

doi:10.15199/48.2017.01.12

## Symulacja obwodu prądu przemiennego z obciążeniem nieliniowym i kompensacją mocy biernej

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono model obwodu jednofazowego z modelem systemu zasilania, obciążeniem nieliniowym z indukcyjnością oraz kondensatorem układu kompensacji mocy biernej. Charakterystyka prądowo-napięciowa obciążenia opisana jest funkcją signum i modeluje wyładowanie łukowe. Opracowano model matematyczny. Zastosowano zmienne bezwymiarowe. Zbudowano model symulacyjny obwodu w Simulinku. Przeprowadzono analizę wyników symulacji obwodu.

**Abstract.** The paper deals with the model of the single-phase AC circuit with the model of the supply system, the non-linear load with the inductance and the capacitor of the reactive power compensation. The current-voltage characteristic of the load is described with the signum function and models the arc discharge. There was worked out the mathematical model. Dimensionless variables were applied. The circuit simulation model was created in Simulink. The analysis of the circuit simulation results was carried out. (**Simulation of A.C. circuit with non-linear load and reactive power compensation**).

**Słowa kluczowe:** obwód z obciążeniem nieliniowym, moc bierna, kompensacja, symulacja

**Keywords:** circuit with non-linear load, reactive power, compensation, simulation.

### Wstęp

W systemie elektroenergetycznym obciążonym odbiornikami linowymi występuje jednokierunkowy przepływ energii, ogólnie od generatorów do odbiorników. Gdy w systemie występuje odbiornik nieliniowy, generuje on wyższe harmoniczne i obserwuje się przepływ energii od odbiornika do elementów systemu elektroenergetycznego [1]. Aby prześledzić te zjawiska przepływu energii konieczne są badania systemu odbiornikiem nieliniowym, na przykład modelującym łuk elektryczny z uwzględnieniem zwykle występujących elementów obwodu, które modelują system energetyczny.

Nawet w stanie ustalonym, dla elementów stacjonarnych w ogólnym przypadku problem analizy obwodu z takim obciążeniem nieliniowym jest problemem niejednorodnym nieliniowym. Założono, że obwód jest zasilany z sinusoidalnego źródła napięcia i zawiera szeregowo połączone indukcyjność, rezystancję i łuk elektryczny, którego napięcie jest opisane funkcją signum prądu łuku. Dla takiego obwodu znaleziono rozwiązanie analityczne (symboliczne) dla stanu ustalonego [2]. Ułatwia to interpretację zjawisk w obwodzie. Z tego rozwiązania wynika, że nieliniowość, nawet o jednowartościowej charakterystyce prądowo-napięciowej może powodować:

- wzrost reaktancji indukcyjnej obwodu widzianej z zacisków źródła zasilania,
- obniżenie wartości maksymalnej mocy czynnej obwodu,
- zmniejszenie wartości współczynnika mocy
- zmniejszenie sprawności energetycznej obwodu.

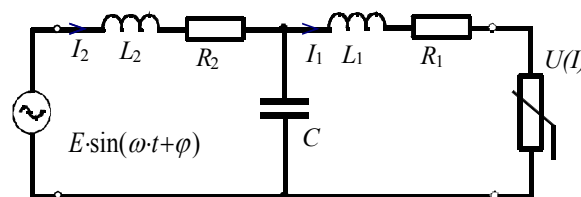
Stwierdzono też, że chociaż schemat zastępczy dla harmonicznej podstawowej rozważanego odbiornika nieliniowego zawiera rezystancję i indukcyjność, całkowita moc bierna odbiornika (proporcjonalna do iloczynu napięcia i pochodnej czasowej prądu) jest równa zero. W [3] stwierdzono, że taka definicja mocy biernej obowiązuje również dla elementów pojemnościowych – kondensatorów. Tak określona moc bierna elementów akumulujących energię bilansuje się w obwodzie.

Uwzględnienie w analizie dodatkowo układu kompensującego moc bierną obwodu powoduje, że zadanie staje się nierozwiązywalne analitycznie. Ze względu na nieliniowość obciążenie oraz wyższy rząd układu, rozwiązanie można uzyskać jedynie stosując metodę symulacji. Zastosowanie zmiennych bezwymiarowych oraz analiza asymptotyczna zmiennych wejściowych i wyjściowych problemu ułatwia realizację symulacji,

organizację eksperymentu symulacyjnego oraz zrozumienie zjawisk w obwodzie nieliniowym.

### Model matematyczny obwodu

Schemat analizowanego obwodu przedstawiono niżej na rysunku 1.



Rys.1 Schemat obwodu z obciążeniem nieliniowym i układem kompensacji mocy biernej

Układ zasilany jest napięciem sinusoidalnym o pulsacji  $\omega$ . Obciążenie jest nieliniowe. Jego napięcie jest proporcjonalne do funkcji signum prądu. Równania opisujące układ są następujące:

$$(1) \quad L_2 \frac{dI_2}{dt} = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t) - R_2 \cdot I_2 - U_c$$

$$(2) \quad L_1 \frac{dI_1}{dt} = U_c - R_1 \cdot I_1 - U_a \cdot \text{sign}(I_1)$$

$$(3) \quad C \frac{dU_c}{dt} = I_2 - I_1$$

W równaniach tych oznaczono:  $I_1, I_2$  wartości chwilowe prądów płynących odpowiednio w indukcyjnościach  $L_1, L_2$  i rezystancjach  $R_1, R_2$ . Indukcyjność  $L_2$  przedstawia indukcyjność systemu zasilania i jej reaktancja ma wartość znacznie większą niż rezystancja  $R_2$ . Podobnie wartość reaktancji indukcyjności  $L_1$  przedstawiającej indukcyjność układu obciążenia, jest znacznie większa od wartości reaktancji  $R_1$  tego układu. Wartość indukcyjności  $L_1$  jest ponadto znacznie większa od wartości indukcyjności  $L_2$ . Powyższe relacje można w zapisie asymptotycznym przedstawić następująco:

$$(4) \quad R_1 = o(\omega L_1) \quad R_2 = o(\omega L_2) \quad L_2 = o(L_1)$$

Aby uprościć organizację eksperymentu symulacyjnego w zapisie równań zastosowano skalowanie czasu i zmienne odniesienia:

$$(5) \tau = \omega t, X_1 = \omega L_1, E_m, I_m = E_m / X_1, Y = \omega C$$

Na podstawie, których sformułowano następujące zmienne i parametry bezwymiarowe:

$$(6) i_2 = I_2 / I_m \quad i_1 = I_1 / I_m \quad u_c = U_c / E_m \quad u_a = U_a / E_m$$

$$(7) x_2 = X_2 / X_1 \quad r_2 = R_2 / X_1 \quad r_1 = R_1 / X_1 \quad y = Y \cdot X_1$$

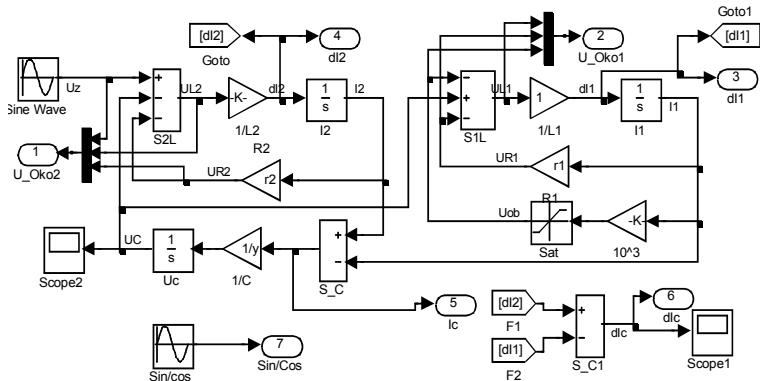
Po zastosowaniu tych podstawień otrzymano równania (1-3) w postaci:

$$(8) \quad x_2 \frac{di_2}{d\tau} = \sin(\tau) - r_2 i_2 - u_c$$

$$(9) \quad \frac{di_1}{d\tau} = u_c - r_1 i_1 - u_a \cdot \text{sign}(i_1)$$

$$(10) \quad y \cdot \frac{du_c}{d\tau} = i_2 - i_1$$

Na podstawie bezwymiarowych równań modelu (8-10) utworzono schemat operacyjny przedstawiony na rysunku 2.

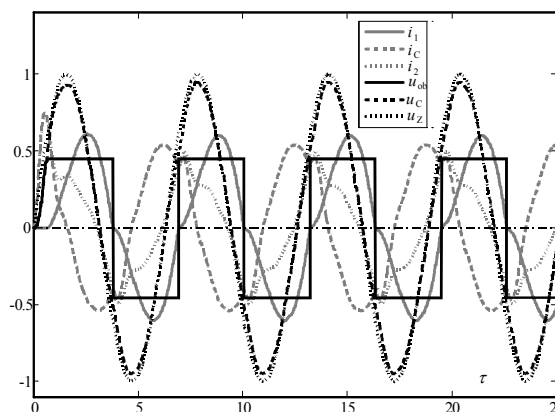


Rys.2 Schemat operacyjny w Simulinku obwodu z rysunku 1

Funkcję signum zrealizowano wzmacniając  $10^3$  razy sygnał i dalej wykorzystując funkcję nasycenia. Dla wyznaczenia mocy biernej pojemności wyznaczono dodatkowo pochodną prądu pojemności. Zastosowano modyfikowany algorytm zmiennie-krokowy Rosenbrocka (MATLAB ode23s). Obliczenia prowadzono z dokładnością względną równą  $10^{-3}$  i dokładnością bezwzględną równą  $10^{-6}$ .

### Przebiegi modelu obwodu

Dla określenia, jakie charakterystyki należy badać przeprowadzono analizę jakościową przebiegów prądów i napięć w analizowanym obwodzie. Zmiennymi wejściowymi były parametry  $(x_2, r_2, r_1, u_a, y)$ . Wartości parametrów  $x_2$  i  $r_2$  charakteryzują sztywność systemu zasilania węzła. Im większa jest reaktancja indukcyjna  $x_2$  i im większa jest rezystancja  $r_2$ , tym system jest mniej sztywny. Przy czym wielkości te mają dość zróżnicowany wpływ na przebiegi prądów i napięć w obwodzie. Jako przebieg odniesienia dla wymuszenia w postaci funkcji  $\sin(\tau)$  oraz parametrów wejściowych  $x_2=0,05, r_2=0,2, r_1=0,1, u_a=0,45, y=0,6$  przedstawiono na rysunku 3.



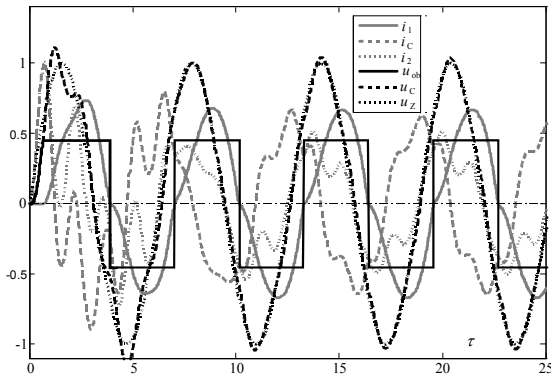
Rys.3 Przebiegi bezwymiarowych prądów i napięć modelu obwodu podczas załączania zasilania dla  $x_2=0,05, r_2=0,2, r_1=0,1, u_a=0,45, y=0,6$

Na rysunku  $u_{ob}$  i  $u_z$  oznaczają napięcia odpowiednio obciążenia oraz źródła zasilania. W przebiegu tym można wyróżnić procesy przejściowe załączania obwodu oraz przebiegi w stanie ustalonym (quasistatycznym). W trakcie załączania występują większe oscylacje prądu kondensatora oraz prądu załączania całego obwodu. Parametry tych oscylacji zależą od przesunięcia fazowego napięcia zasilania w momencie załączania oraz parametrów oczka zasilania obwodu, które zawiera źródło zasilania oraz elementy  $L_2, R_2$  i  $C$ . Dla wymuszenia  $\cos(\tau)$  oscylacje prądu  $i_2$  są ponad 4 –krotnie większe od amplitudy tego prądu w stanie ustalonym. Najmniejsze są dla wymuszenia  $\sin(\tau)$  i dlatego wpływ elementów biernych obwodu zasilania przedstawiono dla takiego wymuszenia.

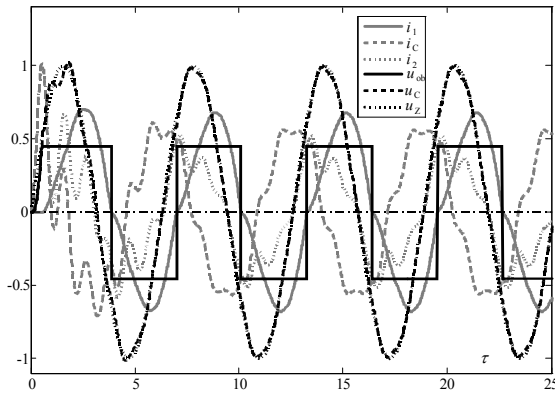
Przebiegi dotyczą przypadku nieco „przekompensowanej” mocy biernej obwodu. Dlatego widoczny jest prąd kondensatora o wartości skutecznej porównywalnej z wartością skuteczną prądu obciążenia. Duża wartość  $r_2$  powoduje, że oscylacje są szybko tłumione. Są one bardziej widoczne na rysunku 4.

W stanie quasistatycznym, w pobliżu zboczy napięcia obciążenia widoczne są dwie oscylacje prądu kondensatora i prądu pobieranego ze źródła zasilania. Jest to wpływ nieliniowości obciążenia, które generuje okresowo krótkie procesy przejściowe. Kształt przebiegów prądu obciążenia jest „prawie identyczny” jak na rysunku 3. Wynika to z małych różnic napięcia na kondensatorze i praktycznie jednakowego napięcia obciążenia. Podobnie jest dla  $x_2=0,1$ . Przebiegi prądu i napięcia się prawie nie zmieniły, natomiast istotnie wzrosła zawartość wyższych harmonicznych w prądzie kondensatora  $i_c$  i prądzie zasilania  $i_1$  oraz nieco zmniejszyła się częstotliwość harmonicznych – rysunek 5.

Mimo dużych zniekształceń prądów napięcie na kondensatorze jest zbliżone do sinusoidy. Posiada ono nieznacznie większą amplitudę niż napięcie zasilania. Procesy przejściowe w odniesieniu do poprzednich rysunków trwają dłużej. Na podstawie przebiegów prądów na rysunkach 3, 4 i 5 można wnioskować, że największa zawartość harmonicznych cechuje prąd pobierany ze źródła zasilania  $i_2$ . Prąd ten ma harmoniczną podstawową mniejszą od prądu odbiornika i prądu kondensatora.



Rys.4 Przebiegi bezwymiarowych prądów i napięć modelu obwodu podczas załączania zasilania dla  $x_2=0,05$ ,  $r_2=0,05$ ,  $r_1=0,1$ ,  $u_a=0,45$ ,  $y=0,6$



Rys.5 Przebiegi bezwymiarowych prądów i napięć modelu obwodu podczas załączania zasilania dla  $x_2=0,1$ ,  $r_2=0,05$ ,  $r_1=0,1$ ,  $u_a=0,45$ ,  $y=0,6$ .

Jak wcześniej zaznaczono przepływ energii w obwodzie z rysunku 1 występuje ze źródła zasilania w kierunku obciążenia poprzez harmoniczną podstawową i po wytworzeniu wyższych harmonicznych w obciążeniu nieliniowym, następuje przepływ wyższych harmonicznych w kierunku systemu i źródła zasilania. Dla wyznaczenia tych przepływów oraz charakterystyk obwodu posłużyć się należy zapisem prądów i napięć wyróżniającym harmoniczną podstawową i wyższe harmoniczne. Przesunięcie fazowe harmonicznego prądu należy odnieść do harmonicznego napięcia zasilania.

Dla złożonego obciążenia nieliniowego w stanie ustalonym napięcie  $u(\tau)$  jest symetryczną falą prostokątną o amplitudzie  $u_a$  i pulsacji podstawowej równej 1. Napięcie to można przedstawić w postaci następującego szeregu Fouriera:

$$(11) \quad u(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{h(2n-1)} \cdot \sin((2n-1)\tau + \varphi_{u1})$$

$$\text{gdzie: } u_{h1} = \frac{4u_a}{\pi}, \quad u_{hn} = \frac{u_{h1}}{2n-1} \quad n = 2, 3, \dots, \infty$$

Amplitudę harmonicznego napięcia obciążenia oznaczono  $u_{h1}$ , zaś  $\varphi_{u1}$  oznacza przesunięcie fazowe napięcia obciążenia względem napięcia zasilania.

Prąd będący rozwiązaniem równania (9) zawiera składowe harmoniczne występujące w wymuszeniu po prawej stronie równania i można go przedstawić w postaci:

$$(12) \quad i_{1(\tau)} = \sum_{n=1}^{\infty} i_{1h(2n-1)} \cdot \sin((2n-1)\tau + \varphi_{i(2n-1)})$$

i analogicznie pochodną tego prądu względem czasu:

$$(13) \quad \frac{di_{1(\tau)}}{d\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \cdot i_{1h(2n-1)} \cdot \cos((2n-1)\tau + \varphi_{i(2n-1)})$$

Mnożąc przez siebie równania (11) i (13) a następnie uśredniając za okres  $2\pi$  uzyskuje się wyrażenie na bezwymiarową moc bierną odbiornika:

$$(14) \quad q_{od} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_{h(2n-1)} \cdot (2n-1) \cdot i_{1h(2n-1)} \cdot \sin \varphi_{(2n-1)} = u_{h1} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} i_{1h(2n-1)} \cdot \sin \varphi_{(2n-1)} = q_{h1} + q_{hh}$$

gdzie:  $\varphi_{(2n-1)} = \varphi_{u1} - \varphi_{i(2n-1)}$  dla  $n = 1, 2, \dots$ .

Moc ta jest bezwymiarowa i wiąże się z mocą odniesienia  $E_m^2/X_1$ , wynikającą z odniesienia prądów i napięć. Jeżeli przyjąć za [2], że dla elementu nieliniowego o charakterystyce jednowartościowej, proporcjonalnej do funkcji signum prądu, całkowita moc bierna jest równa zeru, to otrzymuje się relację na przesunięcie fazowe poszczególnych harmonicznych:

$$(15) \quad i_{1h1} \cdot \sin \varphi_1 = - \sum_{n=2}^{\infty} i_{1h(2n-1)} \cdot \sin \varphi_{(2n-1)}$$

W [2], [3] określono, że przesunięcie fazowe pierwszej harmonicznego prądu względem napięcia odbiornika jest ujemne tak, jak dla odbiornika indukcyjnego. Natomiast przesunięcia fazowe poszczególnych wyższych harmonicznych prądów względem napięć są dodatnie, jak źródła mocy biernej.

Bezwymiarową moc czynną uzyskuje się mnożąc (11) i (12) oraz uśredniając za okres  $2\pi$

$$(16) \quad p_{od} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_{h(2n-1)} \cdot i_{1h(2n-1)} \cdot \cos \varphi_{(2n-1)} = u_{h1} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot i_{1h(2n-1)} \cdot \cos \varphi_{(2n-1)} = p_{h1} + p_{hh}$$

W przypadku mocy czynnej odbiornika moc czynna pierwszej harmonicznego jest dodatnia jak dla odbiornika i ujemna dla wyższych harmonicznych jak dla źródła.

W wyrażeniach na moce występuje wyróżnienie mocy harmonicznego podstawowej i mocy wyższych harmonicznych. Kąt przesunięcia fazowego harmonicznego podstawowej powinien być liczony dla schematu przepływu energii od źródła do odbiornika. Aby go wyznaczyć potrzebne są elementy schematu zastępczego odbiornika nieliniowego dla harmonicznego podstawowej. Ze względu na ujemne przesunięcie fazowe prądu obciążenia względem jego napięcia schemat zastępczy zawiera rezystancję i indukcyjność, szeregowo połączone. Bezwymiarową rezystancję zastępczą odbiornika nieliniowego można wyznaczyć z zależności:

$$(17) \quad r_{odz} = R_{odz} / X_1 = p_{h1} / (i_{1h1}^2 / 2)$$

Podobnie można wyznaczyć indukcyjność zastępczą odbiornika:

$$(18) \quad l_{odz} = L_{odz} / L_1 = q_{h1} / ((di_{1h1} / d\tau)^2 / 2)$$

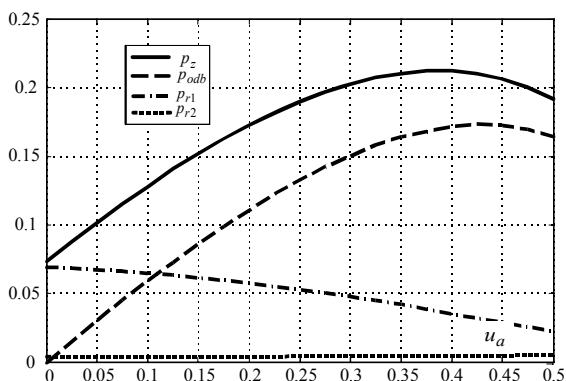
Taki schemat zastępczy obciążenia nieliniowego stosuje się w analizie obwodu dla harmonicznego podstawowych. Powyższe zależności wykorzystano do wyznaczenia elementów szeregowego schematu zastępczego. Całkowitą moc bierną i czynną wyznaczano z podstawowych definicji.

### Wyniki badań symulacyjnych, charakterystyki obwodu

Wykorzystując zależności (16) i (14) można wyznaczyć moce bierne i czynne w analizowanym obwodzie w funkcji amplitudy napięcia obciążenia  $u_a$  dla parametrów wejściowych  $x_2=0,05$ ,  $r_2=0,05$ ,  $r_1=0,15$ ,  $\gamma=0,6$ . Na rysunku 6 przedstawiono wykresy mocy czynnej pobieranej ze źródła zasilania, mocy odbiornika oraz mocy wydzielanej na rezystorach  $r_1$  i  $r_2$ .

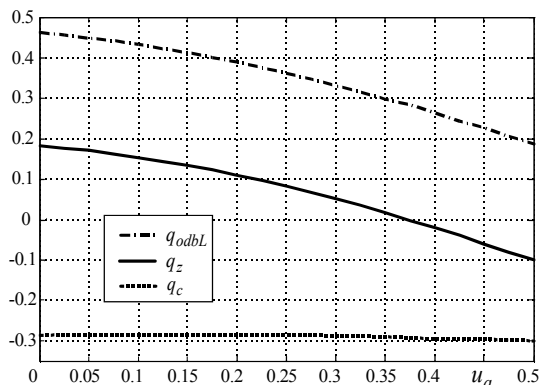
Wartość mocy na  $r_2$  jest niższa z powodu mniejszej wartości rezystancji oraz mniejszego prądu płynącego przez tę rezystancję niż przez  $r_1$ .

Warto zwrócić uwagę, że maksimum mocy czynnej odbiornika występuje dla większej wartości amplitudy napięcia odbiornika niż maksimum mocy czynnej pobieranej ze źródła zasilania. Spowodowane jest to kompensacją mocy biernej i zmniejszaniem zastępczej reaktancji obwodu, widzianej z zacisków źródła zasilania.



Rys.6 Wykresy mocy czynnej elementów obwodu w funkcji amplitudy bezwymiarowego napięcia obciążenia

Wykres mocy biernej gałęzi zawierającej odbiornik i indukcyjność  $L_1$ , kondensatora oraz „pobieranej” ze źródła zasilania przedstawiono na rysunku 7:



Rys.7 Wykresy mocy biernej gałęzi odbiornika, na zaciskach zasilania oraz kondensatora kompensującego w funkcji amplitudy bezwymiarowego napięcia obciążenia

Moc bierna kondensatora kompensacji mocy biernej jest ujemna i prawie niezależna od amplitudy napięcia odbiornika  $u_a$ . Wynika to z małej wartości rezystancji  $R_2$  i indukcyjności  $L_2$  w oczku zasilania. Natomiast moc bierna gałęzi zawierającej odbiornik nieliniowy, rezystancję  $R_1$  i indukcyjność  $L_1$  jest zależna od amplitudy napięcia

odbiornika, przy czym ta zależność jest wypadkową wpływu prądu, którego amplituda maleje wraz ze wzrostem napięcia i wpływu zastępczej indukcyjności odbiornika nieliniowego, która ze wzrostem amplitudy napięcia odbiornika wzrasta.

Kompensacja mocy biernej występuje, gdy wypadkowa moc bierna widoczna z zacisków układu zasilania jest równa zeru. Obliczenia prowadzono dla  $\gamma=0,6$ . Kompensacja mocy biernej układu zasilania występuje dla  $u_a \approx 0,37$ .

Z rysunków 7 i 8 wynika, że dla  $u_a$  odpowiadającemu maksimum mocy czynnej kompensacja mocy biernej występuje dla  $\gamma \approx 0,47$ , co na podstawie (7) odpowiada fizycznie pojemności kondensatora  $C \approx 0,47/(\omega^2 L_1)$ . Badania symulacyjne potwierdziły to oszacowanie.

### Podsumowanie

Prezentowane badania nawiązują do wyników prezentowanych w [2] dotyczących układu prądu przemiennego z obciążeniem nieliniowym i elementami  $R, L$ . Charakterystyki wyjściowe analizy są nieliniowymi funkcjami wielowymiarowych zmiennych wejściowych. Zastosowanie zmiennych bezwymiarowych zmniejszyło ilość zmiennych wejściowych.

W trakcie badań stwierdzono występowanie składowych oscylacyjnych prądów: pobieranego ze źródła zasilania oraz układu kompensacji mocy biernej. Przebieg oscylacji jest zależny od parametrów modelu układu zasilania. W wyniku kompensacji mocy biernej uzyskano zmniejszenie mocy biernej obwodu ale wystąpiło pogorszenie jakości zasilania.

Prezentowane rezultaty dotyczą obwodu jednofazowego. Na podstawie rozwiązań analitycznych prezentowanych w [4], [5] można wnioskować, że dla obwodu trójfazowego zależności będą podobne. Zmienia się zależność zastępczej indukcyjności obciążenia nieliniowego od amplitudy napięcia tego obciążenia. Ta indukcyjność jest mniejsza niż w przypadku obwodu jednofazowego. Zjawisko to obserwowane jest w obwodzie trójfazowego pieca łukowego [6].

**Autor:** prof. dr hab. inż. Mirosław Wciślik, Politechnika Poznańska, Świętokrzyska, Katedra Elektrotechniki Przemysłowej i Automatyki, Al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, 25-314 Kielce, E-mail: [m.wcislik@tu.kielce.pl](mailto:m.wcislik@tu.kielce.pl).

### LITERATURA

- [1] Emanuel A.E.; Power definitions and the physical mechanism of power flow, IEEE Press, John Wiley & Sons Ltd, 2010,
- [2] Wciślik M.; Bilanse mocy w obwodzie prądu przemiennego z odbiornikiem nieliniowym, *Przegląd Elektrotechniczny*, 90 (2014), nr 2, 5-8
- [3] Wciślik M.; Bilanse mocy w obwodzie prądu przemiennego z obciążeniem nieliniowym i kompensacją mocy biernej, Materiały konferencyjne, konf.n-t PES-9, Kościelisko, (2014), 153-156
- [4] Wciślik M.; The characteristics of the three-phase arc furnace balanced circuit with non-linear arcs, *Elektrowärme International*, 49(1991), B4, B212-B218
- [5] Wciślik M.; Elektrotechnika pieców łukowych prądu przemiennego, zagadnienia wybrane, Monografie, Studia, Rozprawy, Politechnika Świętokrzyska, M22, Kielce 2011
- [6] Köhle S. Linear Equivalent Diagram of High Current Threephase Arc Furnace, *Elektrowärme International*, 43 (1985), B1, B314-B324 (in German)