorię obwodów elektrycznych [1]. Obejmuje ona syntezę i analizę modeli, czyli schematów zastępczych, złożonych z abstrakcyjnych elementów idealnych. Realne liniowe pasywne elementy elektryczne, czyli elementy podlegające zasadzie superpozycji dla prądów i napięć, modeluje się schematami zastępczymi, złożonymi z idealnych elementów  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Liczba i wartości parametrów  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , i struktura takiego modelu zależy od określonych warunków pracy elementu modelowanego, w tym od zakresu częstotliwości.

Przy wyższych częstotliwościach bardziej ścisły opis matematyczny zjawisk elektrycznych w realnych elementach o skończonych rozmiarach geometrycznych wymaga stosowania modeli o parametrach rozłożonych (linie długie), a nawet trójwymiarowego opisu pól elektromagnetycznych. Jednak dla elementów o rozmiarach geometrycznych wielokrotnie mniejszych od długości fali elektromagnetycznej, zadawalającą jest teoria obwodów o elementach skupionych. Na przykład dla częstotliwości sieciowej 50 Hz długość elektromagnetycznej fali w próżni (a także i w powietrzu) jest nieco mniejsza od 6000 km. Bez istotnych zastrzeżeń można więc stosować tu teorię obwodów o elementach skupionych dla rozmiarów układów rzędu kilometrów, a nawet dziesiątek kilometrów [2]. Natomiast przy częstotliwości 1 GHz długość fali jest rzędu 300 mm i teoria obwodów daje zadawalające wyniki dla milimetrycznych i mniejszych rozmiarów elementów.

W niektórych elektrycznych i elektronicznych układach pomiarowych stosuje się rezystory, których model w określonym paśmie częstotliwości powinien być tylko pojedynczą rezystancją  $R$ . Przykładem są tu dzielniki i tzw. bezindukcyjne boczniki stosowane w badaniach przebiegów impulsowych oraz standardowe platynowe rezystancyjne czujniki temperatury (o angielskim akronimie SPRT), których rezystancyjną składową impedancji mierzy się precyzyjnymi mostkami prądu przemiennego [3], [4].

Wskutek występowania parametrów resztkowych  $L$  i  $C$  właściwości rezystora przy prądzie przemiennym (AC) opisuje impedancja o składowych zależnych od

częstotliwości. Modelowanie to jest opisane w literaturze [5] - [7]. W wąskim zakresie częstotliwości rezystor modeluje się zwykle impedancją o dwu elementach RL lub RC. W szerokim zakresie częstotliwości zmieniają się parametry tych modeli, a nawet ich indukcyjny lub pojemnościowy charakter. Należy więc stosować bardziej rozbudowane, co najmniej trójelementowe, modele impedancji lub admitancji rezystorów o stałych parametrach RLC. Analizę właściwości częstotliwościowych kilku różnych modeli rezystora zawiera część 1 pracy.

Parametrem podstawowym idealnego liniowego modelu rezystora jako dwójnika jest rezystancja  $R$ . W dowolnej chwili czasu spełnia ona prawo Ohma:

$$(1) \quad u = R \cdot i$$

gdzie:  $u$  oraz  $i$  – napięcie na końcówkach rezystora i jego prąd w danej chwili oraz  $R$  – rezystancja o stałej wartości.

Przy sinusoidalnych przebiegach napięcia  $\underline{U}$  i prądu  $\underline{I}$  o częstotliwości  $f$  (pulsacji  $\omega = 2\pi \cdot f$ ), dwu-końcówkowy dowolny pasywny element liniowy, w tym realny rezystor, w tzw. symbolicznej metodzie opisu obwodów modeluje się dwójnikiem o równaniu w wielkościach zespolonych:

$$(2) \quad \underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I},$$

gdzie  $\underline{Z} = \text{Re } \underline{Z} + j \cdot \text{Im } \underline{Z}$  jest impedancją zespoloną o składowych: rzeczywistej  $\text{Re } \underline{Z}$  i urojonej  $\text{Im } \underline{Z}$ .

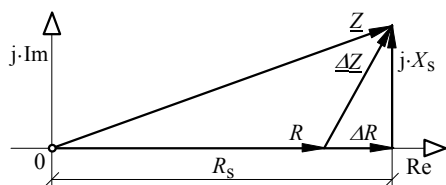
Rezystor byłby doskonały, gdy jego impedancja równałaby się wartości rezystancji  $R$  niezależnie od częstotliwości, tj.:

$$(3) \quad \underline{Z} = \text{Re } \underline{Z} = R.$$

Gdy rezystor nie jest doskonały, to  $\underline{Z} \neq R$ .

Błędy częstotliwościowe rezystora objaśnia wykres na płaszczyźnie zespolonej Gaussa podany na rysunku 1. Przedstawia on jego rezystancję  $R$  przy prądzie stałym (DC) i impedancję  $\underline{Z}$  przy prądzie przemiennym (AC) oraz ich różnicę  $\underline{\Delta Z}$  jako bezwzględny błąd zespolony rezystora:

$$(4) \quad \underline{\Delta Z} = \underline{Z} - R.$$



Rys. 1. Wykres impedancji rezystora i jej składowych przy prądzie przemiennym (AC):  $R$  – rezystancja przy prądzie stałym (DC),  $\underline{Z}$  – impedancja,  $R_s$  i  $X_s$  – jej składowe rezystancyjna i reaktancyjna (błąd reaktancyjny),  $\underline{\Delta Z}$  – błąd zespolony,  $\Delta R$  – błąd rezystancyjny.

W ogólnym przypadku błąd  $\underline{\Delta Z}$  jest funkcją częstotliwości, a kierunek jego grota informuje o znakach składowych.

Jako dogodny w użyciu miary do opisu niedoskonałości rezystora przy prądzie przemiennym proponuje się:

– względny błąd rezystancyjny:

$$(5) \quad \delta R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta R}{R} = \frac{\text{Re} \underline{Z} - R}{R}$$

– względny błąd reaktancyjny:

$$(6) \quad \delta X \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X_s}{R} = \frac{\text{Im} \underline{Z}}{R}$$

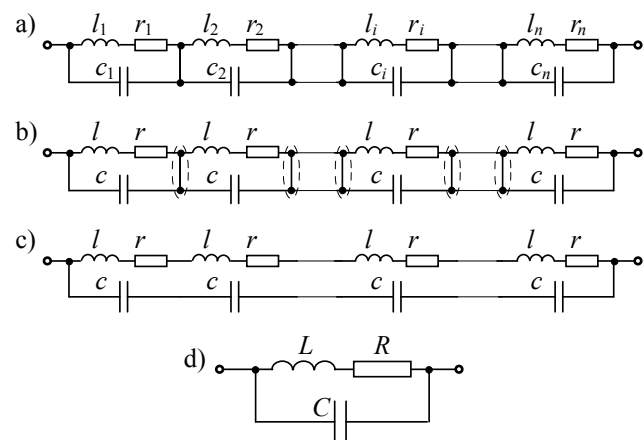
– względny błąd impedancyjny, czyli względny moduł błędu zespolonego  $\underline{\Delta Z}$ :

$$(7) \quad \delta Z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\underline{\Delta Z}|}{R} = \frac{\Delta Z}{R} = \sqrt{\delta R^2 + \delta X^2}$$

Wartości tych błędów są liczbami rzeczywistymi. Wyznacza się je z pomiarów lub za pomocą analizy schematów zastępczych modelujących rezystor.

## 2. Podstawowy model rezystora

Realny rezystor jest fizycznym obiektem trójwymiarowym i o wielu różnych konstrukcjach. Na przykład, jeśli w przypadku szczególnie, wymiary poprzeczne rezystora są niewielkie w porównaniu z długością, to w uproszczeniu można traktować go jako obiekt jednowymiarowy. Jeżeli rezystor taki podzielić w myśli na  $n$  odcinków, to w pewnym zakresie częstotliwości każdemu  $i$ -temu odcinkowi ( $i=1 \dots n$ ) można przypisać elementarną rezystancję  $r_i$ , indukcyjność  $l_i$  i pojemność  $c_i$ , połączone jak na rysunku 2a.



Rys. 2. Model rezystora o małych rozmiarach poprzecznych (a) i jego kolejne uproszczenia (b) i (c) do modelu 3-elementowego (d)

Jeżeli parametry  $l_i$ ,  $r_i$ ,  $c_i$  ogniw łańcucha są dla wszystkich  $i$  jednakowe (rezystor jest jednorodny), czyli gdy:

$$(8) \quad l_i = l; \quad r_i = r; \quad c_i = c \quad \text{dla } i = 1 \dots n,$$

to napięcie przyłożone do końcówek modelu z rysunku 2b rozkłada się równomiernie na poszczególne ogniwa i połączenia poprzeczne, zaznaczone na rysunku 2b kropkowanymi obwódkami, są zbędne – można je usunąć. Wobec tego model z rysunku 2b sprowadza się do modelu z rysunku 2c, a ten z kolei – do modelu o parametrach skupionych  $R$ ,  $L$ ,  $C$  przedstawionego na rysunku 2d:

$$(9) \quad R = n \cdot r; \quad L = n \cdot l; \quad C = c/n$$

Model rezystora z rysunku 2d zwykle dobrze sprawdza się dla rezystorów w dość szerokim zakresie częstotliwości. Nie uwzględnia on sprzężeń indukcyjnych z otoczeniem oraz upływności, ale pojemność  $C$  może obejmować też sprzężenia pojemnościowe do ekranu. Taką samą strukturę ma również model cewki bez rdzenia ferromagnetycznego – tzw. cewki powietrznej. Dla rezystora głównym parametrem modelu jest  $R$ , a  $L$  i  $C$  są parametrami resztkowymi. Dla cewki parametrem głównym jest  $L$ . O tym, czy jest to model rezystora, czy cewki decydują proporcje pomiędzy wartościami parametrów  $R$ ,  $L$ ,  $C$  i przedział częstotliwości.

Dalej, szczegółowo analizuje się model rezystora, z rysunku 2d, nazwany modelem  $\Gamma$  (gamma). Impedancję  $\underline{Z}$  rezystora według tego modelu określa wzór:

$$(10) \quad \underline{Z} = \frac{R + j \cdot \omega \cdot L}{(1 - \omega^2 \cdot L \cdot C) + j \cdot \omega \cdot R \cdot C} \equiv R_s + j X_s$$

Składowe szeregowe impedancji  $\underline{Z}$ , rezystancyjna  $R_s$  i reaktancyjna  $X_s$ , tego modelu opisane są wzorami

$$(11) \quad R_s = \text{Re} \underline{Z} = \frac{R}{(1 - \omega^2 \cdot L \cdot C)^2 + (\omega \cdot R \cdot C)^2}$$

$$X_s = \text{Im} \underline{Z} = \omega \cdot \frac{L \cdot (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C) - R^2 \cdot C}{(1 - \omega^2 \cdot L \cdot C)^2 + (\omega \cdot R \cdot C)^2}$$

Dla małych częstotliwości, tj. gdy  $\omega^2 LC \ll 1$  i  $(\omega RC)^2 \ll 1$  wzory te upraszczają się następująco [6]:

$$(11a) \quad R_s \approx R [1 + \omega^2 C \cdot (2L - R^2 C)]$$

$$X_s \approx \omega(L - R^2 C)$$

Wzory (11) i (11a) nie uwzględniają wpływu zjawiska naskórkowości na rezystancję. Jest to uzasadnione dla rezystorów cienkowarstwowych oraz wykonanych z materiałów o dużej rezystywności, tzw. rezystorów masowych oraz przy małych częstotliwościach.

Aby rezystor był *dobry* przy prądzie przemiennym, to jego część rzeczywista  $R_s = \text{Re}(\underline{Z})$  powinna odpowiednio mało różnić się od rezystancji  $R$ , a część urojona  $X_s = \text{Im}(\underline{Z})$  być znacznie mniejsza od  $R$ .

Wzory (11) dla modelu  $\Gamma$  stają się bardziej ogólne jeśli wprowadzi się następujące parametry uniwersalne:

- indukcyjnościową stałą czasową  $\tau_L$  i
- pojemnościową stałą czasową  $\tau_C$ :

$$(12) \quad \tau_L = \frac{L}{R}; \quad \tau_C = R \cdot C$$

oraz pulsację własną  $\omega_0$  i częstotliwość własną  $f_0$ :

$$(13) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_L \cdot \tau_C}}; \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi}$$

Stała czasowa  $\tau$  rezystora wynosi w przybliżeniu [6]

$$\tau = \frac{L_s}{R_s} \approx (L/R) - RC = \tau_L - \tau_C$$

Stała czasowa  $\tau$  może więc mieć wartość dodatnią lub ujemną, zależnie czy przeważa składowa  $\tau_L$  lub  $\tau_C$ .

Częstotliwość  $f_0$  jest częstotliwością rezonansową obwodu z rysunku 2d dla  $R=0$ . Po podstawieniu wyrażzeń (12) i (13) do wzorów (11) otrzymuje się:

$$(14) \quad R_s = \frac{R}{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (\omega \cdot \tau_C)^2}$$

$$X_s = \omega \cdot R \cdot \frac{\tau_L \cdot (1 - \omega^2/\omega_0^2) - \tau_C}{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (\omega \cdot \tau_C)^2}$$

Gdy  $\omega^2/\omega_0^2 \ll 1$  i wyraz ten można pominąć. Wówczas wzory (14) upraszczają się do postaci:

$$(15) \quad R_s \approx \frac{R}{1 + (\omega \cdot \tau_C)^2}; \quad X_s \approx \omega \cdot R \cdot \frac{\tau_L - \tau_C}{1 + (\omega \cdot \tau_C)^2}$$

Z zależności (14) i (15) wynika, że dla  $f \ll f_0$  reaktancja  $X_s$  rezystora jest równa zero, gdy  $\tau_L = \tau_C$ . Wtedy staje się on tzw. rezystorem czysto rezystancyjnym. Warunek  $\tau_L = \tau_C$  wiąże ze sobą parametry  $R L C$  modelu rezystora następująco:

$$(16) \quad \frac{L}{R} = R \cdot C \quad \text{czyli} \quad R = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Rezystory w postaci walca z materiału o wysokiej rezystywności (tzw. rezystory masowe) oraz rezystory w postaci cienkiej warstwy przewodzącej naniesionej na podłożu izolacyjnym, stosowane w układach scalonych, mają parametry resztkowe  $L$  i  $C$  zależne tylko od wymiarów geometrycznych oraz od dielektrycznych i magnetycznych właściwości zastosowanych materiałów. Parametry te nie zależą od rezystancji  $R$ . Na przykład rezystory wykonywane specjalną technologią foliową firmy Vishay mają  $C \approx 0,5$  pF i  $L \approx 0,08$   $\mu$ H [7]. Niezależności parametrów  $L$  i  $C$  od wartości rezystancji  $R$  nie spełniają rezystory nawijane i cienkowarstwowe ze ścieżką rezystancyjną w kształcie linii śrubowej lub meandra. Analiza ich impedancji wykracza poza ramy tej pracy. Częściowo rozpatrzono je w monografiach [6] i [7].

Wymaganie (16) spełnia tzw. rezystor naturalnie (samoistnie) skompensowany o charakterystycznej dla danej konstrukcji rezystancji  $R_0$

$$(17) \quad R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Zwykle rezystancja  $R$  rezystora różni się od jego rezystancji charakterystycznej  $R_0$ .

Dla dalszego uogólnienia opisu częstotliwościowych właściwości rezystancji wprowadzimy rezystancję względną

$$(18) \quad \rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R}{R_0}$$

oraz częstotliwość względną

$$(19) \quad \eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$$

Po uwzględnieniu  $\rho$  i  $\eta$  wzory (14) dla modelu z rys 2d przyjmują postacie:

$$(20) \quad R_s = R \cdot \frac{1}{(1 - \eta^2)^2 + \eta^2 \cdot \rho^2}; \quad X_s = R \cdot \frac{\eta \cdot \left( \frac{1 - \eta^2}{\rho} - \rho \right)}{(1 - \eta^2)^2 + \eta^2 \cdot \rho^2}$$

Składowe, rzeczywista  $R_s$  i urojona  $X_s$ , impedancji  $Z$  rezystora są więc wprost proporcjonalne do rezystancji  $R$  oraz są funkcjami wielkości względnych  $\rho$  i  $\eta$ . Odnosząc składowe  $R_s$  i  $X_s$  do rezystancji  $R$  otrzymuje się

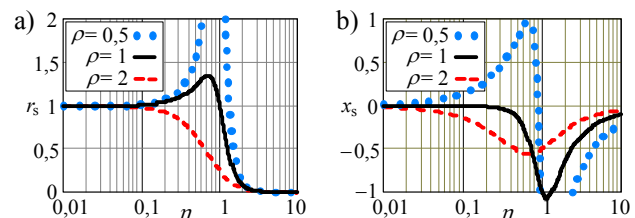
$$(21) \quad r_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_s}{R} = \frac{1}{(1 - \eta^2)^2 + \eta^2 \cdot \rho^2}; \quad x_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X_s}{R} = \frac{\eta \cdot \left( \frac{1 - \eta^2}{\rho} - \rho \right)}{(1 - \eta^2)^2 + \eta^2 \cdot \rho^2}$$

i odpowiednik przybliżenia (11a) dla  $\eta^2 \ll 1$  i  $\eta^2 \rho^2 \ll 1$ :

$$(21a) \quad r_s \approx 1 + \eta^2(2 - \rho^2); \quad x_s \approx \eta \cdot \left( \frac{1}{\rho} - \rho \right)$$

Rezystancja względna  $r_s$  informuje, ile razy rezystancja  $R_s$  jest większa od rezystancji  $R$ , a reaktancja względna  $x_s$  – ile razy reaktancja  $X_s$  jest większa od rezystancji  $R$ .

Na rysunkach 3a i 3b podano wykresy względnych składowych  $r_s$  i  $x_s$  impedancji  $Z$  w funkcji częstotliwości  $\eta$  w skali logarytmicznej dla trzech rezystancji względnych  $\rho$ .



Rys. 3. Charakterystyki częstotliwościowe modelu  $\Gamma$ : a) – względna rezystancja  $r_s$ , b) – względna reaktancja  $x_s$  w funkcji częstotliwości względnej  $\eta$  dla trzech wartości rezystancji względnej  $\rho = R/R_0$

Zmiany  $r_s$ ,  $x_s$  można opisać wspólnie charakterystyką Nyquista, czyli krzywą łączącą punkty o współrzędnych  $r_s(\eta)$ ,  $x_s(\eta)$  w układzie prostokątnym o skalach liniowych. Jednakże zastosowania pomiarowe dotyczą zwykle zakresu częstotliwości, w którym zmiany błędów względnego  $\delta Z$  nie przekraczają pojedynczych procentów, a kąt fazowy – setnych części radiana. Wówczas charakterystyka Nyquista nie jest przydatna do analizy, gdyż punkty na niej trzeba by bardzo gęsto opisywać wartościami parametru  $\eta$ .

Małych zmian modułu  $Z$  rezystora i kąta nie widać też na charakterystykach  $\alpha$  i  $\beta$  Bodego. Należy więc utworzyć wykresy dla częstotliwościowych błędów rezystora.

Rezystor jest *dobry*, czyli prawie czysto rezystancyjny, gdy w pewnym przedziale częstotliwości spełnione są z dopuszczalnymi w praktyce błędami dwa warunki:

$$(22) \quad R_s \approx R, \quad X_s \approx 0 \quad \text{czyli} \quad r_s \approx 1, \quad x_s \approx 0$$

Z wykresów na rysunku 3 wynika, że dla rezystora skompensowanego ( $\rho = 1$ ) warunki (22) są spełnione w przybliżeniu dla  $\eta < 0,1$  (częstotliwość  $f$  10-krotnie mniejsza od częstotliwości własnej  $f_0$ ). Dla rezystora o rezystancji mniejszej dwukrotnie ( $\rho = 0,5$ , tj.  $R = 0,5 \cdot R_0$ ) oraz większej dwukrotnie ( $\rho = 2$ , czyli dla  $R = 2 \cdot R_0$ ) wymaganie to jest ostrzejsze, np.  $\eta < 0,01$  (tj. częstotliwość  $f$  co najmniej 100-krotnie mniejsza od częstotliwości własnej  $f_0$ ).

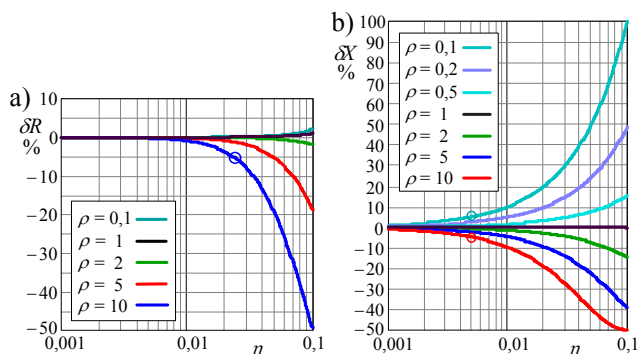
Poniżej omówimy właściwości modelu  $\Gamma$  rezystora dla małych częstotliwości względnych, tj. dla  $\eta < 0,1$ .

### 3. Ocena błędów częstotliwościowych rezystora

W rozdziale 1 zdefiniowano trzy względne błędy częstotliwościowe rezystora przy prądzie przemiennym - wzory (5), (6) i (7). Dla modelu  $\Gamma$  błędy te można wyznaczyć z wykorzystaniem wzorów (21) jako:

$$(23) \quad \delta R = r_s - 1, \quad \delta X = x_s, \quad \delta Z = \sqrt{\delta R^2 + \delta X^2}.$$

Na rysunku 4 pokazano przebiegi względnych błędów częstotliwościowych: rezystancyjnego  $\delta R$  i reaktancyjnego  $\delta X$ , w funkcji częstotliwości względnej  $\eta$  dla kilku wartości względnej rezystancji  $\rho$ .

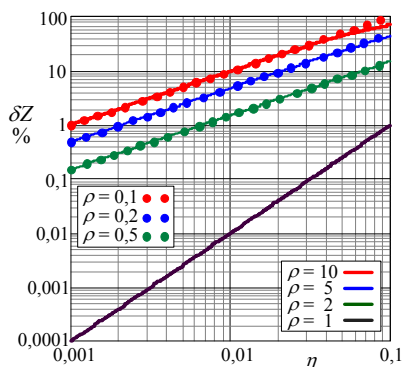


Rys. 4. Błędy częstotliwościowe rezystora wg modelu  $\Gamma$  w funkcji częstotliwości względnej  $\eta$  dla kilku wartości rezystancji względnej  $\rho$ . a) – błąd rezystancyjny  $\delta R$ , b) – błąd reaktancyjny  $\delta X$

Dla przedziału  $\eta = 0,001 \dots 0,01$  i  $\rho = 0,1 \dots 1$  błąd  $\delta R$  (rys. 4a) jest bliski zeru, a przy  $\eta = 0,1$  osiąga ok. +2 % dla  $\rho = 0,1$ ; ok. +1 % dla  $\rho = 1$  i ok. -2 % dla  $\rho = 2$ .

Wykresy z rysunku 4a pozwalają ocenić górną częstotliwość, przy której błąd rezystancyjny  $\delta R$  nie przekracza wartości dopuszczalnej dla danego  $\rho$ . Na przykład dla  $\rho = 10$ , tj. dla rezystora o rezystancji  $R$  większej 10-krotnie od wartości charakterystycznej  $R_0$  i dla dopuszczalnej wartości składowej rezystancyjnej 5 %, górna częstotliwość względna wynosi ok. 0,023 (punkt z niebieską obwódką).

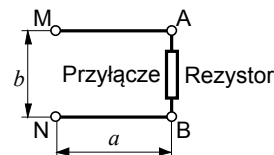
Dogodną miarą błędów częstotliwościowych rezystora, traktującą łącznie względne błędy: rezystancyjny  $\delta R$  i reaktancyjny  $\delta X$ , jest względny błąd impedancyjny  $\delta Z$ , wyrażony wzorem (7). Jest to miara o wartości nieujemnej i można ją przedstawiać we współrzędnych logarytmicznych obejmujących wartości dla wielu rzędów wielkości. Wyniki obliczeń błędów impedancyjnego  $\delta Z$  dla kilku wartości rezystancji względnej  $\rho$  podano na rysunku 5.



Rys. 5. Zależność błędów impedancyjnych  $\delta Z$  rezystora od względnej częstotliwości  $\eta$  dla kilku wartości rezystancji względnej  $\rho$ .

### 4. Ocena wartości wielkości resztkowych L i C

Istotny wpływ na właściwości częstotliwościowe rezystora ma geometria jego połączenia z innymi elementami układu elektrycznego. Założymy, że przyłącze stanowią ułożone równoległe dwa przewody o pomijalnie małej rezystancji i o średnicy  $d$  (rys. 6). Układ elektryczny widzi z końcówek przyłącza MN rezystor  $R$  o końcówkach AB. Indukcyjność przyłącza można ocenić z niedomiarem tak, jak dla linii symetrycznej o długości  $a$  i odstępzie  $b$  pomiędzy osiami przewodów o średnicy  $d$ . Jest to tzw. indukcyjność zewnętrzna rezystora.



Rys. 6. Rezystor z przyłączem:  $a$  – długość przyłącza,  $b$  – odstęp między przewodami

Według Kurdziela [2] indukcyjność zewnętrzną  $L_{Krd}$  dla  $b \gg d$  opisuje wzór:

$$(24) \quad L_{Krd} = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot a \cdot \ln \frac{2 \cdot b}{d}.$$

Wzór ten wyznaczono przy założeniu, że przyłącze rezystora znajduje się w środowisku o przenikalności magnetycznej próżni. Nie uwzględnia on uwzględnia występowania pola magnetycznego wewnątrz przewodów i ukształtowania pola magnetycznego na ich końcach. Wzór ten jest tym dokładniejszy, im przyłącze jest dłuższe (im większy jest stosunek  $a/b$ ). Gdy warunek  $a/b \gg 1$  nie jest spełniony wartość indukcyjności  $L_{Krd}$  otrzymuje się z niedomiarem.

W Wikipedii (nie udało się znaleźć innego bardziej wiarygodnego źródła) podano tzw. „wzór praktyczny”. Pozwala on oszacować w przybliżeniu indukcyjność zwoju o kształcie kwadratowym. Dla  $b = a$  wzór ten ma postać:

$$(25a) \quad L_{wkp} [\mu H] = 0,0184 \cdot a [cm] \cdot \log \frac{0,92 \cdot a}{d}$$

Wartość indukcyjności otrzymuje się w mikrohenrach, gdy wymiary geometryczne wstawi się w centymetrach. Wzór ten po zrationalizowaniu, t.j. po sprowadzeniu do jednostek układu SI, ma postać:

$$(25b) \quad L_{wkp} = 2,0 \cdot \frac{\mu_0}{\pi} \cdot a \cdot \ln \frac{0,92 \cdot a}{d}$$

Autorzy mają zastrzeżenia co do poprawności tego wzoru, gdyż dla  $b = a$  i gdy  $a/d \rightarrow \infty$ ,  $L_{wkp}/L_{Krd}$  dąży do ok. 2:

$$(26) \quad \lim_{\frac{a}{d} \rightarrow \infty} \left( \frac{L_{wkp}}{L_{Krd}} \right) \approx 2$$

czyli indukcyjność wyznaczona ze wzoru (25b) jest ok. dwukrotnie większa od indukcyjności ze wzoru (24).

Natomiast pojemność linii symetrycznej przyłącza oblicza się według Kurdziela [2] ze wzoru przybliżonego:

$$(27) \quad C_{Krd} = \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a \cdot \left( \ln \frac{2 \cdot b}{d} \right)^{-1}.$$

Wzór ten wyprowadzono przy założeniu, że symetryczna linia znajduje się w środowisku o przenikalności dielektrycznej próżni. Również i tu nie uwzględnia się ukształtowania pola elektrycznego przy końcach linii. Wzór (27) jest więc tym dokładniejszy, im

większy jest stosunek  $a/b$ . W wyniku zjawisk na końcach linii, pojemność jest większa. Oznaczmy ją symbolem  $C_{Wkp}$ .

Dla  $b=a$ , w oparciu o dualizm pól magnetycznego i elektrycznego, można założyć że:

$$(28) \quad \frac{C_{Wkp}}{C_{Krd}} \approx \frac{L_{Wkp}}{L_{Krd}}$$

Dla przyłącza o  $a = b = 10$  mm oraz  $d = 1,0$  mm otrzymuje się:  $L_{Krd} = 0,0112$   $\mu$ H,  $L_{Wkp} = 0,0178$   $\mu$ H,  $L_{Wkp}/L_{Krd} = 1,48$ ,  $C_{Krd} = 0,0929$  pF oraz  $C_{Wkp} = 0,138$  pF.

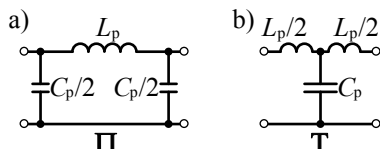
Jeżeli założyć, że indukcyjność i pojemność przyłącza decydują o parametrach  $L$  i  $C$  modelu  $\Gamma$  rezystora (rys. 2d) i przyjąć  $L=L_{Wkp} = 0,0178$   $\mu$ H oraz  $C = C_{Wkp} = 0,138$  pF, to ze wzoru (13) wynika częstotliwość własna  $f_0 = 3,22$  GHz, a ze wzoru (17) – rezystancja charakterystyczna  $R_0 = 359$   $\Omega$ .

Ze wzorów (24), (25) i (27) wynika, że  $m$ -krotna zmiana wymiarów geometrycznych przyłącza powoduje  $m$ -krotny wzrost wartości indukcyjności i pojemności, a zatem według wzoru (13) –  $m$ -krotne zmniejszenie częstotliwości własnej. Na przykład, przyłącze o wymiarach  $a = b = 100$  mm,  $d = 10$  mm ma częstotliwość własną  $f_0 = 322$  MHz, zaś przyłącze o wymiarach  $a = b = 1,0$  mm oraz  $d = 0,10$  mm, czyli 10-krotnie mniejszych, ma częstotliwość własną  $f_0 = 32,2$  GHz. Tłumaczy to, przynajmniej jakościowo, że dzięki miniaturyzacji w układach elektronicznych osiąga się wysokie częstotliwości pracy.

Ze wzoru (17) wynika, że rezystancja charakterystyczna  $R_0$  jest stała dla  $m$ -krotnej zmiany wymiarów przyłącza.

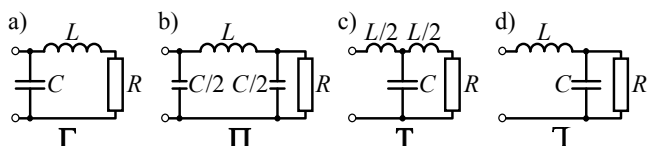
## 5. Inne modele rezystora

Dwuprzewodowe przyłącze rezystora (rys. 6) ma indukcyjność  $L_p$  oraz pojemność  $C_p$  i można je traktować jako bezstratną linię długą. Jeżeli częstotliwość jest na tyle mała, że długość fali elektromagnetycznej  $\lambda$  jest znacznie większa od długości  $a$ , to przyłącze można modelować czwórnikiem typu  $\Pi$  lub typu  $T$  [2] (rys. 7).



Rys. 7. Modele przyłącza: a) typu  $\Pi$ , b) typu  $T$

Połączenie modeli przyłącza  $\Pi$  lub  $T$  z modelem rezystora typu  $\Gamma$  (rys. 2d) o parametrach resztkowych  $L_r$ ,  $C_r$  prowadziłoby do modeli 5-elementowych ( $L_p$ ,  $C_p$ ,  $L_r$ ,  $C_r$ ,  $R$ ), trudnych do identyfikacji, ponieważ oddzielne wyznaczenie parametrów  $L_p$ ,  $L_r$ , oraz  $C_p$ ,  $C_r$  jest trudno wykonywalne. Na rysunku 8 podano cztery modele wraz z przyłączami.



Rys. 8. Trójparametrowe modele rezystora z elementami  $L$ ,  $C$  tworzącymi: a) czwórnik typu  $\Gamma$ , b) czwórnik typu  $\Pi$ ,

c) czwórnik typu  $T$ , d) czwórnik typu  $\bar{T}$  (odwrócone gamma).

Wykażemy, że modele te są równoważne w praktyce dla częstotliwości względnych  $\eta < 0,1$  i jednakowych parametrów:

$$(29) \quad L = L_p + L_r; \quad C = C_p + C_r$$

Charakterystyki częstotliwościowe rezystancji względnej  $r_s(\eta)$  i reaktancji względnej  $x_s(\eta)$  dla modeli z rysunku 8 różnią się między sobą. Znaczące różnice występują dopiero dla większych częstotliwości względnych  $\eta \rightarrow 1$ .

Względne: rezystancja  $r_s$  i reaktancja  $x_s$  dla modelu  $\Gamma$  określone są wzorami (21).

Dla modelu  $\bar{T}$  dość łatwo wyprowadza się wzory:

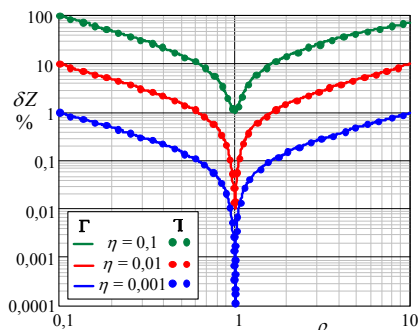
$$(30) \quad r_s = \frac{1}{1 + \eta^2 \cdot \rho^2}; \quad x_s = \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{1 - \rho^2 \cdot (1 - \eta^2)}{1 + \eta^2 \cdot \rho^2}$$

Natomiast dla modeli  $\Pi$  i  $T$  wyprowadzenie wzorów dla  $r_s$  i  $x_s$  jest dosyć uciążliwe. Dogodniej wyznaczyć względną impedancję zespoloną  $\underline{z} = \underline{Z}/R$  i z odpowiedniej aplikacji matematycznej, obliczyć numerycznie  $r_s = \text{Re } \underline{z}$  i  $x_s = \text{Im } \underline{z}$ . Względne impedancje  $\underline{z}$  tych modeli mają postacie:

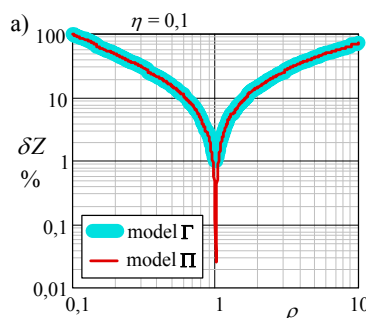
$$(31a) \quad \text{dla modelu } \Pi: \quad \underline{z} = \frac{2 \cdot \left( \frac{2}{2 + j \cdot \eta \cdot \rho} + j \cdot \frac{\eta}{\rho} \right)}{2 + j \cdot \eta \cdot \rho \cdot \left( \frac{2}{2 + j \cdot \eta \cdot \rho} + j \cdot \frac{\eta}{\rho} \right)}$$

$$(31b) \quad \text{dla modelu } T: \quad \underline{z} = \frac{1 + j \cdot \frac{\eta}{2 \cdot \rho}}{1 - \frac{\eta^2}{2} + j \cdot \eta \cdot \rho} + j \cdot \frac{\eta}{2 \cdot \rho}$$

W zakresie częstotliwości względnych  $\eta < 0,1$  i rezystancji względnych  $0,1 < \rho < 10$  modele  $\Gamma$  i  $\bar{T}$  charakteryzują się bardzo bliskimi sobie wartościami błędów impedancyjnego  $\delta Z$  rezystora określonymi ze wzorów (7), (23). Są one nieznacznie większe, niż dla modeli  $\Pi$  i  $T$  (patrz rysunki 9 i 10).



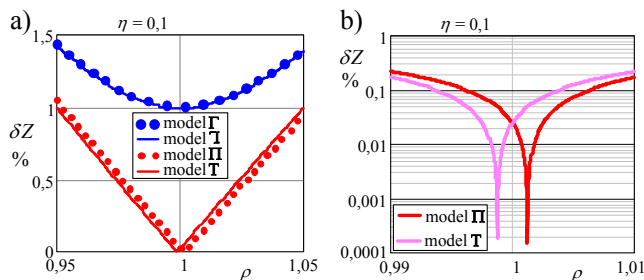
Rys. 9. Zależność błędów impedancyjnego  $\delta Z$  rezystora od  $\rho$  i  $\eta$  dla modeli  $\Gamma$  i  $\bar{T}$



Rys. 10. Zależność błędów impedancyjnego  $\delta Z$  rezystora od  $\rho$  dla  $\eta = 0,1$  dla modeli  $\Gamma$  i  $\Pi$

Subtelne różnice między modelami przy rezystancji względnej  $\rho$  bardzo bliskiej 1 uwidacznia rysunek 11.

Różnice te nie mają jednak istotnego znaczenia w praktyce – jest to raczej teoretyczna ciekawostka, gdyż dokładne utrzymanie wartości  $\rho$  (nawet w zakresie  $\pm 1\%$ ) jest bardzo trudne, ponieważ wartość  $R_0$  zależy od zmian  $L$  i  $C$ .



Rys. 11. Szczegóły zależności błędu impedancyjnego  $\delta Z$  rezystora od względnej rezystancji  $\rho$  wokół  $\rho=1$  dla modeli z rysunku 8: a)  $\rho=0,95 \dots 1,05$ , b)  $\rho=0,99 \dots 1,01$

Do obliczeń częstotliwościowego błędu impedancyjnego  $\delta Z$  rezystora najbardziej dogodny wydaje się model  $\Gamma$ , dla którego odpowiedni wzór ma dosyć prostą postać:

$$(32) \quad \delta Z = \eta \cdot \frac{\sqrt{\eta^2 \cdot \rho^4 + \left[ \frac{1}{\rho} - \rho \cdot (1 - \eta^2) \right]^2}}{1 + \eta^2 \cdot \rho^2}$$

## 6. Podsumowanie części 1

W przedstawionej analizie modeli rezystora typów  $\Gamma$ ,  $\Pi$ ,  $T$  oraz  $\Gamma$  (rys. 8), o parametrze głównym  $R$  i parametrach pasywnych  $L$  i  $C$  uzyskano uogólnienie rozważań w stosunku do wzorów podanych w literaturze [5]–[7] przez wprowadzenie zmiennych uniwersalnych:

- częstotliwości własnej  $\omega_0$  – wzór (13),
- rezystancji charakterystycznej  $R_0$  – wzór (17),
- rezystancji względnej  $\rho$  – wzór (18),
- częstotliwości względnej  $\eta$  – wzór (19),
- względnych: rezystancji  $r_s$  i reaktancji  $x_s$ ,
- impedancyjnego błędu częstotliwościowego rezystora  $\delta Z$  – wzór (7) o składowych: rezystancyjnej  $\delta R$  – wzór (5) i reaktancyjnej  $\delta X$  – wzór (6), opisanych wzorami (23).

Wyznaczono wartości błędów  $\delta R$ ,  $\delta X$  i  $\delta Z$  w funkcji częstotliwości względnej  $\eta$  i rezystancji względnej  $\rho$ . Jeżeli rezystancja względna  $\rho$  jest bliska 1 i częstotliwość względna  $\eta$  jest wielokrotnie (np. 10-krotnie) mniejsza od 1, to rezystor jest bliski idealnemu, tzn. czysto rezystancyjny. W szerokim paśmie częstotliwości jednak nie można w praktyce utrzymać z dużą dokładnością wartości  $\rho=1$ .

Z analizy wynika teza ogólna, że dla częstotliwości względnej  $\eta < 0,1$  sposób dołączenia parametrów resztkowych  $L$  i  $C$  rezystora w schematach modeli z rysunku 8 nie ma istotnego znaczenia, gdyż wyniki analizy tych modeli nie wykazują istotnych różnic. Ponadto z obliczeniowego przykładu w rozdziale 4 wynikają następujące wnioski:

- dla hipotetycznego rezystora o stosunkowo niewielkich rozmiarach – patrz dane w tekście po wzorze (28) – rezystancja charakterystyczna ma wartość ok.  $360 \Omega$  i częstotliwość własna – ok. 3,2 GHz. Z rysunku 5 (linia czarna,  $\rho=1$ ) wynika, że błąd impedancyjny  $\delta Z$  tego rezystora przy częstotliwości względnej  $\eta=0,001$ , czyli dla 3,2 MHz, wyniósł by ok.  $10^{-4}\%$ , przy 32 MHz ( $\eta=0,01$ ) – ok. 0,01 %, przy 320 MHz ( $\eta=0,1$ ) – ok. 1 %. Tak małe wartości błędu  $\delta Z$  wymagałyby dokładnego spełnienia warunku  $\rho=1$ , co w praktyce nie zawsze jest możliwe.

- Gdyby ten sam rezystor miał rezystancję 3,6 k $\Omega$ , czyli rezystancję względną  $\rho=10$ , to z wykresu na rysunku 5. (linia czerwona ciągła) wynika, że błąd impedancyjny  $\delta Z$  przy częstotliwości względnej  $\eta=0,001$ , czyli przy 3,2 MHz, osiągnąłby wartość ok. 1 % i ok. 10 % przy częstotliwości 32 MHz ( $\eta=0,01$ ) oraz ok. 70 % przy 320 MHz ( $\eta=0,1$ ).
- prawie takie same wartości osiągnąłby błąd impedancyjny  $\delta Z$  dla rezystora 36  $\Omega$  ( $\rho=0,1$ , linia czerwona kropkowana na rysunku 5) przy częstotliwościach 3,2 MHz ( $\eta=0,001$ ) i 32 MHz ( $\eta=0,01$ ), zaś przy częstotliwości 320 MHz ( $\eta=0,1$ ) – aż ok. 100 %.
- z rysunku 4b wynika, że rezystor 3,6 k $\Omega$  miałby charakter pojemnościowy (ujemna wartość błędu  $\delta X$ ), a rezystor 36  $\Omega$  – charakter indukcyjnościowy.

W przykładzie obliczeniowym, częstotliwości własnej ok. 3,2 GHz odpowiada długość fali w powietrzu ok. 9,4 cm, zaś długość hipotetycznego przyłącza rezystora wynosi 1 cm. Wnioski z obliczeń dotyczą częstotliwości mniejszej od 0,32 GHz, czyli długości fali w powietrzu ponad 94 cm. Przekracza ona ponad 90-krotnie maksymalny wymiar rezystora z tego przykładu. Uzasadnia to stosowanie teorii obwodów elektrycznych o elementach skupionych do tworzenia i analizy schematów zastępczych impedancji rezystora jako jego modeli.

Przykład zastosowania w spektrometrii impedancyjnej modelu  $\Gamma$ , rozbudowanego dla częstotliwościach wyższych o dodatkowe gałęzie równoległe  $R$   $C$ , był prezentowany na ostatnim Kongresie IMEKO w Pradze [8].

W części 2 artykułu będą omówione możliwości korekcji właściwości częstotliwościowych impedancji rezystora. Oцени się też wpływ niedokładności elementów resztkowych i korekcyjnych na skuteczność tej korekcji.

**Autorzy:** prof. dr hab. inż. **Stefan Kubisa** (emerytowany profesor Wydziału Elektrycznego Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego w Szczecinie), email: [dkubisa@hotmail.com](mailto:dkubisa@hotmail.com) Docent (emerytowany) dr inż. **Zygmunt L. Warsza**, Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Zespół Badań Podstawowych 02 486 Warszawa Al. Jerozolimskie 202, e-mail: [zlw@op.pl](mailto:zlw@op.pl)

## LITERATURA

- [1] Osowski J. Szabatin J., Podstawy teorii obwodów, Tom I-III, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne Warszawa (1992 – 1995).
- [2] Kurdziel R. Elektrotechnika PWN Warszawa, wydanie 2 (1973)
- [3] Mikhal A. A., Meleshchuk D. V., Warsza Z. L., Zastosowanie podwójnego ekranowania w termometrycznych mostkach AC *Pomiary Automatyka Kontrola* 60, (2014) nr 11, 938 – 941.
- [4] Mikhal A. A., Warsza Z. L., Electromagnetic Protection in High Precision Triaxial Thermometric AC Bridge. *Progress in Automation, Robotics and Measuring Techniques*. (editors.: R. Szewczyk i inni), vol. 352 of series "Advances in Intelligent Systems and Computing" Springer (2015), part 3, 147-156.
- [5] Schwerdtweger W., Technika pomiarów elektrycznych, Tom II, PWT, Warszawa (1954), 134 -144.
- [6] Dudziewicz J. (red.) i inni, Etalony i precyzyjne pomiary wielkości elektrycznych. WKiŁ, Warszawa (1982), Rozdz. 8.2 Wzorce rezystancji. 207 -227.
- [7] Korytkowski J., Układy przetworników cyfrowo- analogowych napięcia, prądu i rezystancji oraz metodach analizy. Monografie Studia Rozprawy. Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów Warszawa (2004), Rozdz. 5.3 Dokładne rezystory. 108 -119.
- [8] Baltianski S., Impedance Spectroscopy: Separation and Asymptotic Model Interpretation. *Proceedings of XXI IMEKO World Congress "Measurement in Research and Industry" 30 August - 4 Sept., (2015), Prague, Czech Republic, 493 - 497.*