

# Energetycznie optymalny rozkład napięć w złożonej liniowej sieci elektrycznej z impulsowymi lub okresowymi przebiegami sygnałów napięciowych i prądowych. Sterowanie optymalne

**Streszczenie:** W artykule pokazano że w obwodach sygnałów elektrycznych należących do tzw. przestrzeni  $L^1$ -impulsów, bądź przestrzeni sygnałów okresowych występujący tam rzeczywisty rozkład napięć nie spełnia zasady minimum strat energetycznych. Przedstawiono rozwiązanie tego zagadnienia poprzez wprowadzenie sterowania wektorem źródeł napięciowych prądowo zależnych, wprowadzonego do zbioru węzłów złożonej sieci typu RLC. Wykazano że sterowanie jest energetycznie obojętne.

**Abstract:** The article presents that in the circuits of electrical signals belonging to the  $L^1$ -impulses space or periodic signals space, occurring there real distribution of electrical voltage does not meet the principle of minimum energy losses. The paper presents a solution of this problem by using the control system in the form of current-dependent voltage sources, entering it into a nodes set of a complex RLC network. It has been shown that the control is energy-neutral. (**Energy optimal voltage distribution in complex linear electrical network with pulse or periodic voltage and current signals. Optimal control**)

**Słowa kluczowe:**  $L^1$ -impulsy, obwody liniowe, zasada minimum strat energii, operatory, sterowanie optymalne  
**Key words:** L1-impulses, linear circuits, principle of minimum energy losses, operators, optimal control

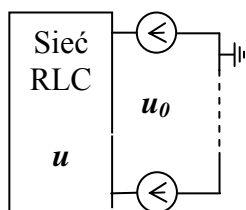
## Wstęp

Zagadnienia dotyczące jakości rozptyłu energii elektrycznej oraz minimalizacji strat energii zwykle dotyczą minimalizacji pewnych wskaźników energetycznych, jak np. moc bierna lub uzyskania optymalnego, ze względów energetycznych rozkładu napięć.

W obwodach prądu stałego obowiązuje zasada minimum energii, zgodnie z którą rozkład napięć w złożonej sieci jest taki, że całkowite straty energii są minimalne [1,2]. Jednak zasada ta na ogół nie działa już w obwodzie prądu sinusoidalnie zmiennego. [3]

Z drugiej strony w dziedzinie sygnałów niesinusoidalnych okresowych pojęcie mocy biernej traci sens, co oznacza że pojęciem tym nie należy się posługiwać podczas badania jakości rozptyłu energii elektrycznej w sieci [4,5]. Jednak problemy kompensacji zdążające do wyzerowania wskaźnika mocy biernej mogą być rozwiązywane jako zadania optymalizacyjne polegające na minimalizowaniu strat energii w sieci albo jako związane z nimi zadania minimalizowania skutecznego rozkładu napięć [6,7]. Publikacja ta wychodzi temu zagadnieniu naprzeciw.

W artykule wykazano że w obwodach z sygnałami należącymi do liniowej przestrzeni  $L^1$ -impulsów występujący tam rzeczywisty rozkład napięć nie spełnia zasady minimum strat energii. Aby tak było potrzebne jest sterowanie. Rozważono złożoną sieć z zasilaniem wielonapięciowym i wielowymiarowym sterowaniem napięciowo - prądowym. Wykazano że zastosowany układ źródeł sterowanych jest energetycznie obojętny. Zatem proces minimalno- energetycznego sterowania odbywa się bezenergetycznie.

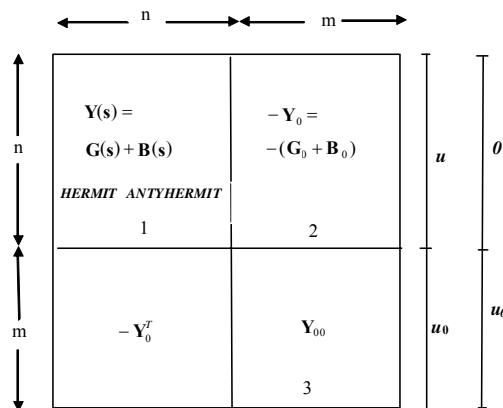


Rys.1. Złożona sieć z zasilaniem wielonapięciowym;  $u$  – wewnętrzny wektor napięć węzłowych;  $u_0$  zewnętrzny wektor napięciowy.

Na rysunku 1 przedstawiono sieć RLC z zadaniem zasilaniem w postaci wektora sygnałów napięciowych  $u_0$ . Rozkład napięć węzłowych wewnątrz sieci określa wektor sygnałów napięciowych  $u$ . Sieć scharakteryzowana jest tzw. macierzą operatorów wewnętrznych  $Y(s)$   $s=d/dt$ , oraz macierzą tzw. operatorów kontaktowych  $Y_0(s)$ . Równania operatora sieci przyjmują postać:

$$(1) \quad \begin{aligned} Y u - Y_0 u_0 &= 0 \\ - Y_0^T u + Y_{00} u_0 &= i_0 \end{aligned}$$

(0 – wektor, lub operator zerowy, T – znak transpozycji)



Rys. 2. Schemat układu równań (1); 1 - macierz operatorów wewnętrznych; 2 - macierz operatorów kontaktowych; 3 - macierz operatorów zewnętrznych; 0 - wektor (lub operator) zerowy

Wszystkie macierze admitancyjne mają rozkład na części: hermitowską  $G$  i antyhermitowską  $B$ :

$$(2) \quad Y(s) = G(s) + B(s)$$

tzn. takie, że

$$(3) \quad G(-s) = G(s); \quad B(-s) = -B(s)$$

Strukturę układu równań (1) ilustruje rysunek 2. Na rysunku tym podane są rozmiary macierzy i wektorów.

Sygnały  $i(t)$  – współrzędne wektorów prądowych należą do przestrzeni sygnałowej  $L^1$ , tzw. przestrzeni  $L^1$ -impulsów:

$$\mathbf{L}^1 = \{x(t): \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty\}$$

albo do generowanej przez nią przestrzeni sygnałów T-okresowych [8,9]:

$$\mathbf{P}_T = \{\tilde{x}(t): \tilde{x}(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(t+pT); x(t) \in \mathbf{L}^1\}$$

W przestrzeniach tych określony jest iloczyn skalarny w  $\mathbf{L}^1$ :

$$(u, i) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)i(t) dt$$

a w  $\mathbf{P}_T$

$$(u, i) = \int_0^T u(t)i(t) dt$$

Wszystkie operatory są typu splotowego, tzn. w reprezentacji czasowej mają postać

$$Yi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-t')u(t') dt' \quad \text{w } \mathbf{L}^1$$

albo

$$Yi(t) = \int_0^T y(t \ominus t')u(t) dt' \quad \text{w } \mathbf{P}_T$$

$\ominus$  - działanie odejmowania mod T.

W reprezentacji z użyciem transformat Fouriera:

$$YU(s) = Y(s)U(s)$$

Operator impedancji Z rozkłada się na dwie składowe G i B [10,11]:

$$Y = \frac{1}{2}(Y + Y^*) + \frac{1}{2}(Y - Y^*) = G + B$$

to znaczy operator

$$G = \frac{1}{2}(Y + Y^*)$$

który jest operatorem hermitowskim (samosprężonym), tj:

$G^* = G$ , oraz operator

$$B = \frac{1}{2}(Y - Y^*)$$

który jest antyhermitowski, tj.  $B^* = -B$ .

Operator  $Y^*$  jest operatorem sprzężonym względem Y, tj. takim, że dla dowolnych sygnałów x,y zachodzi  $(Yx, y) = (x, Y^*y)$ .

Operator G reprezentuje składową czynną operatora impedancji Y (tzw. operator stratności) a operator B jego składową bierną. Oznacza to spełnienie następujących warunków przez formy kwadratowe:

$$(Yi, i) = (Gi, i); \quad (Bi, i) = 0$$

dla dowolnego sygnału.

Można wykazać, że dla operatorów splotowych charakteryzujące je funkcje Y(t) oraz Y(s) spełniają warunki [12]:

$$Y^*(t) = Y(-t); \quad Y^*(s) = Y(-s)$$

## Zasada minimum strat energetycznych w sieci elektrycznej w przestrzeniach $\mathbf{L}^1$ i $\mathbf{P}_T$ . Sterowanie optymalne

Funkcjonał napięciowy

$$(4) \quad f(\mathbf{u}) = [\mathbf{u}^T, \mathbf{u}_0^T] \begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{G}_0 \\ -\mathbf{G}^T & \mathbf{G}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix}$$

ma wartość, która równa jest stratom energii w sieci elektrycznej. Wzór (4) tworzy macierzowo-operatorowy iloczyn skalarny, tzn. jeżeli

$$\mathbf{A} = [A_{pq}]; \quad \mathbf{X} = [x_q], \quad \mathbf{Y} = [y_q]$$

to forma dwuliniowa ma postać

$$(5) \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \sum_{p,q} (x_p, A_{pq} y_q) = \sum_{p,q} \int x_p(t) \left[ \int A_{pq}(t-t') y_q(t') dt' \right] dt = \sum_{p,q} \iint A_{pq}(t-t') x_p(t) y_q(t') dt dt'$$

Całki we wzorze (5) są brane w przedziale  $(-\infty, +\infty)$  albo w  $[0, T]$  zależnie od tego czy używana jest przestrzeń  $\mathbf{L}^1$  czy przestrzeń  $\mathbf{P}_T$ , a w zależności od tego operatory są splotami liniowymi lub cyklicznymi.

Zasada minimum wymaga, aby funkcjonal (4), którego wartość jest równa całkowitym stratom energii w sieci, osiągał minimum. Aby to minimum znaleźć potrzebna jest wariacja funkcjonału:

$$df(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u} + d\mathbf{u}) - f(\mathbf{u}) = [d\mathbf{u}^T, \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{G}_0 \\ -\mathbf{G}^T & \mathbf{G}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} + [\mathbf{u}^T, \mathbf{u}_0^T] \begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{G}_0 \\ -\mathbf{G}^T & \mathbf{G}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + [d\mathbf{u}^T, \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{G}_0 \\ -\mathbf{G}^T & \mathbf{G}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

gdzie:  $\mathbf{0}$  - wektor - sygnał zerowy,

$\mathbf{G}$  - części hermitowskie macierzy - operatorów  $\mathbf{Y}$ .

Po dalszych przekształceniach wariacja ta przyjmie postać następującą:

$$df(\mathbf{u}) = d\mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{u} - d\mathbf{u}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}^T \mathbf{G} d\mathbf{u} - \mathbf{u}_0^T \mathbf{G}_0^T d\mathbf{u} + d\mathbf{u}^T \mathbf{G} d\mathbf{u}$$

ale zachodzi:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{G} \mathbf{x}$$

bo

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{y} = (\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{y})^T = \mathbf{y}^T \mathbf{G}^T \mathbf{x}$$

$$\text{lecz } \mathbf{G}^T = \mathbf{G}.$$

Zatem:

$$(6) \quad df(\mathbf{u}) = 2d\mathbf{u}^T \mathbf{G}\mathbf{u} - 2d\mathbf{u}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{u}_0 + d\mathbf{u}^T \mathbf{G}d\mathbf{u} = \\ 2d\mathbf{u}^T (\mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{G}_0 \mathbf{u}_0) + d\mathbf{u}^T \mathbf{G}d\mathbf{u}$$

Ze względów energetycznych ostatni składnik wyrażenia(6) jest formą kwadratową dodatnio określoną (są to straty energii wewnątrz sieci). Zatem warunek minimum funkcjonatu energii(4), tj.:

$$\bigwedge_{d\mathbf{u}} df(\mathbf{u}) > 0$$

przyjmuje postać:

$$\mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{G}_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$$

albo postać układu równań operatorowych

$$(7) \quad \mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{G}_0 \mathbf{u}_0$$

Układ równań (7) trzeba zestawić z układem równań (1):

$$(8) \quad \mathbf{Y}\mathbf{u} = \mathbf{Y}_0 \mathbf{u}_0$$

którego rozwiązaniem jest rzeczywisty rozkład napięć węzłowych wewnątrz sieci. Układy równań (7) i (8) mają tę samą strukturę, ale układ (7) jest hermitowską odmianą (częścią) układu równań (8).

Rozwiązaniem układu równań (7) jest energetycznie optymalny rozkład napięć węzłowych minimalizujący straty energii wewnątrz sieci:

$$(9) \quad \mathbf{u}^{opt} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_0 \mathbf{u}_0$$

zwany *rozkładem optymalnym*. Natomiast rozwiązanie układu równań (8):

$$(10) \quad \mathbf{u} = \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{Y}_0 \mathbf{u}_0$$

daje rzeczywisty rozptyw prądów oczkowych w sieci zwany *rozkładem „dzielnika napięcia”*.

Dla prądów stałych w czasie rozkład optymalny pokrywa się z rozkładem dzielnika napięcia, ale tak też jest nie tylko w tym przypadku. Natomiast na ogół rozkłady te nie pokrywają się. Oznacza to, że rozkład optymalny osiąga się z użyciem napięciowo-prądowego, dowęzłowego sterowania:

$$\mathbf{i}^{st} = \mathbf{Y}\mathbf{u}^{opt} - \mathbf{Y}_0 \mathbf{u}_0 =$$

$$(11) \quad \mathbf{G}\mathbf{u}^{opt} - \mathbf{G}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}^{opt} - \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_0 = \\ (\mathbf{B}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_0 - \mathbf{B}_0) \mathbf{u}_0$$

Wzór (11) podaje więc jakie sygnałowe prądy źródłowe trzeba wpiąć w węzły wewnętrzne sieci aby wywołać energetycznie optymalny rozkład napięć. Wzór ten zostanie zapisany w postaci

$$(12) \quad \mathbf{i}^{st} = \mathbf{B}^{st} \mathbf{u}_0$$

gdzie:

$$(13) \quad \mathbf{B}^{st} = \mathbf{B}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_0 - \mathbf{B}_0$$

jest antyhermitowskim, macierzowym operatorem sterowania.

### Operator odchylenia

Optymalny rozkład napięcia (9) i rozkład dzielnika napięcia (10) na ogół nie pokrywają się. Dzieje się to za sprawą operatora

$$(14) \quad \Delta = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_0 - \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{Y}_0$$

nazywanego dalej *operatorem odchylenia*. Jest on związany z operatorem sterowania w następujący sposób:

$$\Delta = \mathbf{Y}^{-1} (\mathbf{Y}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_0 - \mathbf{Y}_0) = \mathbf{Y}^{-1} (\mathbf{B}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_0 - \mathbf{B}_0)$$

skąd (zob. wzór (13)):

$$(15) \quad \Delta = \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{B}^{st}$$

Ze wzorów (12), (13) i (15) wynika równoważność następujących warunków:

$$(16) \quad \begin{array}{ccc} \Delta = \mathbf{0} & & \mathbf{B}\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_0 = \mathbf{B}_0 \\ \Downarrow & \Leftrightarrow & \text{lub} \\ \mathbf{B}^{st} = \mathbf{0} & & \mathbf{G}\mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}_0 = \mathbf{G}_0 \end{array}$$

Wówczas rozkłady napięciowe: optymalny i dzielnika napięcia pokrywają się bez udziału sterowania. Taka sieć będzie nazwana *naturalnie energetycznie optymalną*. Jest nią oczywiście sieć prądu stałego, dla której operatory  $\mathbf{Y}$  i  $\mathbf{G}$  pokrywają się, ale także jest nimi nieskończenie wiele sieci spełniających warunki równoważności (16).

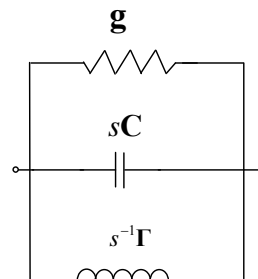
### Przykład 1

Dla sieci złożonej z gałęzi typu *RLC* (rys.3) operatory typu  $\mathbf{Y}$  mają postać:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{g} + s\mathbf{C} + s^{-1}\mathbf{\Gamma} = \mathbf{g} + \mathbf{B}(s)$$

$$\mathbf{Y}_0(s) = \mathbf{g}_0 + s\mathbf{C}_0 + s^{-1}\mathbf{\Gamma}_0 = \mathbf{g}_0 + \mathbf{B}_0(s)$$

gdzie:  $\mathbf{g}, \mathbf{g}_0$  - macierze konduktancji,  $\mathbf{C}, \mathbf{C}_0$  - macierze pojemności,  $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma}_0$  - macierze indukcyjności (odwrotności indukcyjności).



Rys.3. Budowa strukturalna gałęzi sieci *RLC*

Warunki (16) sieci naturalnie energetycznie optymalnych przyjmą wtedy postać:

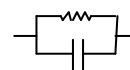
$$(s\mathbf{C} + s^{-1}\mathbf{\Gamma})\mathbf{g}^{-1}\mathbf{g}_0 = s\mathbf{C}_0 + s^{-1}\mathbf{\Gamma}_0 \quad \text{dla każdego } s$$

$$\text{skąd:} \quad \mathbf{g}^{-1}\mathbf{g}_0 = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0 = \mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{\Gamma}_0$$

### Przykład 2

Dla rozkładu sygnału potencjału  $01$  na dwie gałęzie szeregowe 1,2 (rys.4), wyznaczyć *napięciowo-prądowy optymalny operator sterowania*  $\mathbf{B}^{st} \mathbf{u}_{01}$ .

Otrzymuje się dla gałęzi 1, 2 o strukturze typu *RC*:



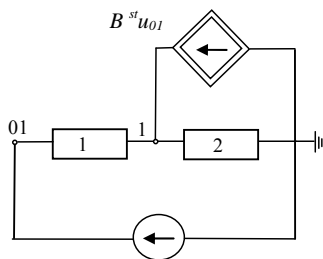
$$\mathbf{B}^{st}(s) = s(\mathbf{C}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{g}^0 - \mathbf{C}^0) = s\left(\frac{C_1 + C_2}{g_1 + g_2} g_1 - C_1\right) = s \frac{C_2 g_1 - C_1 g_2}{g_1 + g_2} = s \frac{r_2 C_2 - r_1 C_1}{r_1 + r_2}; \quad (rg = 1)$$

albo dla gałęzi 1,2 typu RL:



$$\mathbf{B}^{st}(s) = s^{-1}(\mathbf{\Gamma}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{g}^0 - \mathbf{\Gamma}^0) = s^{-1}\left(\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{g_1 + g_2} g_1 - \Gamma_1\right) = s^{-1} \frac{\Gamma_2 g_1 - \Gamma_1 g_2}{g_1 + g_2} = s^{-1} \frac{L_1 r_2 - L_2 r_1}{L_1 L_2 (r_1 + r_2)}; \quad (L\Gamma = 1, \quad rg = 1)$$

Są to odpowiednio operatory: różniczkujący (dla gałęzi typu RC) i całkujący (dla gałęzi typu RL).



$$\mathbf{Y}, \mathbf{G} \quad -(\mathbf{Y}_0, \mathbf{G}_0)$$

1+2	-1
-1	1

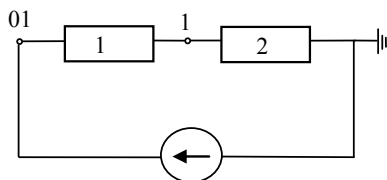
$$\begin{matrix} 1 \\ 01 \end{matrix} \begin{matrix} u \\ u_0 \end{matrix} = \begin{matrix} \\ x \end{matrix}$$

Rys.4. Energetycznie optymalny rozkład sygnału potencjału 01 na dwie gałęzie szeregowe 1,2; oraz struktura układu równań (8) i (7)

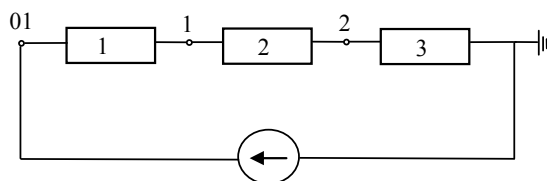
### Przykład 3

Wyprowadzić warunki (16) sieci naturalnie energetycznie optymalnych w przypadku rozkładu sygnału potencjału 01 na dwie szeregowe gałęzie (układ 1-2) i na trzy szeregowe gałęzie (układ 1-2-3). Odpowiednie obwody pokazano na rysunku 5.

1-2:



1-2-3:



Rys.5. Energetycznie optymalny rozkład potencjału 01 na dwie i trzy szeregowe gałęzie.

Struktury „Y, G” operatorowych układów równań (7), (8) mają następującą postać:

(1-2):

$\mathbf{Y}, \mathbf{G} \quad -(\mathbf{Y}_0, \mathbf{G}_0)$

$$\begin{matrix} 1+2 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 01 \end{matrix} \begin{matrix} u \\ u_0 \end{matrix} = \begin{matrix} \\ x \end{matrix}$$

(1-2-3):

$\mathbf{Y}, \mathbf{G} \quad -(\mathbf{Y}_0, \mathbf{G}_0)$

$$\begin{matrix} 1+2 & -2 & -1 \\ -2 & 2+3 & \\ -1 & & x \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 01 \end{matrix} \begin{matrix} u \\ \\ u_0 \end{matrix} = \begin{matrix} \\ \\ x \end{matrix}$$

Odpowiednie warunki (16) dla sieci (1-2) i (1-2-3) przyjmują postać równań macierzowych:

(1-2):

$$\mathbf{C} \quad \mathbf{g} \quad -1 \quad \mathbf{g}_0 \quad \mathbf{C}_0$$

1+2	1+2	1
-----	-----	---

$$= \begin{matrix} \mathbf{C}_0 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{\Gamma} \quad \mathbf{\Gamma}_0$$

(1-2-3):

$$\mathbf{C} \quad \mathbf{g} \quad -1 \quad \mathbf{g}_0 \quad \mathbf{C}_0$$

1+2	-2	1+2	-2	1
-2	2+3	-2	2+3	

$$= \begin{matrix} \mathbf{C}_0 \\ 1 \end{matrix}$$

↑  
gałęzie  
↓

typ RC  
  
  
typ RL

$$\mathbf{\Gamma} \quad \mathbf{\Gamma}_0$$

Z równania (1-2) otrzymuje się:

$$\frac{C_1 + C_2}{g_1 + g_2} g_1 = C_1 \Rightarrow \frac{C_1}{g_1} = \frac{C_2}{g_2} \Rightarrow r_1 C_1 = r_2 C_2$$

Natomiast warunek (1-2-3) przechodzi w:

$$\frac{1}{\delta} \begin{matrix} C_1 + C_2 & -C_2 & g_2 + g_3 & g_2 & g_1 & C_1 \\ -C_2 & C_2 + C_3 & g_2 & g_1 + g_2 & & \end{matrix}$$

gdzie:  $\delta = g_1 g_2 + g_1 g_3 + g_2 g_3$

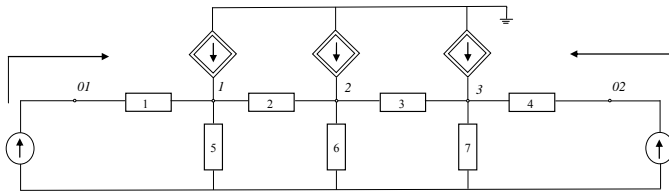
skąd:  $r_1 C_1 = r_2 C_2 = r_3 C_3$ ,

a po dokonaniu transformacji RC → RL:

$$\frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2} = \frac{L_3}{r_3}$$

**Przykład 4**

Energetycznie optymalny rozkład sygnałów potencjałów 01, 02 na obwód o strukturze drabinkowej (rys.6).



Rys.6. Energetycznie optymalny rozdział potencjałów 01, 02 na układ drabinkowy

Struktury „Y, G” operatorowych układów równań: dzielnika prądu (8) i optymalnego (7) mają postać następującą:

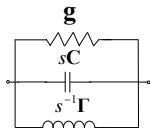
**Y, G**

1+2+5	-2		1	=	$u$
-2	2+3+6	-3	2		
	-3	3+4+7	3		

**Y<sub>0</sub>, G<sub>0</sub>**

1		01	$u_0$
		02	
	4		

Dla układu o strukturze gałęziowej typu RLC:



$$Y(s) = G(s) + B(s) = g + sC + s^{-1}\Gamma$$

optymalne operatory sterowania (11), (12), (13) będą miały postać:

$$B^{st}(s) = s(Cg^{-1}g_0 - C_0)$$

albo

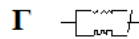
$$B^{st}(s) = s^{-1}(\Gamma g^{-1}g_0 - \Gamma_0)$$

albo

$$B^{st}(s) = s(Cg^{-1}g_0 - C_0) + s^{-1}(\Gamma g^{-1}g_0 - \Gamma_0)$$

Natomiast warunek (16), który muszą spełniać sieci naturalnie energetycznie optymalne, ma postać następującej struktury macierzowej:

<b>C</b>		<b>g</b>	<b>-1</b>
1+4+5	-5		1+4+5
-5	2+5+6	-6	-5
	-6	3+6+7	-6
			3+6+7



<b>g<sub>0</sub></b>	<b>C<sub>0</sub></b>
4	4
	7
<b>Γ<sub>0</sub></b>	

Na rysunku 6 pokazano też sterowanie optymalne zrealizowane za pomocą źródeł prądowych sterowanych napięciami 01, 02 wprowadzonych do węzłów obwodu drabinkowego.

**Wnioski**

W pracy wykazano, że w złożonej sieci RLC, oprócz rozkładu napięć wynikającego ze zwykłych praw Kirchhoffa zwanego *dzielnikiem napięcia*, za pomocą odpowiednich sterowań można otrzymać też inne rozkłady napięć wynikające z pewnych kryteriów optymalizacyjnych. W artykule rozpatrzono rozkład, który spełnia warunek minimum strat energii wewnątrz sieci, nazywając go rozkładem *energetycznie optymalnym*. Dzielnik napięcia opisuje operatorowy układ równań (8),

$$Y(s)u = Y_0(s)u_0$$

a energetycznie optymalny rozkład napięć spełnia również operatorowy układ równań (7):

$$G(s)u = G_0(s)u_0$$

Macierze typu admitancyjnego sieci Y(s) i G(s) są powiązane w ten sposób, że:

$$Y(s) = G(s) + B(s)$$

przy czym  $G(-s) = G(s)$ ;  $B(-s) = -B(s)$

co sprawia, że rozkład ten jest jednoznaczny:

$$G(s) = \frac{1}{2}[Y(s) + Y(-s)]; \quad B(s) = \frac{1}{2}[Y(s) - Y(-s)]$$

W ten sposób układy równań (7) i (8) są macierzowo identyczne, ale operatorowo układ (7) jest hermitowską odmianą układu równań (8).

Rozkład optymalny nie jest osiągalny samoistnie, tak jak rozkład dzielnika napięcia, ale aby go wywołać potrzebne jest *sterowanie optymalne* zrealizowane za pomocą operatora sterowania  $B^{st}(s)$  (13), wytwarzającego odpowiednio rozłożony sygnał prądu źródłowego  $i^{st}$  (12):

$$i^{st} = B^{st}(s)u_0$$

$$B^{st}(s) = B(s)[G(s)]^{-1}G_0(s) - B_0(s)$$

Okazuje się także, że rozkłady: energetycznie optymalny (7) i „dzielnik prądu” (8) mogą się pokryć bez sterowania, gdy znika operator odchylenia (14):

$$\Delta(s) = [G(s)]^{-1}G_0(s) - [Y(s)]^{-1}Y_0(s)$$

który związany jest z operatorem sterowania optymalnego wzorem (15):

$$B^{st}(s) = Y(s)\Delta(s)$$

Sieci spełniające ten warunek nazwano w pracy sieciami *naturalnie energetycznie optymalnymi*. Jak wykazano, dla nich musi zachodzić (16):

$$B(s)[G(s)]^{-1}G_0(s) = B_0(s)$$

albo równoważnie (16):

$$\mathbf{G}(s)[\mathbf{B}(s)]^{-1}\mathbf{B}_0(s) = \mathbf{G}_0(s)$$

Operator sterowania optymalnego  $\mathbf{B}^{st}(s)$  jest antyhermitowski, tj.  $\mathbf{B}^{st}(-s) = -\mathbf{B}^{st}(s)$  co sprawia, że antyhermitowski jest również operator

$$[\mathbf{G}_0(s)]^T [\mathbf{G}(s)]^{-1} \mathbf{B}^{st}(s)$$

a więc znika forma kwadratowa

$$(\mathbf{u}^{opt})^T \mathbf{e}^{st} = \mathbf{u}_0^T \mathbf{G}_0^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B}^{st} \mathbf{u}_0$$

Tym samym źródła sterowane  $i^{st}$  nie wydają energii – sterowanie optymalne jest bezenergetyczne.

W pracy przedstawiono także kilka przykładów, ze szczególnym naciskiem na sieci złożone z gałęzi o równoległej strukturze elementów RLC.

Autorzy: prof. dr hab. inż. Maciej Siwczyński, dr inż. Andrzej Drwal, dr inż. Sławomir Żaba, Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Instytut Elektrotechniki Przemysłowej i Informatyki Technicznej, Kraków ul. Warszawska 24, E-mails: e-3@pk.edu.pl; adrwal@pk.edu.pl; szaba@pk.edu.pl

#### LITERATURA

- [1] Desoer C. A.: The maximum power transfer theorem for n-ports. *IEEE Trans.*, Vol. CT-20 (1979), 228-230
- [2] Rohrer R. A.: Optimal matching: A new approach to the matching problem for real invariant one port networks. *IEEE Trans.*, Vol. CT-15 (1968), 118-124
- [3] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Minimalno-energetyczny rozkład napięciowych sygnałów elektrycznych w przestrzeni liniowej L1 – impulsów. *Pomiary Automatyka Robotyka*, nr 11, (2014), str. 1016-1020.
- [4] L.S. Czarnecki: Uwagi do artykułu Możliwość przedstawienia jednolitej nowej koncepcji mocy biernej prądu niesinusoidalnego w dziedzinie czasu *Przegląd Elektrotechniczny*, R85 (2009), nr 6, 164-166
- [5] Rens, A. P., Validation of popular nonsinusoidal power theories for the analysis and management of modern power systems. *North-West University, Potchefstroom Campus*, 2006.
- [6] Walczak, J. Pasko, M., Minimalizacja strat mocy czynnej i symetryzacja przepływu mocy w układach z przebiegami niesinusoidalnymi, *Jakość i Użytkowanie Energii Elektrycznej*, 5 (1999), nr. 1, 55-59.
- [7] L. S. Czarnecki: Koncepcja Składowych Fizycznych Prądu – fundamentalna teoria mocy. *Przegląd Elektrotechniczny*, R84 (2008), nr 6, 28-37.
- [8] Siwczyński M., Jaraczewski M., The  $L^1$  –impulse method as an alternative to the Fourier series in the power theory of continuous time systems, *Bull. of the Polish Acad. of Science, Techn. Scie.*, 57 (2009), n. 1, 79-85
- [9] M. Siwczyński, M. Jaraczewski: Application of  $L^1$  – impulse method to the optimization problems in power theory. *Bull. of the Polish Academy of Science, Techn. Sciences No 1*. 2010; pp. 197-207
- [10] Siwczyński, M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu – obwody jednofazowe. *Przegląd Elektrotechniczny*, R86 (2010), nr 6, 196-201
- [11] Siwczyński, M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu - podstawy matematyczne, metoda splotowa. *Przegląd Elektrotechniczny*, R87 (2011), nr 3, 254-257
- [12] Siwczyński M.: Energetyczna teoria obwodów. Wydawnictwo Instytutu Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią PAN, Kraków 2003