Zuzanna SIWCZYŃSKA

Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki

doi:10.15199/48.2016.09.58

Cyfrowe filtry hiperboliczne, eliptyczne w zastosowaniach do układów o parametrach rozłożonych

Streszczenie. *W pracy użyto tzw. cyfrowych filtrów funkcyjnych do modelowania linii długiej R, L, G, C oraz R, L, –G, –C, wprowadzając filtry hiperboliczne i eliptyczne. W modelu tej pierwszej linii zastosowanie znajdują filtry hiperboliczne, w modelu drugiej eliptyczne. Pojawia się też pojęcie filtru tangencjalnego.*

Abstract. *In the paper the so–called functional digital filters were used for modeling the transmission line R, L, G, C and R, L, –G, –C, by introducing hyperbolic and elliptic filters. In the first model of line hyperbolic filters were used, in the second – elliptic. The study also introduces a concept of the tangential filter.* (***Applications of hyperbolic and elliptic digital filters for systems with distributed parameters***)

Słowa kluczowe: filtry funkcyjne hiperboliczne, filtry funkcyjne eliptyczne, linia długa, modelowanie cyfrowe
Keywords: hyperbolic functional filters, elliptic functional filters, transmission line, digital modeling

Wprowadzenie – przegląd filtrów funkcyjnych

Ostatnio coraz większą rolę zaczynają odgrywać tzw. „filtry funkcyjne”, których szczególnymi przypadkami są filtry całko–pochodne rzędu ułamkowego, albo nawet wymiernego. Do filtrów funkcyjnych zaliczają się też cyfrowe filtry typu wykładniczego, hiperbolicznego czy kołowego. Tego typu filtry cyfrowe dobrze nadają się do opisu układów o parametrach rozłożonych, co jest zilustrowane w niniejszym artykule na przykładzie elektrycznej linii długiej.

Cyfrowy filtr przyczynowy A, utożsamiany z rzeczywisto–liczbowym ciągiem tzw. odpowiednika impulsowego $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ albo z funkcją:

(1) $$A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n z^n\,,\ z\in\mathbf{C}\,,$$

działa na sygnał x utożsamiany z ciągiem $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ według prawa liniowego splotu:

(2) $$(Ax)_n=\sum_{m=0}^{\infty}A_m x_{n-m}\,,$$

przy czym zachodzi:

(3) $$A_n=\frac{1}{n!}\frac{d^nA(z)}{dz^n}\bigg|_{z=0}\,.$$

Jeżeli natomiast $f(z)$ jest funkcją zmiennej zespolonej, to przyczynowy filtr $f(A)$ nazywany będzie filtrem funkcyjnym [3]. Jest on utożsamiany z ciągiem:

(4) $$\left\{\big(f(A)\big)_n\right\}_{n=0}^{\infty}\,,$$

wtedy obowiązuje:

(5) $$\big(f(A)\big)(z)=f\big(A(z)\big)=\sum_{n=0}^{\infty}\big(f(A)\big)_n z^n\,,$$

oraz:

(6) $$\big(f(A)\big)_n=\frac{1}{n!}\frac{d^nf\big(A(z)\big)}{dz^n}\bigg|_{z=0}\,.$$

Filtr funkcyjny działa na sygnał x według prawa:

(7) $$\big(f(A)x\big)_n=\sum_{m=0}^{\infty}\big(f(A)\big)_m x_{n-m}\,.$$

Spełnione są też warunki początkowe:

(8) $$\begin{aligned}\big(f(A)\big)_0&=f(A_0)\\ \big(f(A)\big)_1&=A_1\left(\frac{df}{dA}\right)_0\end{aligned}\,.$$

Formuła (6) w zastosowaniu do wyznaczania współczynników wagowych filtrów funkcyjnych nie jest wygodna. Ma ona zastosowanie do stosunkowo prostych filtrów cyfrowych jakimi są na przykład filtry różniczkująco–całkujące rzędu $-1\le p\le 1$, tj. $(a-z)^p$, wówczas zastosowanie formuły (6) daje użyteczny wynik [4]:

(9) $$\left((a-z)^p\right)_n=a^pa^{-n}\prod_{m=1}^{n}\frac{m-1-p}{m}\,,$$

gdzie: a – „zero–biegun” zespolony.

Dla filtrów funkcyjnych bardziej złożonych, a takimi są na przykład filtry e^A, chA, shA, $cosA$, $sinA$, stosowanie formuły bezpośredniej (6) nie jest skuteczne. Lepsze rezultaty daje formuła uwikłana [3]:

(10) $$\big(f(A)\big)_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}A_m\left(\frac{df}{dA}\right)_{n-m}\,,$$

która dla pewnych szczególnych funkcji $f(A)$ może przejść w formułę rekurencyjną i tak dla funkcji: wykładniczych (e^A), hiperbolicznych (chA, shA) i eliptycznych ($cosA$, $sinA$), które są idempotentami dla operacji różniczkowania, formuła ta uzyskuje postać:

(11) $$\left(e^A\right)_n=\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{m}{n}\right)A_m\left(e^A\right)_{n-m},$$

(12) $$\begin{bmatrix} chA \\ shA \end{bmatrix}_n=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}A_m\begin{bmatrix} chA \\ shA \end{bmatrix}_{n-m},$$

(13) $$\begin{bmatrix} cosA \\ sinA \end{bmatrix}_n=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}A_m\begin{bmatrix} cosA \\ sinA \end{bmatrix}_{n-m}.$$

Jak wspomniano, formuły (11) ÷ (13) wynikają z faktu idempotentności i cyklicznej (krzyżowej) idempotentności tych funkcji względem operacji różniczkowania:

$$\frac{de^A}{dA}=e^A,$$

$$\frac{d}{dA}\begin{bmatrix} chA \\ shA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} chA \\ shA \end{bmatrix},$$

oraz:

$$\frac{d}{dA}\begin{bmatrix} cosA \\ sinA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cosA \\ sinA \end{bmatrix}.$$

Modele cyfrowe linii długich R, L, G, C – filtry hiperboliczne

Równania różniczkowe o cząstkowych pochodnych linii R, L, G, C mają postać wyjściową:

(14) $$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial \dot{x}}&=Ri+L\frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial \dot{x}}&=Gu+C\frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned},$$

gdzie: $u(\dot{x},t)$, $i(\dot{x},t)$ – przestrzenno–czasowe rozkłady napięcia i prądu wzdłuż linii, $\dot{x}$ – bezwzględna zmienna przestrzenna (odległość), t – zmienna czasowa.

Dokonując modelowania cyfrowego z odstępem pobierania próbek czasowych τ otrzymuje się operatorowy układ równań różniczkowych:

(15) $$\begin{aligned} -\frac{du}{d\dot{x}}&=\frac{L}{\tau}(a-z)i \\ -\frac{di}{d\dot{x}}&=\frac{C}{\tau}(b-z)u \end{aligned},$$

gdzie: $\frac{\partial}{\partial t}\to\frac{1}{\tau}(1-z)$, $a=1+\frac{R}{L}\tau$, $b=1+\frac{G}{C}\tau$, z – zespolona zmienna opóźnieniowa.

Układ równań (15) w jednostkach względnych przyjmie postać:

(16) $$\begin{aligned} -\frac{du}{dx}&=\rho(a-z)i \\ -\frac{di}{dx}&=\rho^{-1}(b-z)u \end{aligned},$$

gdzie: $x=\frac{\dot{x}}{\omega\tau}$, $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\rho=\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Macierzowa forma zapisu układu równań (16) jest następująca:

(17) $$-\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}=\mathbf{A}(z)\begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix},$$

gdzie:

(18) $$\mathbf{A}(z)=\begin{bmatrix} 0 & \rho(a-z) \\ \rho^{-1}(b-z) & 0 \end{bmatrix}$$

jest macierzą złożoną z operatorów różniczkujących (filtrów cyfrowych realizujących numerycznie operacje różniczkowania).

Rozwiązaniem układu równań (17) w postaci macierzowej jest:

(19) $$\begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}=e^{-x\mathbf{A}}\begin{bmatrix} u^0 \\ i^0 \end{bmatrix}.$$

Macierzowa funkcja wykładnicza od zadanej macierzy $\mathbf{A}$ wyraża się całkowym wzorem Cauchy'ego:

(20) $$e^{-x\mathbf{A}}=\frac{1}{2\pi j}\int_{CSp\mathbf{A}}\frac{e^{-x\lambda}}{\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}}d\lambda,$$

gdzie: $\mathbf{I}$ – macierz jednostkowa, $CSp\mathbf{A}$ – kontur obejmujący widmo macierzy $\mathbf{A}$.

Samo widmo jest zbiorem złożonym z dwóch operatorów:

(21) $$Sp\mathbf{A}=\left\{\lambda:\left|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|=\lambda^2-A^2=0\right\}=\left\{A,-A\right\},$$

gdzie:

$|\bullet|$ – operacja wzięcia wyznacznika macierzy,

(22) $$A(z)=\sqrt{(a-z)(b-z)}\leftrightarrow\left\{A_n\right\}_{n=0,1,2,...}$$

jest operatorem będącym sekwencją dwóch filtrów cyfrowych różniczkujących rzędu ½ [4], [8]. Jest to tzw. operator propagacji.

Realizacja wzoru Cauchy'ego będzie miała postać następującą [4]:

(23) $$\begin{aligned} e^{-x\mathbf{A}}&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \rho\sqrt{\frac{a-z}{b-z}} \\ \rho^{-1}\sqrt{\frac{b-z}{a-z}} & 1 \end{bmatrix}e^{-xA}+ \\ &+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho\sqrt{\frac{a-z}{b-z}} \\ -\rho^{-1}\sqrt{\frac{b-z}{a-z}} & 1 \end{bmatrix}e^{xA} \end{aligned}.$$

Pojawia się funkcyjny złożony filtr cyfrowy $e^{\pm xA}$, którego wagi wyznaczane są ze wzoru rekurencyjnego (11), który tym razem ma realizację:

(24) $$\left(e^{xA}\right)_n = x\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}A_m\left(e^{xA}\right)_{n-m},$$

gdzie: $\left(e^{xA}\right)_0 = e^{xA_0}$.

Macierzowy, łańcuchowy, funkcyjny filtr cyfrowy linii długiej R, L, G, C można też przedstawić w formie:

(25) $$e^{x\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} chxA & ZshxA \\ Z^{-1}shxA & chxA \end{bmatrix}.$$

We wzorze (25) występują:

– funkcyjne filtry hiperboliczne:

$$chxA \equiv \frac{1}{2}\left(e^{xA}+e^{-xA}\right),$$

$$shxA \equiv \frac{1}{2}\left(e^{xA}-e^{-xA}\right),$$

ich wagi czasowe otrzymywane są z formuły rekurencyjnej (12) przyjmującej tym razem postać:

(26) $$\begin{bmatrix} chxA \\ shxA \end{bmatrix}_n = x\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}A_m\begin{bmatrix} chxA \\ shxA \end{bmatrix}_{n-m},$$

– funkcyjne filtry pierwiastkowe: zdefiniowany wzorem (22) filtr propagacji $A(z)$ oraz filtr impedancji falowej:

(27) $$Z(z) = \rho\sqrt{\frac{a-z}{b-z}}.$$

Filtry pierwiastkowe są sekwencjami filtrów różniczkujących rzędu ½: $(a-z)^{1/2}$ i $(b-z)^{1/2}$ oraz filtru całkującego $(b-z)^{-1/2}$ [8]. Oznaczając te filtry symbolami:

– pierwiastkowy a –filtr różniczkujący:

(28) $$D^a(z) = (a-z)^{1/2},$$

– pierwiastkowy b –filtr całkujący:

(29) $$I^b(z) = (b-z)^{-1/2},$$

przy zastosowaniu rozwinięcia czasowego (9) otrzymuje się ich wagi:

(30) $$D_n^a = a^{1/2}D_n a^{-n},$$

(31) $$I_n^b = b^{-1/2}I_n b^{-n}.$$

Ciągi $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ są wagami filtrów:

– różniczkującego rzędu ½:

$$D(z) = (1-z)^{1/2},$$

– całkującego rzędu ½:

$$I(z) = (1-z)^{-1/2}.$$

Wagi te określone są wzorami (9), które w tym szczególnym przypadku mają postać:

(32) $$D_n = -\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}\frac{5}{8}\cdots\frac{2n-3}{2n},\ \text{gdzie}\ D_0 = 1,$$

(33) $$I_n = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{7}{8}\cdots\frac{2n-1}{2n},\ \text{gdzie}\ I_0 = 1.$$

Splotowe sekwencje filtrów D^a, D^b oraz D^a, I^b dają filtry A i Z:

(34) $$A_n = \sqrt{ab}\,a^{-n}\alpha_n, \qquad Z_n = \rho\sqrt{\frac{a}{b}}\,a^{-n}\beta_n,$$

gdzie:

(35) $$\alpha_n = \sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^m D_{n-m}D_m, \qquad \beta_n = \sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^m D_{n-m}I_m.$$

Modele cyfrowe linii R, L, –G, –C – filtry eliptyczne

Zamieniając w równaniach (14) linii: $G \to -G$, $C \to -C$, gdzie $G, C > 0$, macierzowemu, łańcuchowemu, funkcyjnemu filtrowi cyfrowemu $\mathbf{A}(z)$ nadaje się postać:

(36) $$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} 0 & \rho(a-z) \\ -\rho^{-1}(b-z) & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma to wpływ na widmo $\mathbf{A}$, które jest teraz zbiorem:

(37) $$Sp\mathbf{A} = \{jA; -jA\},\ \text{gdzie}\ j = \sqrt{-1},$$

a realizacja wzoru Cauchy'ego (20) dla funkcji operatora $\mathbf{A}$ ma postać:

(38) $$\begin{aligned} e^{-x\mathbf{A}} &= \frac{1}{2jA}\begin{bmatrix} jA & \rho(a-z) \\ -\rho^{-1}(b-z) & jA \end{bmatrix}e^{-jxA} - \\ &- \frac{1}{2jA}\begin{bmatrix} -jA & \rho(a-z) \\ -\rho^{-1}(b-z) & -jA \end{bmatrix}e^{jxA} = . \\ &= \begin{bmatrix} cosxA & -ZsinxA \\ Z^{-1}sinxA & cosxA \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tym razem w macierzowym–łańcuchowym filtrze cyfrowym (38) występują filtry eliptyczne:

$$cosxA=\frac{1}{2}\left(e^{jxA}+e^{-jxA}\right),$$
$$sinxA=\frac{1}{2j}\left(e^{jxA}-e^{-jxA}\right).$$

Ich wagi czasowe otrzymuje się z formuły rekurencyjnej („krzyżowej") (13):

(39) $$\begin{bmatrix} cosxA \\ sinxA \end{bmatrix}_n = x\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}A_m\begin{bmatrix} cosxA \\ sinxA \end{bmatrix}_{n-m}.$$

W podsumowaniu, stosując oznaczenia skrócone dla funkcyjnych filtrów cyfrowych hiperbolicznych i eliptycznych:

$$\begin{bmatrix} chxA \\ shxA \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}^h, \text{ oraz } \begin{bmatrix} cosxA \\ sinxA \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}^e,$$

formułom rekurencyjnym do wyznaczania wag tych filtrów nadaje się formę:

(40) $$\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}^h_n = x\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}A_m\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}^h_{n-m},$$

(41) $$\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}^e_n = x\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}A_m\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}^e_{n-m},$$

przy warunkach początkowych:

$$\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}^h_0 = \begin{bmatrix} chxA_0 \\ shxA_0 \end{bmatrix}, \text{ oraz } \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}^e_0 = \begin{bmatrix} cosxA_0 \\ sinxA_0 \end{bmatrix}.$$

Przy takiej notacji macierzowe, funkcyjne, łańcuchowe filtry cyfrowe $e^{x\mathbf{A}}$ hiperboliczne i eliptyczne będą miały postać:

(42) $$\begin{bmatrix} c^h & Zs^h \\ Z^{-1}s^h & c^h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c^e & -Zs^e \\ Z^{-1}s^e & c^e \end{bmatrix}.$$

Warto zauważyć, że macierze (42) są unitarne, tj. mają jednostkowy operatorowy wyznacznik $\left|e^{x\mathbf{A}}\right|=1$, natomiast filtry cyfrowe – macierze odwrotne, tj. operatory $e^{-x\mathbf{A}}$ uzyskują postać:

(43) $$\begin{bmatrix} c^h & -Zs^h \\ -Z^{-1}s^h & c^h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c^e & Zs^e \\ -Z^{-1}s^e & c^e \end{bmatrix}.$$

Filtry tangencjalne

Filtr:

(44) $$sc^{-1} \equiv \frac{s}{c} \equiv tg$$

nazwany będzie filtrem tangencjalnym, czyli krótko „tangensem" (użycie kreski ułamkowej jest uzasadnione faktem komutatywności mnożenia splotowego). Oznacza to, że:

(45) $$\left(tg\right)_n = \sum_{m=0}^{n} c_{n-m}^{-1}s_m = \sum_{m=0}^{n} s_{n-m}c_m^{-1},$$

gdzie: c^{-1} – filtr odwrotny, tj. spełniający warunek splotowy:

(46) $$\sum_{m=0}^{n} c_{n-m}^{-1}c_m = \begin{cases} 1 & dla\ \ n=0 \\ 0 & dla\ \ n\neq 0 \end{cases}.$$

Relacja (46) łatwo przechodzi w formułę rekurencyjną do wyznaczania ciągu $\left\{\left(c^{-1}\right)_n\right\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\left(c^{-1}\right)_n = -\frac{1}{c_0}\sum_{m=1}^{n} c_m\left(c^{-1}\right)_{n-m},$$

przy warunku początkowym:

$$\left(c^{-1}\right)_0 = \left(c_0\right)^{-1}.$$

Rozróżnialne są tu filtry funkcyjne:

$tg^h = \dfrac{s^h}{c^h}$ – tangens hiperboliczny,

$tg^e = \dfrac{s^e}{c^e}$ – tangens eliptyczny,

a także filtr zwany kotangensem (hiperbolicznym bądź eliptycznym):

$$ctg \equiv \frac{c}{s} = \left(tg\right)^{-1}.$$

Przykładami zastosowań cyfrowych filtrów tangencjalnych mogą być modele cyfrowe impedancji wejściowych linii. Dla linii opisanych macierzowymi, łańcuchowymi, funkcyjnymi filtrami cyfrowymi (42) operator impedancji wejściowej linii obciążonej odbiornikiem o operatorze impedancyjnym Z^O określony jest ułamkiem splotowym:

(47) $$Z^{WE} = \frac{Z^O c \pm Zs}{Z^{-1}Z^O s + c} = \frac{Z^O \pm Ztg}{Z^{-1}Z^O tg + 1} = \frac{Z^O ctg \pm Z}{Z^{-1}Z^O + ctg}.$$

Znak $+$ lub $-$ we wzorze (47) występuje w zależności od tego czy rozważana jest linia hiperboliczna (R, L, G, C) czy eliptyczna (R, L, –G, –C).

Wnioski

W artykule pokazano zastosowanie pewnych typów cyfrowych filtrów funkcyjnych do modelowania układów o parametrach rozłożonych w dziedzinie czasu. Tymi filtrami są tzw. filtry hiperboliczne i eliptyczne. Są one znamienne tym, że ich pochodne funkcjonalne spełniają warunek cyklicznej idempotentności, dzięki czemu ich czasowe wagi (odpowiedzi impulsowe) można wyznaczać za pomocą formuł rekurencyjnych.

Układy o parametrach rozłożonych zilustrowano na przykładzie dwóch rodzajów linii elektrycznych, tj. linii hiperbolicznej i linii eliptycznej. Linia hiperboliczna o dodatnich parametrach R, L, G, C opisana jest za pomocą hiperbolicznych filtrów cyfrowych chA, shA, gdzie A jest sekwencją dwóch cyfrowych filtrów różniczkujących rzędu ½ o rzeczywistych zerach. Natomiast w opisie linii eliptycznej biorą udział filtry funkcyjne eliptyczne $cosA$, $sinA$. Pokazano, że przejście z linii hiperbolicznej do eliptycznej odbywa się przez zmianę znaku dwóch parametrów, mianowicie G, C. O ile linia hiperboliczna jest modelem obiektu fizykalnego, to linia eliptyczna przedstawia raczej model obiektu matematycznego, fikcyjnego z fizykalnego punktu widzenia. Warto też zaznaczyć, że nazwy filtry hiperboliczne i eliptyczne pochodzą stąd, że spełniają one odpowiednio warunki:

– hiperboli: $\left(c^h\right)^2 - \left(s^h\right)^2 = 1$,

– elipsy: $\left(c^e\right)^2 + \left(s^e\right)^2 = 1$.

Trzeba też zwrócić uwagę na podobieństwa i różnice w formułach rekurencyjnych (40) i (41) dla wag czasowych filtrów hiperbolicznych i eliptycznych. O relacji między tymi formułami decyduje „macierz rotacyjna”:

$$\begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

W pracy użyto też sekwencji splotowej jednego z filtrów: hiperbolicznego bądź eliptycznego z inwersją drugiego, tworząc w ten sposób wzajemnie odwrotne filtry tangencjalne hiperboliczne lub eliptyczne. Służą one do modelowania cyfrowego operatorów impedancji wejściowych linii.

Autorzy: *dr inż. Zuzanna Siwczyńska, Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, E-mail: zsiw@pk.edu.pl.*

LITERATURA

[1] Atici F. M., Eloe P. W.: A transform method in discrete fractional calculus, *International Journal of Difference Equations (IJDE)*, 2 (2007), n. 2, 165-176

[2] Li Y., Sheng H., Chen Y. Q.: Analytical impulse response of a fractional second order filter and its impulse response invariant discretization, *Signal Processing*, 91 (2011), n. 3, 498-507

[3] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: The digital function filters – algorithms and applications, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, 61 (2013), n. 2, 371-377

[4] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Zastosowanie cyfrowych filtrów rzędu ułamkowego typu wykładniczego do analizy układów o parametrach rozłożonych, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr 2, 184-190

[5] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Zastosowanie cyfrowych filtrów hiperbolicznych rzędu ułamkowego do analizy procesów falowych, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr 5a, 218-222

[6] Tseng C. C.: Design of FIR and IIR fractional order Simpson digital integrators, *Signal Processing*, 87 (2007), n. 5, 1045-1057

[7] Chen Y. Q., Vinagre B. M.: A new IIR–type digital fractional order differentiator, *Signal Processing*, 83 (2003), n. 11, 2359-2365

[8] Siwczyńska Z.: Modele cyfrowe nieskończonych obwodów elektrycznych – operatory pierwiastkowe, *Przegląd Elektrotechniczny* (w druku)