

## Uproszczony model trójwymiarowy nagrzewania indukcyjnego obracającego się cylindra

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono efektywny model nagrzewanego indukcyjnie walca stalowego, dedykowany do obrazowania temperatury jego powierzchni. Prezentowany model pomija mniej istotne szczegóły wymiany ciepła, w szczególności wzdłuż promienia walca, umożliwiając zmniejszenie czasochłonności wykonywanych przy jego zastosowaniu symulacji. Porównanie zaproponowanego rozwiązania z pełnym modelem 3D udowodniło jego przydatność dla przyjętego celu modelowania.

**Abstract.** In the paper the efficient model of an induction heated steel cylinder, aimed at its surface temperature representation has been presented. The model neglects some details of heat exchange phenomena especially along the radius of the cylinder mantle so that calculations' burden was made reasonable. The comparison of the proposed solution with the three-dimensional model proved its usefulness for a given modelling aim. (*Simplified 3D Model of Induction Heated Rotating Steel Cylinder*).

**Słowa kluczowe:** modelowanie numeryczne, nagrzewanie indukcyjne, obracający się walec.

**Keywords:** numerical modelling, induction heating, rotating cylinder.

### Wstęp

Wśród wielu obszarów zastosowań nagrzewania indukcyjnego ważne miejsce zajmuje nagrzewanie wsadów będących w ruchu, gdzie szczególnym przypadkiem jest nagrzewanie obracających się stalowych walców. Wiele zalet tego typu nagrzewania sprawia, że jest ono chętnie wykorzystywane między innymi w przemyśle papierniczym czy tekstylnym. Jednocześnie, wysokie wymagania technologiczne dotyczące rozkładu temperatury na powierzchni walca powodują konieczność stosowania kilku wzbudników wzdłuż tworzącej walca, a także wyposażania układu w precyzyjne mechanizmy regulacji temperatury. Ze względu na wielowymiarowy charakter układu wszelkie procedury pomiarowo-sterujące realizowane są w wielokanałowym komputerowym systemie gromadzenia i przetwarzania danych. Mechanizmy regulacyjne zaimplementowane w rozważanym układzie czerpią informacje o aktualnym stanie cieplnym walca na drodze bezstykowego pomiaru jego temperatury realizowanego przy zastosowaniu kamery termowizyjnej, wpływając na poziomysterowania generatorów w.cz. zasilających wzbudniki umieszczone nad powierzchnią walca.

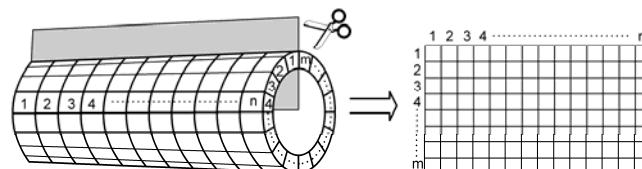
W Instytucie Informatyki Stosowanej PŁ prowadzone są prace z wykorzystaniem półprzemysłowego stanowiska do nagrzewania indukcyjnego walca stalowego [1]. Badania dotyczą doboru właściwych algorytmów regulacyjnych [2,3], ale także procedur przetwarzania sygnałów mierzonych i generowania sygnałów wymuszających [4]. Głównym celem artykułu jest przedstawienie wybranych możliwości i ograniczeń w numerycznym modelowaniu walca, dla potrzeb symulacyjnego odwzorowania rozkładu temperatury na powierzchni nagrzewanego walca przy możliwej redukcji nakładów obliczeniowych.

### Numeryczne modelowanie rozwiniętego płaszcza walca

W celu umożliwienia badań symulacyjnych nagrzewania indukcyjnego obracającego się walca stalowego, które

realizowane jest przy użyciu ruchomych wzbudników, konieczne jest opracowanie modelu obiektu oddającego istotną ze względu na przyjęty cel modelowania cechę, czyli rozkład temperatury jego powierzchni. Tego typu model w wersji trójwymiarowej można utworzyć w programach służących do modelowania zjawisk elektromagnetyczno-cieplnych np. w pakiecie Flux firmy Cedrat. Niestety, potrzeba zasymulowania ruchu obrotowego walca implikuje konieczność stosowania kroku czasowego symulacji o wartościach rzędu milisekund. W efekcie czas symulacji kilkudziesięciominutowych procesów regulacji temperatury powierzchni obiektu przy zastosowaniu dokładnych trójwymiarowych modeli jest nieakceptowalny. W związku z powyższym pojawiła się potrzeba opracowania uproszczonego modelu, który byłby użyteczny ze względu zarówno na dokładność odwzorowywania temperatury powierzchni walca jak i czas obliczeń.

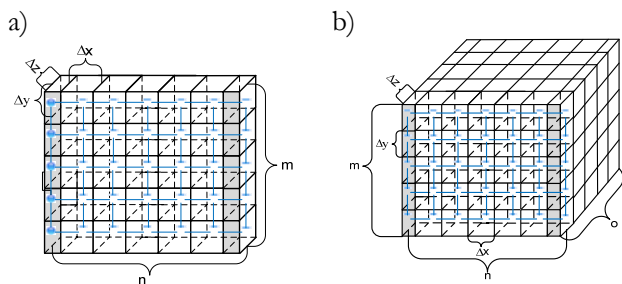
W opracowanym modelu powierzchni walca dokonano „rozcięcia” walca, które schematycznie przedstawia rys. 1. W wyniku „rozcięcia” walca otrzymuje się jego rozwiniętą powierzchnię w postaci prostokąta, w którym - w rzeczywistym obiekcie - górne i dolne elementy „sąsiadują” ze sobą.



Rys.1. „Rozwinięcie” powierzchni walca

Badając przydatność opracowywanego modelu i uwzględniając potrzebę ograniczenia nakładów obliczeniowych, przeanalizowano dokładność modelowania rozkładu temperatury dwuwymiarowej powierzchni walca w dwóch przypadkach:

- uproszczony model 3D – ścianka płaszcza walca modelowana jest tylko jedną warstwą elementów (schematycznie przedstawia to rysunek 2a);
- model 3D - grubość ścianki walca modelowana jest kilkoma warstwami elementów (schematycznie przedstawiony na rysunku 2b).



Rys.2. Schematy modeli 3D rozwiniętego płaszcza walca stalowego

W uproszczonym przypadku modelowany jest rozptył ciepła tylko w dwóch kierunkach – wzdłuż tworzącej oraz obwodu walca, natomiast założono, iż nie występuje rozptył ciepła wzdłuż jego promienia. W efekcie otrzymano model o strukturze przedstawionej na rysunku 2a. Symbole zastosowane na rysunku 2a oznaczają:  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  - rozmiary elementów modelu odpowiednio wzdłuż tworzącej, obwodu oraz promienia walca,  $m$  i  $n$  - liczba elementów modelu odpowiednio wzdłuż obwodu i tworzącej walca. W celu umożliwienia symulacji ruchu wzbudnika zarówno wzdłuż tworzącej, jak i obwodu walca, przyjęto, iż moc grzejna może być generowana w każdym z elementów modelu. Ze względu na stosunkowo niewielkie wartości temperatury powierzchni walca (rzadko przekraczające  $100^{\circ}\text{C}$ ) w modelu nie uwzględniono wymiany ciepła przez radiację.

W opracowanym modelu numerycznym walca występują dwa rodzaje punktów:

- punkty wewnętrzne, w których ciepło jest przekazywane na drodze kondukcji do punktów sąsiednich oraz konwekcji z powierzchni walca do otoczenia (zaznaczone na rys. 2a kolorem białym);
- punkty brzegowe, w których ciepło jest przekazywane na drodze kondukcji do punktów sąsiednich oraz konwekcji z powierzchni walca i jego boków (zaznaczone na rys. 2a kolorem szarym).

Opracowany model numeryczny bazuje na metodzie różnic skończonych [5]. Zjawiska fizyczne zachodzące w modelowanym obiekcie zostały opisane równaniami (1) (dla punktów wewnętrznych) oraz (2) (dla punktów brzegowych). W celu uproszczenia zapisu przyjęto, iż  $\Delta x = \Delta y$ .

$$(1) \quad T_{x,y}^{i+1} = T_{x,y}^i + Fo \cdot (T_{x-1,y}^i + T_{x+1,y}^i + T_{x,y-1}^i + \dots + T_{x,y+1}^i - 4T_{x,y}^i - \frac{\Delta x}{\Delta z} \cdot Bi \cdot (T_{x,y}^i - T_{\infty}) + \frac{\dot{g} \cdot \Delta x^2}{k})$$

$$(2) \quad T_{x,y}^{i+1} = T_{x,y}^k + Fo \cdot (2 \cdot T_{x+1,y}^i + T_{x,y-1}^i + T_{x,y+1}^i - \dots - 4T_{x,y}^i - \left(\frac{\Delta x}{\Delta z} \cdot Bi + 2 \cdot Bi_b\right) \cdot (T_{x,y}^i - T_{\infty}) + \frac{\dot{g} \cdot \Delta x^2}{k})$$

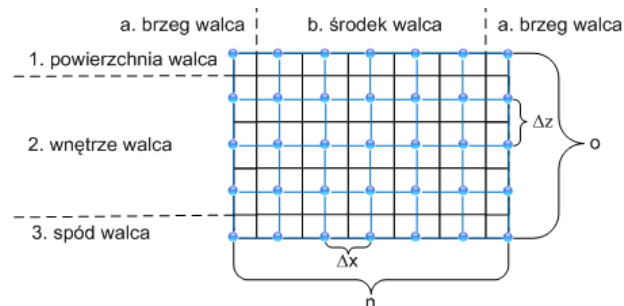
$$(3) \quad Fo = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{\Delta x^2}, \quad Bi = \frac{h \cdot \Delta x}{k}, \quad \alpha = \frac{k}{\rho \cdot c}$$

gdzie:  $i$  – numer kroku czasowego,  $T$  [ $^{\circ}\text{C}$ ] – temperatura,  $x, y$  [m] – współrzędne danego punktu modelu,  $\Delta x$  [m] – odległość pomiędzy punktami modelu,  $\Delta z$  [m] – grubość

modelu,  $Fo$  [-] – liczba Fouriera, wyrażona zależnością (3),  $Bi$  [-] – liczba Biota związana z konwekcją z powierzchni walca, wyrażona zależnością (3),  $Bi_b$  [-] – liczba Biota dotycząca konwekcji z powierzchni bocznej walca,  $T_{\infty}$  [ $^{\circ}\text{C}$ ] – temperatura otoczenia,  $\dot{g}$  [ $\text{W}/\text{m}^3$ ] – gęstość objętościowa mocy,  $k$  [ $\text{W}/\text{m}/\text{K}$ ] – przewodność cieplna,  $\alpha$  [ $\text{m}^2/\text{s}$ ] – dyfuzyjność cieplna, wyrażona zależnością (3),  $\Delta t$  [s] – okres próbkowania,  $h$  [ $\text{W}/\text{m}^2/\text{K}$ ] – współczynnik konwekcji,  $\rho$  [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ] – gęstość,  $c$  [ $\text{J}/\text{kg}/\text{K}$ ] – ciepło właściwe.

Drugi z opracowanych modeli numerycznych uwzględnia – oprócz zjawisk opisanych powyżej – również rozptyw ciepła wzdłuż promienia walca. Schematycznie model ten przedstawia rysunek 2b.

Na rysunku 3 przedstawiono przekrój poprzeczny modelu 3D w płaszczyźnie promienia walca. Można zauważyć, iż ze względu na podział punktów modelu wzdłuż tworzącej walca na dwie grupy (brzegowe oraz środkowe) oraz wzdłuż grubości walca na trzy grupy (powierzchni, wnętrza i spodu) w modelu 3D występuje 6 grup punktów, opisywanych równaniami 4-9, które dotyczą odpowiednio grup punktów 1a, 2a, 3a, 1b, 2b oraz 3b.



Rys.3. Przekrój poprzeczny modelu 3D

Parametry geometryczne obu modeli oraz liczby ich elementów przyjęto w taki sposób, aby uzyskać zgodność wymiarów geometrycznych pomiędzy modelami a obiektem. Wynoszą one:  $\Delta x = \Delta y = 0.02\text{m}$ ,  $\Delta z = 0.02\text{m}$ , natomiast  $m$  i  $n$  odpowiednio 65 i 63 elementy.

Ze względu na konieczność zamodelowania ruchu obrotowego walca, konieczne było zastosowanie stosunkowo niewielkiego czasowego kroku obliczeń, wynoszącego  $\Delta t = 0.025\text{s}$ , co przy zmianie pozycji źródła ciepła wzdłuż współrzędnej  $y$  modelu o jeden element modelu w każdym kroku symulacji odpowiada prędkości obrotowej walca wynoszącej ok. 37 rpm.

$$(4) \quad T_{x,y,z}^{i+1} = T_{x,y,z}^i + Fo \cdot [2T_{x+1,y,z}^i + T_{x,y-1,z}^i + \dots + T_{x,y+1,z}^i + 2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 T_{x,y,z+1}^i - \dots - \left(4 + 2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2\right) T_{x,y,z}^i - 2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z} \cdot Bi + Bi_b\right) \cdot (T_{x,y,z}^i - T_{\infty}) + \frac{\dot{g} \cdot \Delta x^2}{k}]$$

$$(5) \quad T_{x,y,z}^{i+1} = T_{x,y,z}^i + Fo \cdot [2T_{x+1,y,z}^i + T_{x,y-1,z}^i + \dots + T_{x,y+1,z}^i + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 T_{x,y,z-1}^i + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 T_{x,y,z+1}^i - \dots - \left(4 + 2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2\right) T_{x,y,z}^i - 2Bi_b (T_{x,y,z}^i - T_{\infty})]$$

$$(6) \quad \begin{aligned} T_{x,y,z}^{i+1} &= T_{x,y,z}^i + Fo \cdot [2T_{x+1,y,z}^i + T_{x,y-1,z}^i + \dots \\ &\dots + T_{x,y+1,z}^i + 2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 T_{x,y,z-1}^i - 4T_{x,y,z}^i - \dots \\ &\dots - 2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 T_{x,y,z}^i - 2Bi_b \cdot (T_{x,y,z}^i - T_\infty)] \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{aligned} T_{x,y,z}^{i+1} &= T_{x,y,z}^i + Fo \cdot [T_{x-1,y,z}^i + T_{x+1,y,z}^i + \dots \\ &\dots + T_{x,y-1,z}^i + T_{x,y+1,z}^i + 2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 T_{x,y,z+1}^i - \dots \\ &\dots - 4T_{x,y,z}^i - 2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 T_{x,y,z}^i - \dots \\ &\dots - 2\frac{\Delta x}{\Delta z} \cdot Bi_b \cdot (T_{x,y,z}^i - T_\infty) + \frac{g \cdot \Delta x^2}{k}] \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} T_{x,y,z}^{i+1} &= T_{x,y,z}^i + Fo \cdot [T_{x-1,y,z}^i + T_{x+1,y,z}^i + \dots \\ &\dots + T_{x,y-1,z}^i + T_{x,y+1,z}^i + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 T_{x,y,z-1}^i + \dots \\ &\dots + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 T_{x,y,z+1}^i - 4T_{x,y,z}^i - 2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 T_{x,y,z}^i] \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} T_{x,y,z}^{i+1} &= T_{x,y,z}^i + Fo \cdot [T_{x-1,y,z}^i + T_{x+1,y,z}^i + \dots \\ &\dots + T_{x,y-1,z}^i + T_{x,y+1,z}^i + 2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 T_{x,y,z-1}^i - \dots \\ &\dots - 4T_{x,y,z}^i - 2\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 T_{x,y,z}^i] \end{aligned}$$

gdzie symbole występujące w zależnościach 4÷9 są identyczne jak występujące w zależnościach 1÷3. Równania (4÷9) zostały wyprowadzone przy założeniu, iż  $\Delta x = \Delta y$ .

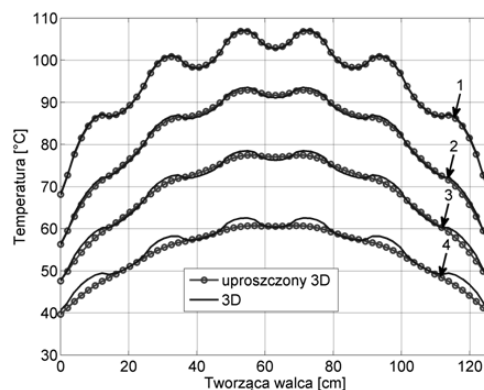
### Porównanie opracowanych modeli numerycznych

Najważniejszą z punktu widzenia celu niniejszego artykułu jest ocena wpływu pominięcia rozptyłu ciepła wzdłuż promienia walca w uproszczonym modelu 3D na wyniki symulacji rozkładu temperatury na powierzchni nagrzewanego walca. Porównano więc obrazy pola temperatury uzyskiwane przy zastosowaniu tego modelu z wynikami otrzymanymi przy użyciu pełnego modelu 3D. W analizie uwzględniono zarówno stany statyczne jak i dynamiczne pracy walca, a ponadto - w celu bardziej wszechstronnego ujęcia problemu - symulacje przeprowadzono dla różnych wartości grubości ścianki walca (2, 5, 10 oraz 20 cm).

Na rysunku 4 przedstawiono (uśrednione wzdłuż obwodu walca) rozkłady temperatur wzdłuż tworzącej obracającego się walca, uzyskane dla symulacji stanu quasi-ustalonego uzyskanego po 12-to godzinnym nagrzewaniu, przy zastosowaniu sześciu statycznych, rozmieszczonych równomiernie wzdłuż tworzącej walca wzbudników.

Dla potrzeb ilościowej, syntetycznej oceny różnic pomiędzy modelem 3D a jego wersją uproszczoną w warunkach statycznych, zastosowano wskaźniki jakości zdefiniowane zależnościami (10÷11), wyrażającymi odpowiednio maksymalną i średnią różnicę temperatur

powierzchni walca. Obliczone wartości wskaźników jakości przedstawione zostały w tabeli 1.



Rys.4. Porównanie, uśrednionych wzdłuż obwodu walca, rozkładów temperatur wzdłuż tworzącej walca dla modeli 3D i uproszczonego 3D. Poszczególne grupy przebiegów, oznaczone cyframi 1-4, dotyczą modeli o grubościach ścianek odpowiednio: 2cm, 5cm, 10cm i 20cm

$$(10) \quad I_1 = \max \left( \left| \frac{T_{x,y}^{3D} - T_{x,y}^{3D'}}{T_{x,y}^{3D}} \right| \cdot 100\% \right)$$

$$(11) \quad I_2 = \frac{\sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^m \left| \frac{T_{x,y}^{3D} - T_{x,y}^{3D'}}{T_{x,y}^{3D}} \right| \cdot 100\%}{m \cdot n}$$

gdzie:  $T^{3D}$  i  $T^{3D'}$  – temperatury odpowiednio modelu 3D i uproszczonego 3D,  $x, y$  – współrzędne odpowiednio wzdłuż tworzącej i obwodu walca,  $n$  i  $m$  – liczba punktów pola temperatury odpowiednio wzdłuż tworzącej i obwodu walca.

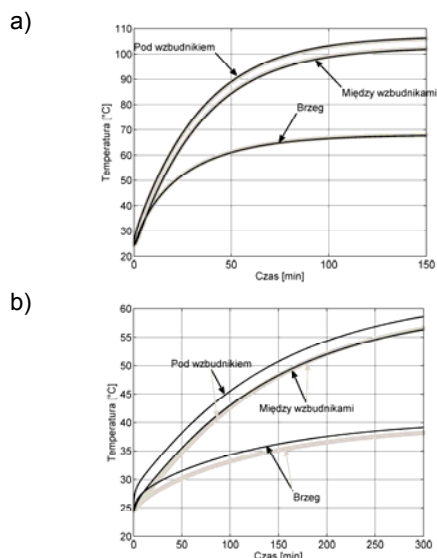
Tabela 1. Wartości wskaźników jakości dla analizowanych modeli

Grubość ścianki [cm]	$I_1$ [%]	$I_2$ [%]
2	2.1896	0.2507
5	1.9966	0.6299
10	3.0878	1.1398
20	5.7847	2.1414

Zarówno na rys. 4 jak i w tabeli 1 widoczna jest naturalna tendencja do coraz silniejszego „wygładzania” rozkładu temperatury na powierzchni walca w uproszczonym modelu 3D wraz ze wzrostem modelowanej grubości ścianki walca. Jednocześnie widać, że dla małych wartości grubości płaszcza walca (a więc w warunkach odpowiadających rzeczywistym parametrom modelowanego walca) dokładność odwzorowania temperatury na jego powierzchni w modelu uproszczonym jest bardzo wysoka.

Kolejna faza weryfikacji jakości opracowanego uproszczonego modelu dotyczyła modelowania stanów dynamicznych. W tym celu porównano przebiegi czasowe obu modeli uzyskiwane dla punktów powierzchni walca charakterystycznych dla analizowanego wariantu nagrzewania: punktów położonych pod wzbudnikiem, między wzbudnikami oraz punktów brzegowych walca. Przebiegi uzyskane dla skrajnych wartości analizowanych grubości ścianek (2 i 20cm) przedstawiono na rysunku 5.

Porównanie własności dynamicznych obu modeli numerycznych przeprowadzono stosując zmodyfikowane wersje przyjętych wcześniej wskaźników jakości, wyrażone zależnościami 12-13.



Rys.5. Przebiegi czasowe w charakterystycznych punktach modeli dla dwóch wartości grubości ścianki walca: a) 2cm, b) 20cm. Kolorem czarnym przedstawiono przebiegi otrzymane dla modelu 3D, szarym dla uproszczonego modelu 3D

$$(12) \quad I_3 = \max \left( \left| \frac{T^{3D}(k) - T^{3D'}(k)}{T^{3D}(k)} \right| \cdot 100\% \right)$$

$$(13) \quad I_4 = \frac{\sum_{k=1}^l \left| \frac{T^{3D}(k) - T^{3D'}(k)}{T^{3D}(k)} \right| \cdot 100\%}{l}$$

gdzie:  $k$  – krok czasowy symulacji,  $l$  – liczba analizowanych kroków czasowych,  $T^{3D}$  i  $T^{3D'}$  temperatury odpowiadających sobie wybranych punktów modeli uproszczonego 3D i 3D.

W tabeli 2 przedstawiono wartości liczbowe wskaźników  $I_3$  oraz  $I_4$ .

Tabela 2. Zestawienie wartości wskaźników  $I_3$  oraz  $I_4$  dla czasu nagrzewania  $0 \div 12h$

Rodzaj punktu	Wskaźnik	Grubość ścianki			
		2cm	5cm	10cm	20cm
Punkt pod wzbudnikiem	$I_3$ [%]	1,953	4,466	7,516	11,298
	$I_4$ [%]	0,344	1,359	3,421	7,250
Punkt między wzbudnikami	$I_3$ [%]	0,304	0,716	1,087	4,234
	$I_4$ [%]	0,262	0,615	0,661	1,788
Punkt boczny	$I_3$ [%]	0,263	0,402	1,957	5,273
	$I_4$ [%]	0,239	0,313	0,706	3,791

Analiza rysunku 5 oraz zawartości tabeli 2 pozwala wyciągnąć wniosek, iż również dla stanów dynamicznych różnica odpowiedzi pomiędzy modelem 3D a uproszczonym 3D dla niewielkich grubości ścianki walca jest stosunkowo mała.

## Podsumowanie

Zaproponowane uproszczone podejście do modelowania obracającego się walca nagrzewanego indukcyjnie pozwala na efektywne odwzorowywanie rozkładu temperatury jego powierzchni. Porównując wyniki uzyskane dla modelu 3D oraz uproszczonego modelu 3D można stwierdzić, iż dla obiektów o niewielkiej grubości zastosowanie w miejsce modelu 3D uproszczonego modelu 3D nie powoduje powstawania istotnych błędów, a pozwala znacząco skrócić czas obliczeń. W szczególności wyniki te dowodzą możliwości wykorzystywania uproszczonego modelu 3D dla potrzeb symulacji rzeczywistego - przedstawionego w artykule - obiektu, będącego przedmiotem badań. W przypadku obiektów o większych grubościach, uzyskanie wystarczającej dokładności modelowania może wymagać stosowania pełnego modelu 3D. Dalsze prace analityczne w tym zakresie mogą dotyczyć określenia ogólnego warunku stosowalności tego typu uproszczonego modelu 3D w zależności od dopuszczalnego błędu modelowania, grubości ścianki walca i charakterystycznych parametrów materiału z jakiego wykonany jest walec.

**Autorzy:** dr inż. Andrzej Frączyk, Politechnika Łódzka, Instytut Informatyki Stosowanej, ul. Stefanowskiego 18/22, 90-924 Łódź, E-mail: [andrzej.fraczyk@p.lodz.pl](mailto:andrzej.fraczyk@p.lodz.pl); dr hab. inż. Jacek Kucharski, Politechnika Łódzka, Instytut Informatyki Stosowanej, ul. Stefanowskiego 18/22, 90-924 Łódź, E-mail: [jacek.kucharski@p.lodz.pl](mailto:jacek.kucharski@p.lodz.pl); dr inż. Piotr Urbanek, Instytut Informatyki Stosowanej, ul. Stefanowskiego 18/22, 90-924 Łódź, E-mail: [piotr.urbanek@p.lodz.pl](mailto:piotr.urbanek@p.lodz.pl).

## LITERATURA

- [1] Urbanek P., Kucharski J., Frączyk A., Methods of determination of dynamic properties of induction heated multi input – multi output systems, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 11, (2008), 180-183
- [2] Frączyk, A., Urbanek, P., Kucharski, J., Modelling and optimal temperature control of in-duction heated rotating steel cylinder, *13th IEEE IFAC International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, Szczecin, (2007), 351-355
- [3] Urbanek P., Kucharski J., The induction heated rotating steel cylinder as a control plant. *51st Internationales Wissenschaftliches Kolloquium*, Technische Universität Ilmenau, (2006)
- [4] Urbanek P., Frączyk A., Kucharski J., Algorytmy eliminacji wpływu zmian emisyjności powierzchni w bezstykowych pomiarach temperatury wirującego walca stalowego, *Automatyka*, tom 12/3, (2008), 841-851
- [5] Holman J.P., *Heat transfer*, Tenth Edition. McGraw-Hill, 2010