

Analiza pól EM w falowodach cylindrycznych w stanie nieustalonym

Streszczenie. W artykule przedstawiono metodę analizy pól elektromagnetycznych w falowodach cylindrycznych pobudzanych przez źródła impulsowe. Metoda analizy opiera się na równaniach Maxwella w dziedzinie czasu, a związane z nimi zagadnienie brzegowe prowadzi do układu dwóch sprzężonych cząstkowych równań różniczkowych, tj. równania Helmholtza dla wzdłużnych składowych pola E i H oraz równania Kleina-Gordona dla modalnych funkcji amplitudowych. Rozwiązania wymienionego układu równań mają postać szeregów modalnych, które opisują superpozycję nieskończonej liczby rodzajów pola TE i TM. W celu zilustrowania zaproponowanej metody przedstawiono przykład analizy pól EM w falowodzie o przekroju prostokątnym pobudzonym przez planarny, poprzeczny rozkład gęstości prądu elektrycznego o impulsowym przebiegu w dziedzinie czasu. Wyniki analizy ilustrują dynamikę zmienności pól EM w falowodzie cylindrycznym w stanie nieustalonym.

Abstract. This paper describes a method for transient analysis of electromagnetic fields in uniform waveguides. The method is based on time-domain Maxwell equations and the associated boundary-value problem is described by means of two coupled partial differential equations, namely the Helmholtz equation for longitudinal components E and H fields and the Klein-Gordon equation for modal amplitudes. Solution of those equations has a form of modal series that describe a superposition of infinite number of modes of TE and TM type. In order to illustrate the method an example of transient analysis of EM fields in a rectangular waveguide is presented. The result of calculations presents the dynamics of EM fields in a uniform waveguide during the transient state. (**Transient Analysis of Electromagnetic Fields in Uniform Waveguides**).

Słowa kluczowe: równania Maxwella, zagadnienie brzegowe dla falowodu, falowodowe rodzaje pola EM, równanie Helmholtza, równanie Kleina-Gordona, analiza stanów nieustalonych.

Keywords: Maxwell equations, waveguide boundary-value problem, waveguide field modes, Helmholtz differential equation, Klein-Gordon differential equation, transient analysis.

Wprowadzenie

Analiza pól EM w strukturach falowodowych jest zwykle związana z transmisją sygnałów pasmowych (niosących informację) lub z transmisją mikrofalowej energii elektromagnetycznej, która jest wykorzystywana w procesach termodynamicznych. W analizie zakłada się najczęściej stan ustalony przy pobudzeniu harmonicznym, a pola elektromagnetyczne opisuje się za pomocą rozwiązań równania Helmholtza w dziedzinie częstotliwości. Rozwiązanie otrzymuje się przy założeniu dekompozycji pól na rodzaje typu TE i TM [1-3]. Wymienione podejście nie może być bezpośrednio zastosowane do analizy pól EM w strukturach falowodowych pobudzanych przez źródła impulsowe.

Technika impulsowa w zakresie wysokich częstotliwości nabiera w ostatnich latach coraz większego znaczenia. Spowodowane to jest rozwojem systemów komunikacji ultra-szerokopasmowej (UWB), nowoczesnych systemów radarowych, budową ultra-szybkich magistrali danych oraz postępem w technice mikrofalowych źródeł impulsowych dużej mocy [4]. Opis zjawisk zachodzących podczas impulsowej transmisji energii mikrofalowej w strukturach falowodowych wymaga analizy w dziedzinie czasu, która umożliwia ocenę dynamiki zmienności pól EM w stanie nieustalonym.

Pierwsze metody analizy dynamiki stanu przejściowego w falowodach i innych liniach transmisyjnych bazowały na transformacji Fouriera odpowiedzi układu uzyskanej w szerokim zakresie częstotliwości. Niestety podejście takie jest nieefektywne i w niektórych przypadkach może być niewystarczająco dokładne. Chociaż wymienione metody polegały na analizie zagadnienia falowodowego w dziedzinie czasu, to niestety większość z nich zakładała propagację sygnału/energii EM w postaci podstawowego rodzaju pola (TE lub TM). Podejście takie nie umożliwia opisanie wszystkich zjawisk występujących w stanie nieustalonym przy pobudzeniu impulsowym. Metodę rygorystycznej analizy pól EM w strukturach falowodowych w dziedzinie czasu opisano po raz pierwszy w pracy [5], a następnie, dekadę później, w pracy [6]. W obu pracach wykorzystano dekompozycję pól EM na pola TE i TM o

nieskończonej liczbie rodzajów oraz na założeniu, że rozwiązania opisujące pole E i H mają postać sfaktyzowaną względem poprzecznych zmiennych przestrzennych oraz wzdłużnej zmiennej przestrzennej i zmiennej czasu. Głównym wkładem obu metod jest rozwiązanie dwuwymiarowego cząstkowego równania różniczkowego Kleina-Gordona, związanego z odpowiednio sformułowanym zagadnieniem brzegowym. Zaproponowane metody umożliwiają analizę pól EM w falowodach o nieskończonej długości z ośrodkiem jednorodnym.

W niniejszym artykule autor proponuje metodę analizy stanu nieustalonego w falowodach o skończonej długości z ośrodkiem uwarstwionym. Metoda również wykorzystuje dekompozycję pól EM na rodzaje TE i TM oraz zakłada odpowiednią faktoryzację postaci rozwiązań. Wyznaczenie pól z zadanej struktury falowodu polega na rozwiązaniu układu dwóch sprzężonych cząstkowych równań różniczkowych, tj. równania Helmholtza (dla wzdłużnych składowych pola E i H) oraz równania Kleina-Gordona (dla modalnych funkcji amplitudowych). Rozwiązania wymienionego układu równań mają postać szeregów modalnych, opisujących superpozycję rodzajów pola TE i TM propagujących i niepropagujących wzdłuż falowodu.

W celu zilustrowania zaproponowanej metody w artykule przedstawiono przykład analizy pól EM w falowodzie o przekroju prostokątnym pobudzonym przez planarny, poprzeczny rozkład gęstości prądu elektrycznego o impulsowym przebiegu w dziedzinie czasu. Na podstawie wyników analizy scharakteryzowano dynamikę zmienności pól EM w analizowanym układzie w stanie nieustalonym.

Opis pól EM w falowodzie cylindrycznym w dziedzinie czasu

Analizę pól EM w falowodzie cylindrycznym przeprowadzimy dla układu pokazanego na rysunku 1. Założymy, że jednorodny falowód rozciąga się wzdłuż osi z , natomiast płaszczyzna jego przekroju poprzecznego jest równoległa do płaszczyzny XY . Dalej założymy, że ścianki falowodu są doskonale przewodzące ($\sigma = \infty$), a ośrodek

wypełniający falowód jest liniowy i jednorodny. Ośrodek może być też uwarstwiony, tj. może się składać z planarnych jednorodnych warstw, ułożonych równoległe do płaszczyzny przekroju poprzecznego falowodu. Do analizy

pól EM w opisanym układzie zastosujemy poprzecznie niezmienniczą formę równań Maxwella [3]:

$$\begin{aligned}
 (1a) \quad & \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = \nabla_t Q - \frac{1}{\epsilon} \nabla_t \nabla_t \cdot (\bar{i}_z \times \int \mathbf{H}_t dt) + \mu \bar{i}_z \times \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla_t \int J_z dt + \bar{i}_z \times \mathbf{M}_t \\
 (1b) \quad & \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z} = \nabla_t P + \frac{1}{\mu} \nabla_t \nabla_t \cdot (\bar{i}_z \times \int \mathbf{E}_t dt) - \epsilon \bar{i}_z \times \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial t} - \frac{1}{\mu} \nabla_t \int M_z dt - \bar{i}_z \times \mathbf{J}_t \\
 (1c) \quad & E_z = Q - \frac{1}{\epsilon} \nabla_t \cdot (\bar{i}_z \times \int \mathbf{H}_t dt) - \frac{1}{\epsilon} \int J_z dt \\
 (1d) \quad & H_z = P + \frac{1}{\mu} \nabla_t \cdot (\bar{i}_z \times \int \mathbf{E}_t dt) - \frac{1}{\mu} \int M_z dt
 \end{aligned}$$

przy czym \mathbf{E}_t i \mathbf{H}_t oraz E_z i H_z oznaczają odpowiednio poprzeczne i wzdłużne składowe pola elektrycznego i magnetycznego. Analogiczne oznaczenia zastosowano do źródeł pola EM, tj. do gęstości prądu elektrycznego \mathbf{J} i gęstości prądu magnetycznego \mathbf{M} . Wielkości P i Q są funkcjami zmiennych przestrzennych (nie zależą od czasu) i wynikają z warunków początkowych dla pól \mathbf{E} i \mathbf{H} w falowodzie.

przeprowadzić analogiczny wywód). Podstawiając równanie (3a) do równania (2a) otrzymujemy:

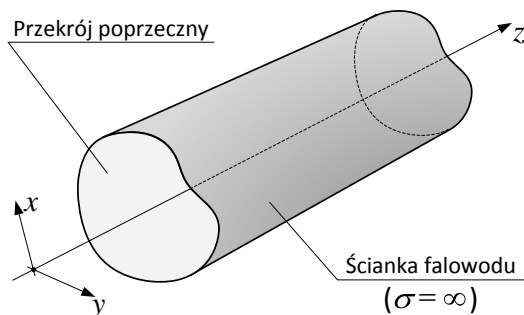
$$(4) \quad \frac{1}{E_z(x,y)} \nabla_t^2 E_z(x,y) + \frac{1}{W(z,t)} \left[\frac{\partial^2 W(z,t)}{\partial z^2} - \mu\epsilon \cdot \frac{\partial^2 W(z,t)}{\partial t^2} \right] = 0$$

Powyższe równanie można traktować jako sumę dwóch cząstkowych równań różniczkowych dla dwóch niezależnych funkcji, tj. $E_z(x,y)$ i $W(z,t)$. Jeśli równanie (4) ma być spełnione dla dowolnych par zmiennych (x,y) i (z,t) , to rozwiązanie musi spełniać następujący układ sprzężonych cząstkowych równań różniczkowych:

$$(5) \quad \begin{cases} \nabla_t^2 E_z(x,y) + k_\rho^2 E_z(x,y) = 0 \\ \frac{\partial^2 W(z,t)}{\partial z^2} - \mu\epsilon \cdot \frac{\partial^2 W(z,t)}{\partial t^2} - k_\rho^2 W(z,t) = 0 \end{cases}$$

Powyższe równania są ze sobą związane za pośrednictwem stałej k_ρ , która ze względu na pierwsze z równań może być interpretowana jako poprzeczna liczba falowa [1-3]. Pierwsze z równań (5) jest równaniem Helmholtza, natomiast drugie równanie jest jednorodnym równaniem Kleina-Gordona, znanym z zastosowań w elektrodynamice kwantowej. Rozwiązanie powyższych równań należy przeprowadzić w następującej kolejności. W pierwszym etapie rozwiązujemy równanie Helmholtza, które dla zagadnienia zamkniętego sprowadza się do wyznaczenia nieskończonego zbioru funkcji własnych ϕ_i stowarzyszonych z odpowiednimi wartościami własnymi k_{ρ_i} . W kolejnym etapie, dla każdej wartości własnej k_{ρ_i} rozwiązujemy jednorodne równanie Kleina-Gordona.

Rozwiązanie równania Helmholtza jest stosunkowo proste i jest opisane w wielu pracach, np. [1-3]. W celu uzyskania rozwiązania szczególnego należy zastosować odpowiednie warunki brzegowe dla obszaru ograniczonego ścianką falowodu, a mianowicie (patrz rys. 2):



Rys. 1. Jednorodny falowód cylindryczny

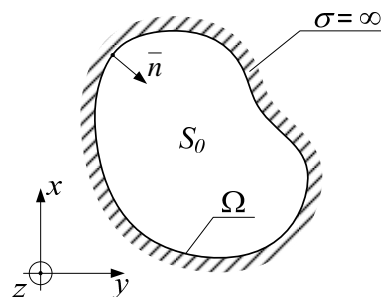
Dalej wprowadzimy rozkład pól \mathbf{E} i \mathbf{H} na rodzaje TE^z i TM^z (zakładamy, że wymienione rodzaje propagują wzdłuż osi z). W takim przypadku w obszarach beźródłowych składowe poprzeczne \mathbf{E}_t i \mathbf{H}_t można wyrazić jedynie za pomocą gradientu poprzecznego składowej E_z (dla pól rodzaju TM^z) oraz za pomocą gradientu poprzecznego składowej H_z (dla pól rodzaju TE^z). Wypadkowe pola \mathbf{E} i \mathbf{H} muszą oczywiście spełniać odpowiednio jednorodne równania falowe, a mianowicie:

$$\begin{aligned}
 (2a) \quad & \nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \\
 (2b) \quad & \nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned}$$

Wymienione równania spełniają składowe wzdłużne oraz E_z i H_z . W celu ich wyznaczenia założymy, że rozwiązania można sfaktoryzować względem zmiennych (x,y) oraz (z,t) w następujący sposób [5]:

$$\begin{aligned}
 (3a) \quad & E_z = E_z(x,y,z,t) = E_z(x,y)W(z,t) \text{ dla rodzajów } TM^z \\
 (3b) \quad & H_z = H_z(x,y,z,t) = H_z(x,y)U(z,t) \text{ dla rodzajów } TE^z
 \end{aligned}$$

W dalszej części rozdziału skupimy uwagę wyłącznie na rodzajach pola TM^z (w odniesieniu do rodzajów TE^z można



Rys. 2. Przekrój poprzeczny falowodu – definicja wektora normalnego do ścianki falowodu (Ω)

$$\begin{aligned}
(6a) \quad & E_z = 0 \quad \text{dla } (x, y) \in \Omega \\
(6b) \quad & \frac{\partial H_z}{\partial \bar{n}} = 0 \quad \text{dla } (x, y) \in \Omega \\
(6c) \quad & \bar{n} \times \mathbf{E}_t = 0 \quad \text{dla } (x, y) \in \Omega \\
(6d) \quad & \bar{n} \cdot \mathbf{H}_t = 0 \quad \text{dla } (x, y) \in \Omega
\end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne równania Helmholtza z warunkiem brzegowym (6a) przyjmuje następującą postać [3]:

$$(7) \quad E_z = \sum_i^\infty W_i^{TM}(z, t) \phi_i(x, y)$$

przy czym $\phi_i(x, y)$ jest funkcją własną dla danego zagadnienia brzegowego, związaną z wartością własną $k_{\rho_i}^2$. Dla falowodów kanonicznych ϕ_i ma formę analityczną o postaci zamkniętej, natomiast $k_{\rho_i}^2$ jest liczbą rzeczywistą. Z kolei modalna funkcja amplitudowa $W_i^{TM}(z, t)$ jest rozwiązaniem równania Kleina-Gordona przy odpowiednich warunkach brzegowych. Sposób rozwiązania tego równania zostanie opisany w rozdz. 3. Podstawiając równanie (7) do rów. (1a) i (1b) możemy wyznaczyć pozostałe składowe pola:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial V_i^{TM}(z, t)}{\partial z} = q_i^{TM}(z) - \frac{1}{\epsilon} k_{\rho_i}^2 \int I_i^{TM}(z, t) dt - \mu \frac{\partial I_i^{TM}(z, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial I_i^{TM}(z, t)}{\partial z} = -\epsilon \cdot \frac{\partial V_i^{TM}(z, t)}{\partial t} - J_i^{TM}(z, t) \end{cases}$$

przy czym, q_i^{TM} jest amplitudową funkcją modalną związaną z reprezentacją modalną funkcji Q . Powyższe równania można również interpretować jako zależności pomiędzy prądami I_i^{TM} i napięciami V_i^{TM} w linii długiej pobudzonej za pomocą źródła prądowego J_i^{TM} [3]. Wyrażenie z całką w pierwszym równaniu można interpretować jako spadek napięcia na kondensatorze o pojemności $\epsilon/k_{\rho_i}^2$, natomiast wyrażenie z różniczką prądu można interpretować jako spadek napięcia na cewce o indukcyjności μ . Wobec powyższego q_i^{TM} należy interpretować jako sumę napięć początkowych na cewce i kondensatorze. Na rysunku 3

$$(8) \quad \mathbf{H}_t = \sum_i^\infty I_i^{TM}(z, t) \cdot \bar{i}_z \times \nabla_t \phi_i(x, y)$$

$$(9) \quad \mathbf{E}_t = \sum_i^\infty V_i^{TM}(z, t) \cdot \nabla_t \phi_i(x, y)$$

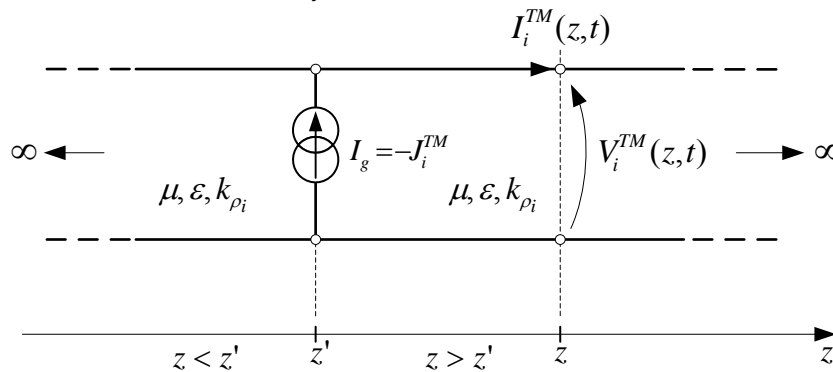
przy czym, podobnie jak w przypadku rów. (7), modalne funkcje amplitudowe I_i^{TM} i V_i^{TM} są wyznaczane w wyniku rozwiązania równania Kleina-Gordona.

Wyznaczanie modalnych funkcji amplitudowych

W celu wyznaczenia modalnych funkcji amplitudowych stojących w rów. (7)-(9) należy rozwiązać stosowne równania Kleina-Gordona. Jednorodne równanie Kleina-Gordona ma zastosowanie wyłącznie w obszarach bezźródłowych. Uwzględnienie pobudzenia falowodu oraz warunków brzegowych wynikających ze skończonej długości falowodu wymaga rozwiązania niejednorodnego równania Kleina-Gordona. Równania takie możemy otrzymać za pomocą metody Rayleigha-Ohma z równań (1a)-(1b) oraz (8)-(9) [3]. W wyniku otrzymujemy układu cząstkowych równań różniczkowych o postaci podobnej do równań różniczkowych zwyczajnych, opisujących linię długą w stanie ustalonym przy pobudzeniu harmonicznym (równania telegrafistów). Dla rodzajów pola TM^z mamy:

pokazano schemat linii transmisyjnej ilustrujący obwodową interpretację modalnych funkcji amplitudowych dla pól \mathbf{E}_t i \mathbf{H}_t w jednorodnym falowodzie cylindrycznym (przy zerowych warunkach początkowych).

W kolejnym kroku, układ równań (10) możemy przekształcić w niejednorodne równanie Kleina-Gordona względem V_i^{TM} lub I_i^{TM} . Dalej rozwiążemy wymienione równanie dla V_i^{TM} , przy zerowych warunkach początkowych i jednostkowym pobudzeniu punktowym.



Rys. 3. Równoważny model linii transmisyjnej stosowany do obwodowego opisu amplitudowych funkcji modalnych V_i^{TM} i I_i^{TM} dla i -tego rodzaju pola TM

W takim przypadku równanie przyjmuje następującą postać:

$$(11) \quad \frac{\partial^2 V_i^{TM}(z, t)}{\partial z^2} - \mu \epsilon \cdot \frac{\partial^2 V_i^{TM}(z, t)}{\partial t^2} - k_{\rho_i}^2 V_i^{TM}(z, t) = \frac{1}{\epsilon} k_{\rho_i}^2 \cdot A_i^{TM} \delta(z - z') + \mu \cdot A_i^{TM} \delta(z - z') \delta'(t - t')$$

przy czym $A_i^{TM} = \bar{i}_x \cdot \nabla_t \phi_i$ lub $A_i^{TM} = \bar{i}_y \cdot \nabla_t \phi_i$ odpowiednio

dla E_x lub E_y . Rozwiązanie powyższego równania opisuje funkcję Greena dla danego zagadnienia brzegowego. Funkcja Greena umożliwia wyznaczenie natężenia pola elektrycznego przy pobudzeniu falowodu za pomocą dowolnego planarnego rozkładu gęstości prądu elektrycznego. Poniżej, jako przykład, przedstawiono jeden z dziewięciu komponentów diadowej funkcji Greena \bar{G}^{EJ} (komponent opisuje odpowiedź impulsową układu w postaci składowej E_x pola elektrycznego indukowanej przez rozkład gęstości prądu elektrycznego):

$$(13) \quad G_{xx}^{EJ}(x, y, z, t, x', y', z', t') = \frac{1}{2} \frac{1}{c_0 \epsilon} g_i(t - t') \mathbf{1}(t - t') \cdot e_{x_i}^{TM}(x, y) e_{x_i}^{TM}(x', y')$$

przy czym:

$$(14) \quad g_i(z, z', t) = g_{1i}(z, z', t) + g_{2i}(z, z', t) - \frac{1}{2} \frac{k_{\rho_i}^2}{\mu \epsilon} t_p \mathbf{1}(t - t_p)$$

$$(15) \quad g_{1i}(z, z', t) = \int_{t_p}^t \left(\frac{2\alpha_i t_p^2}{(\sqrt{\tau^2 - t_p^2})^3} + \frac{\alpha_i}{\sqrt{\tau^2 - t_p^2}} \right) J_1(\alpha_i \sqrt{\tau^2 - t_p^2}) \mathbf{1}(\tau - t_p) d\tau$$

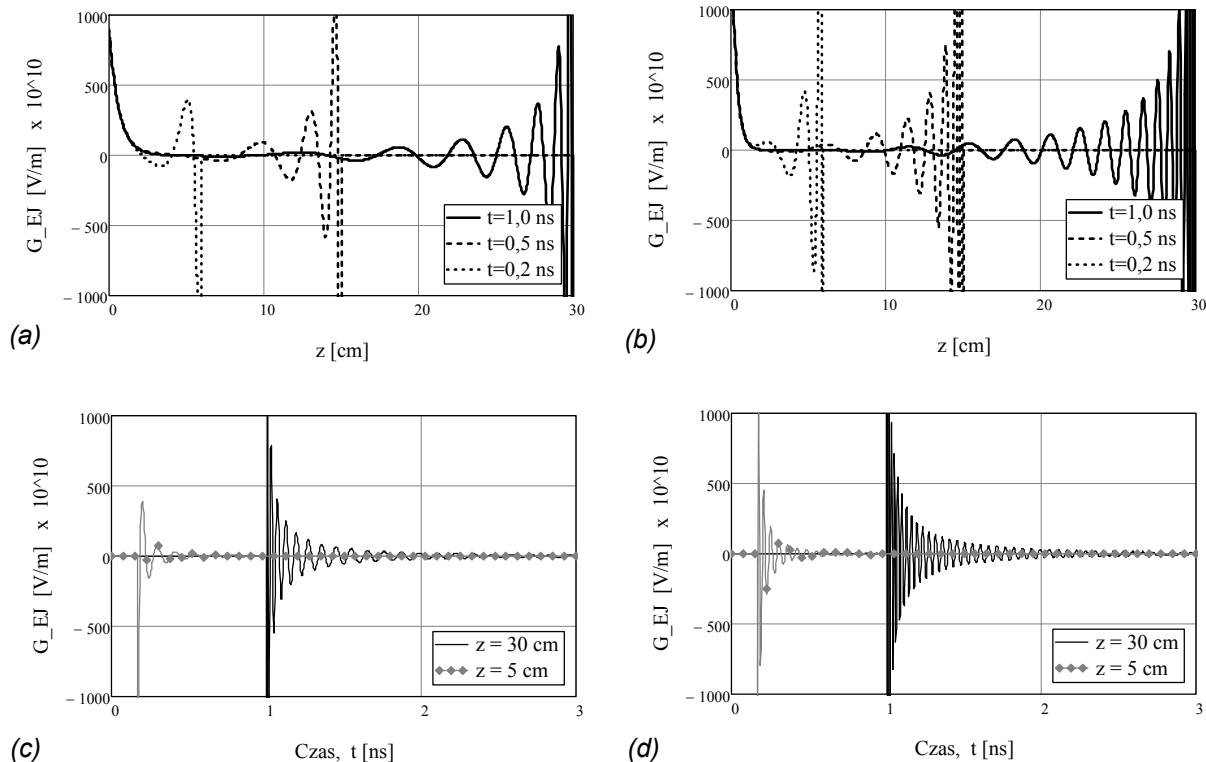
$$(16) \quad g_{2i}(z, z', t) = \int_{t_p}^t \frac{\alpha_i^2 t_p^2}{\tau^2 - t_p^2} J_0(\alpha_i \sqrt{\tau^2 - t_p^2}) \mathbf{1}(\tau - t_p) d\tau$$

oraz $t_p = (z - z')/c_0$, $\alpha_i = k_{\rho_i} c_0$ i $c_0 = 1/\sqrt{\mu \epsilon}$.

Przykład analizy stanu przejściowego w falowodzie prostokątnym

Poniżej przedstawiono wyniki analizy propagacji jednostkowego punkowego impulsu pobudzającego w nieskończonym falowodzie prostokątnym o wymiarach 48 x 22 mm (rys. 4). Na kolejnych rysunkach zilustrowano zmianę kształtu impulsu dla dwóch rodzajów pola, tj. TM_{11}

(rys. a i c) oraz TM_{22} (rys. b i d). Na rysunkach a i b pokazano zmianę kształtu impulsu w funkcji odległości od punktu pobudzenia. Z kolei na rysunkach c i d pokazano przebieg zmienności impulsu w funkcji czasu dla dwóch różnych położen impulsu wzdłuż falowodu.



Rys. 4. Przebieg odpowiedzi na jednostkowe pobudzenie punktowe (funkcja G^{EJ}) w czasie w analizowanym falowodzie: a) i c) – przebiegi dla rodzaju TM_{11} ; b) i d) – przebiegi dla rodzaju TM_{22}

Analizując powyższe wykresy można wywnioskować, że niezależnie od rodzaju pola impulsy propagują wzdłuż falowodu z taką samą prędkością (inaczej niż przy pobudzeniu harmonicznym). Rodzaj pola wpływa na częstotliwość oscylacji i czas trwania odpowiedzi.

Autor: dr hab. inż. Piotr Słobodzian, Politechnika Wroclawska, Wydział Elektroniki, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, E-mail: piotr.slobodzian@pwr.wroc.pl.

LITERATURA

[1] Collin R.B., Field theory of guided waves, 2nd ed., IEEE Press/Oxford University Press, New York, 1991
 [2] Felsen L.B., Marcuvitz N., Radiation and scattering of waves,

IEEE Press/Oxford University Press, New York, 1994
 [3] Słobodzian P.M., Electromagnetic Analysis of Shielded Microwave Structures. The Surface Integral Equation Approach, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wroclawskiej, Wrocław, 2007
 [4] Benford J., Swegle J.A., Schamiloglu E., High Power Microwaves, 2nd ed., CRC Press, Taylor & Francis Group, New York, 2007
 [5] Kristensson G., Transient electromagnetic wave propagation in waveguides, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 9, (1995), 645-671
 [6] Wen G., A time-domain theory of waveguide, *PIER - Progress in Electromagnetics Research*, vol. 59, (2006), 267-297