

Model matematyczny układu energetycznego składającego się z transformatora mocy, linii długiej oraz obciążenia RLC

Streszczenie. W pracy, na podstawie uogólnionej interdyscyplinarnej metody wykorzystującej modyfikację zasady Hamiltona z uwzględnieniem rozszerzenia funkcji Lagrange'a sformułowano model matematyczny układu elektroenergetycznego, który składa się z jednofazowego transformatora mocy, dwuprzewodowej linii zasilania (linia Lechera o elektrycznych parametrach rozłożonych) i obciążenia o charakterze RLC. Na podstawie sformułowanego modelu przeprowadzono obliczenia numeryczne. Wyniki symulacji komputerowych przedstawiono w postaci graficznej.

Abstract. In the paper the mathematical model of a power system is presented. The model was formulated on the basis of the generalized interdisciplinary method that uses a modification of Hamilton principle including extending function of Lagrange. The power system considered consists of single-phase power transformer, two-wire power line (Lecher's line with distributed electric parameters) and resistive-inductive-capacitive (RLC) load. The numerical calculations based on the formulated mathematical model were carried out. The results of computer simulations are presented as spatio-temporal distributions (**Mathematical model of electric power system consisting of power transformer, long power line and RLC load**).

Słowa kluczowe: zasada Hamiltona, system Eulera-Lagrange'a, dwuprzewodowa linia zasilania.

Keywords: Hamilton's rule, Euler-Lagrange's system, two-wire power line.

Wstęp

W pracy przedstawiono model matematyczny układu elektroenergetycznego zawierającego ze strony zasilania – transformator mocy, a ze strony obciążenia – aktywno-indukcyjno-pojemnościowe obciążenie połączony linią przesyłową [3].

Transformator mocy jest jednym z głównych elementów układów elektroenergetycznych. Procesy przemiany energii w tych urządzeniach zależą od parametrów konstrukcyjnych transformatora oraz, co jest bardzo ważne, stanu linii zasilania. Dla odbiorców energii bardzo ważnym jest zabezpieczenie nie tylko odpowiedniej mocy transformatora, ale i odpowiedniej jakości energii elektrycznej, w tym symetrii napięcia zasilania. W przypadku ogólnym, istnieje potrzeba nie tylko dokładnego zamodelowania transformatora mocy ale również jego obciążenia i linii przekazującej energię. Dla uzyskania dużej adekwatności modelu matematycznego należy procesy fizyczne zachodzące w linii przesyłowej opisać równaniami o parametrach rozłożonych. Takie modele są bardzo skomplikowane i wymagają całkowania równań o pochodnych cząstkowych. Do uzyskania modelu matematycznego układu elektroenergetycznego składającego się z transformatora mocy oraz linii zasilania wykorzystano rozszerzony funkcjonal działania wg Hamiltona, który sformułowano wykorzystując niekonserwatywny lagrangian [1, 2, 5].

Model matematyczny układu

Zmodyfikowana funkcja Lagrange'a opisana jest następującą zależnością [1, 2]:

$$(1) \quad L^* = \tilde{T}^* - P^* + \Phi^* - D^*,$$

gdzie: L^* – zmodyfikowana funkcja Lagrange'a, \tilde{T}^* – energia (koenergia) kinetyczna, P^* – energia potencjalna, Φ^* – energia uogólnionych sił dyssypacyjnych, D^* – energia stronnych sił o charakterze niepotencjalnym.

W rozważanym przypadku układu elektroenergetycznego linia przesyłowa rozpatrywana jest jako układ o parametrach rozłożonych [3, 6]. W takim przypadku elementy zmodyfikowanego lagrangianu rozpatruje się nie jako funkcje energetyczne (1), lecz jako odpowiadające im gęstości (liniowe). Funkcjonał działania wg Hamiltona-Ostogradskiego przybiera następującą postać [1]:

$$(2) \quad S = \int_{t_1}^{t_2} \left(L^* + \int_l L_l dl \right) dt, \quad I = \int_l L_l dl,$$

gdzie: S – funkcjonal działania wg Hamiltona-Ostogradskiego, L_l – gęstość zmodyfikowanej funkcji Lagrange'a, I – funkcjonal energetyczny.

Składniki zmodyfikowanej funkcji Lagrange'a [2], uwzględniając, że wszystkie parametry i zależności funkcyjne pierwotnego uzwojenia transformatora (autotransformatora) mocy zostały sprowadzone do uzwojenia wtórnego (punkt zasilania linii) opisane są zależnościami:

$$(3) \quad T^* = \int_0^{i_{T1}} \Psi_{T1} di_{T1} + \int_0^{i_{T2}} \Psi_{T2} di_{T2} + \int_0^{i_L} \Psi_L di_L, \quad P^* = \frac{Q_C^2}{2C} = \frac{Cu_H^2}{2},$$

$$(4) \quad \Phi^* = \frac{1}{2} \int_0^l (r_{T1} i_{T1}^2 + r_{T2} i_{T2}^2 + R_L i_L^2) d\tau,$$

$$(5) \quad D^* = \frac{1}{2} \int_0^l (u_{T1} i_{T1} + u_{T2} i_{T2} - u_H i_H) d\tau, \quad u_1 \equiv u(x, t)|_{x=0} = -u_{T2},$$

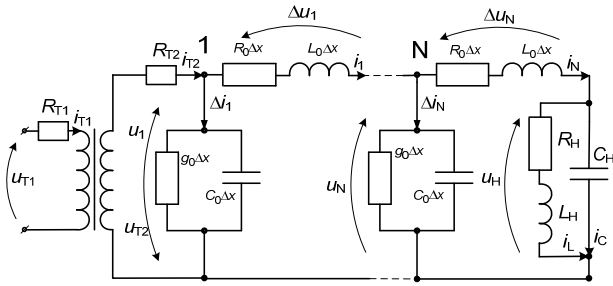
$$(6) \quad \frac{\partial T^*}{\partial x} \equiv T_l = \frac{L_0 i^2}{2}, \quad \frac{\partial P^*}{\partial x} \equiv P_l = \frac{1}{2C_0} Q_x^2, \quad Q_x \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad Q_t \equiv \frac{\partial Q}{\partial t} = i,$$

$$(7) \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \equiv \Phi_l = \Phi_{l3} - \Phi_{lB} = \int_0^l \left(\frac{R_0}{2} Q_t^2 - \frac{g_0}{2C_0^2} Q_x^2 \right) d\tau,$$

gdzie: $i(x, t)$ – prąd w linii, R_0, g_0, C_0, L_0 – parametry linii, Φ_{R3} – zewnętrzna dyssypacja energii, Φ_{RB} – wewnętrzna, $Q(x, t)$ – ładunek linii.

Na rysunku 1 przedstawiono schemat obliczeniowy rozpatrzonego układu elektroenergetycznego.

W równaniu (7) funkcja wewnętrznej dyssypacji zależy od prądów upływu, które płyną przewodami linii. Linia zasilania podczas przekazywania energii od źródła do konsumenta straci energię rozproszoną w przestrzeni.



Rys. 1. Schemat układu elektroenergetycznego obciążonej linii Lechera

Formułując na podstawie wyrażenia (2) rozszerzony funkcjonal dziania wg Hamiltona-Ostrogradskiego, z uwzględnieniem elementów funkcji Lagrange'a (3) – (7), uzyskano wariację wymienionego funkcjonału. Przyrównując otrzymaną zależność do zera otrzymano następujące równania [1]:

$$(8) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = (C_0 L_0)^{-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (g_0 L_0 + C_0 R_0) v - g_0 R_0 u \right), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v,$$

$$(9) \quad \frac{d\Psi_{T1}}{dt} = u_{T1} - r_{T1} i_{T1}, \quad \frac{d\Psi_{T2}}{dt} = u_{T2} - r_{T2} i_{T2},$$

$$(10) \quad \frac{d\Psi_L}{dt} = u_H - r_L i_L, \quad \frac{du_H}{dt} = \frac{i_C}{C}.$$

Najważniejszym problemem rozwiązywania równania (8) jest wyznaczenia warunków początkowych $v(x, t)|_{t=0}$ oraz umów brzegowych $u(x, t)|_{x=0}$ i $u(x, t)|_{x=l}$. Co do pierwszych, to problem nie jest skomplikowany. Można je wyznaczyć z poprzednich badań (do komutacji). Napięcia na początku linii $u(x, t)|_{x=0}$ i na jej końcu $u(x, t)|_{x=l}$ są niewiadome.

Równania powiązań między elementami linii, wychodząc z drugiego prawa Kirchhoffa dla obwodów elektrycznych o parametrach rozłożonych, można zapisać w następujący sposób:

$$(11) \quad -\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = R_0 i(x, t) + L_0 \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}.$$

Dalej, dyskretyzujemy za metodą prostych równania (8) oraz (11)

$$(12) \quad \frac{dv_j}{dt} = (C_0 L_0)^{-1} \left(\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{(\Delta x)^2} - (g_0 L_0 + C_0 R_0) v_j - g_0 R_0 u_j \right), \quad \frac{du_j}{dt} = v_j,$$

$$(13) \quad -\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = R_0 i_j + L_0 \frac{di_j}{dt}, \quad j = 2, \dots, N-1.$$

Wykorzystując teorię przekształcania współrzędnych zamieniono równania zależności strumienia (9), (10) na równania prądowe [1, 5]. Po dokonaniu przekształceń matematycznych przybierają one postać przedstawionych poniżej zależności:

$$(14) \quad \frac{di_{T1}}{dt} = A_{11}(u_{T1} - r_{T1} i_{T1}) + A_{12}(-u_1 - r_{T2} i_{T2}),$$

$$(15) \quad \frac{di_{T2}}{dt} = A_{21}(u_{T1} - r_{T1} i_{T1}) + A_{22}(-u_1 - r_{T2} i_{T2}),$$

$$(16) \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} (u_H - R_H i_L),$$

gdzie: A_{jj} – współczynniki, zależne od odwrotnych indukcyjności transformatora mocy. Na podstawie [1] opisują je następujące zależności:

$$(17) \quad A_{11} = \frac{\alpha_{\sigma 1}(\alpha_{\sigma 2} + \rho)}{\alpha_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2} + \rho}, \quad A_{12} = A_{21} = -\frac{\alpha_{\sigma 1} \alpha_{\sigma 2}}{\alpha_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2} + \rho},$$

$$(18) \quad A_{22} = \frac{\alpha_{\sigma 2}(\alpha_{\sigma 1} + \rho)}{\alpha_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2} + \rho}, \quad \rho = \frac{\partial i_m}{\partial \Psi_m}, \quad i_m = i_{T1} + i_{T2}.$$

Zapisując równania (12), (13) dla 1-go oraz N -go węzła dyskretyzacji przybierają one postać:

$$(19) \quad \frac{dv_k}{dt} = \frac{1}{C_0 L_0} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} (u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}) - (g_0 L_0 + C_0 R_0) v_k - g_0 R_0 u_k \right], \quad \frac{du_k}{dt} = v_k,$$

$$(20) \quad -\frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2\Delta x} = R_0 i_k + L_0 \frac{di_k}{dt}, \quad k = 1, N,$$

gdzie: u_0, u_{N+1} – wirtualne napięcia w fikcyjnych węzłach dyskretyzacji [1].

Rozpatrujemy pierwszy i ostatni węzeł kolejno. I.) dla $k = 1$.

Na podstawie schematu z rysunku 1 można zapisać:

$$(21) \quad i_1 = i_{T2} - \Delta i_1, \quad \Delta i_1 = \Delta i_{1g} + \Delta i_{1c},$$

gdzie:

$$(22) \quad \Delta i_{1g} = \Delta x g_0 u_1, \quad \Delta i_{1c} = \Delta x C_0 \frac{du_1}{dt} = \Delta x C_0 v_1.$$

Z zależności (20) dla przyjętego k otrzymano:

$$(23) \quad \frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_0} \left(\frac{u_0 - u_2}{2\Delta x} - R_0 i_1 \right).$$

Różniczkując po czasie równania powiązań (21) z uwzględnieniem (15), (19), (22), (23) otrzymano:

$$(24) \quad \frac{di_1}{dt} = \frac{di_{T2}}{dt} - \frac{d\Delta i_{1g}}{dt} - \frac{d\Delta i_{1c}}{dt} = A_{21}(u_{T1} - r_{T1} i_{T1}) + A_{22}(-u_1 - r_{T2} i_{T2}) - \Delta x g_0 v_1 - \frac{\Delta x}{L_0} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} (u_0 - 2u_1 + u_2) - (g_0 L_0 + C_0 R_0) v_1 - g_0 R_0 u_1 \right] = \frac{1}{L_0} \left(\frac{u_0 - u_2}{2\Delta x} - R_0 i_1 \right).$$

Przyrównując uzyskane powyżej równania, otrzymano ostatecznie wyrażenie opisujące napięcie w pierwszym fikcyjnym węźle dyskretyzacji:

$$(25) \quad u_0 = \frac{2\Delta x L_0}{3} \left\{ A_{21}(u_{T1} - r_{T1} i_{T1}) + A_{22}(-u_1 - r_{T2} i_{T2}) - \Delta x g_0 v_1 - \frac{\Delta x}{L_0} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} (-2u_1 + u_2) - (g_0 L_0 + C_0 R_0) v_1 - g_0 R_0 u_1 \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{L_0} \left(\frac{u_2}{2\Delta x} + R_0 i_1 \right) \Bigg\}.$$

Podstawiając zależność (25) do zależności (19), przy $k=1$, otrzymano:

$$(26) \quad \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{C_0 L_0} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} (u_0 - 2u_1 + u_2) - (g_0 L_0 + C_0 R_0) v_1 - g_0 R_0 u_1 \right], \quad \frac{du_1}{dt} = v_1,$$

gdzie u_0 znajdujemy z równania (25).

II.) dla ostatniego węzła dyskretyzacji $k=N$ postępowano w podobny sposób jak dla $k=1$.

Na podstawie schematu z rysunku 1 można zapisać:

$$(27) \quad L_0 \frac{di_N}{dt} = \frac{u_N - u_H}{\Delta x} - R_0 i_N.$$

Z zależności (20) po podstawieniu $k=N$ i dokonaniu prostych przekształceń matematycznych otrzymano:

$$(28) \quad L_0 \frac{di_N}{dt} = \frac{u_{N-1} - u_{N+1}}{2\Delta x} - R_0 i_N.$$

Przyrównując stronami otrzymane powyżej równania otrzymano wyrażenie dla uzyskania napięcia w końcowym fikcyjnym węźle dyskretyzacji:

$$(29) \quad u_{N+1} = u_{N-1} - 2(u_N - u_H).$$

Podstawiając zależność (29) do (19), otrzymano ostatecznie

$$(30) \quad \frac{dv_N}{dt} = \frac{1}{C_0 L_0} \left[\frac{2}{(\Delta x)^2} (u_{N-1} - 2u_N + u_H) - (g_0 L_0 + C_0 R_0) v_N - g_0 R_0 u_N \right], \quad \frac{du_N}{dt} = v_N.$$

Następnie postaje problem: obliczenia w równaniu (30) napięcia na gałęzi obciążenia (u_H). Na podstawie schematu z rysunku 1 można zapisać następujące zależności:

$$(31) \quad u_N = \Delta u_N + u_i, \quad i_N = i_L + i_C.$$

Skąd uwzględniając dodatkowo drugie wyrażenie w (10), (28), (31) otrzymano równanie:

$$(32) \quad \frac{di_N}{dt} = \frac{u_N - u_H}{\Delta x L_0} - \frac{R_0}{L_0} i_N, \quad \frac{du_H}{dt} = \frac{i_N - i_L}{C}.$$

Prąd w elementach linii wyznaczono dyskretyzując (11) w następujący sposób:

$$(33) \quad -\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} = R_0 i_j + L_0 \frac{di_j}{dt}.$$

Przekształcając powyższe równanie otrzymano końcową zależność na prąd:

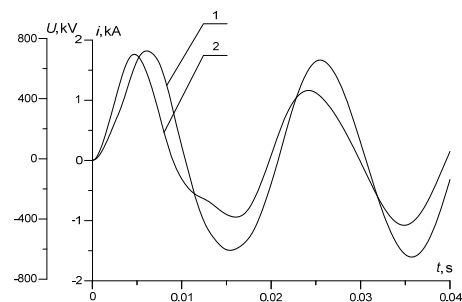
$$(34) \quad \frac{di_j}{dt} = \frac{1}{L_0 \Delta x} (u_j - u_{j+1}) - \frac{R_0}{L_0} i_j, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Wspólnemu całkowaniu podlega układ równań różniczkowych: (12), (14) – (16), (26), (30), (32), (34) z uwzględnieniem zależności: (17), (18) oraz (25).

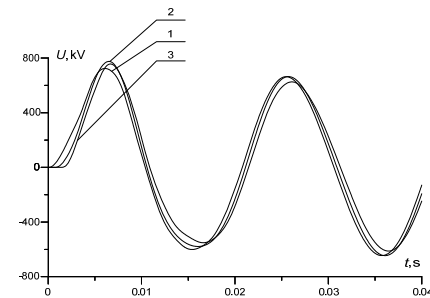
Wyniki symulacji komputerowej

Parametry elementów układu elektroenergetycznego z rysunku 1 są następujące: transformator o parametrach znamionowych $u_k = 14\%$, $\Delta P_Z = 2300$ kW, $\Delta P_0 = 750$ kW, $i_0 = 0.75\%$, $\Delta Q_0 = 5375$ kVA, autotransformator podwyższający napięcie, o parametrach znamionowych $u_k = 10\%$, $\Delta P_Z = 580$ kW, $\Delta P_0 = 250$ kW, $i_0 = 0.35\%$, $\Delta Q_0 = 3497$ kVA, linia: $L = 476$ km. $R_0 = 1.9 \cdot 10^{-5} \Omega/\text{km}$, $L_0^{(1)} = 9.24 \cdot 10^{-7} \text{H}/\text{km}$, $C_0^{(1)} = 1.32 \cdot 10^{-11} \text{F}/\text{km}$, $g_0^{(1)} = 3.25 \cdot 10^{-11} \text{Sm}/\text{km}$. Dodatkowo parametry obciążenia przyjęto na poziomie: $R_H = 400 \Omega$, $x_H = 250 \Omega$.

Dyskretyzowania równań różniczkowych linii przeprowadzono przy pomocy metody prostej z kolejnym całkowaniem w strefie czasowej. Liczba węzłów dyskretyzacji równania przyjęto 20. Całkowanie równań stanu układu prowadzono z wykorzystaniem niejawniej metody Eulera (z wykorzystaniem metody prostej iteracji).

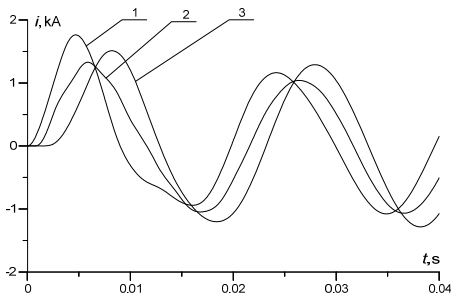


Rys. 2. Przebiegi czasowe napięcia zasilania linii (1) oraz prądu (2) w uzwojeniu wtórnym autotransformatora



Rys. 3. Przebiegi czasowe napięcia w pierwszym (1), dziesiątym (2) oraz dwudziątym (3) węzłach dyskretyzacji linii

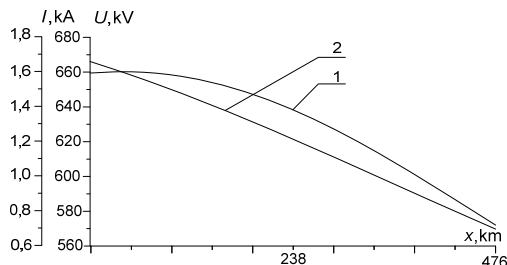
Na rysunku 2 przedstawiono przebiegi czasowe napięcia zasilania linii (1) oraz prądu (2) w uzwojeniu wtórnym autotransformatora. Analizując przedstawione przebiegi można zauważyć wpływ falowych procesów w linii, które działają na prace autotransformatora. Wyraźnie zauważalne jest to w przebiegu funkcji prądu. W pierwszym okresie oscylacji zachodzi generacja dodatkowych harmonicznych co powoduje wyraźne odkształcenie przebiegu.



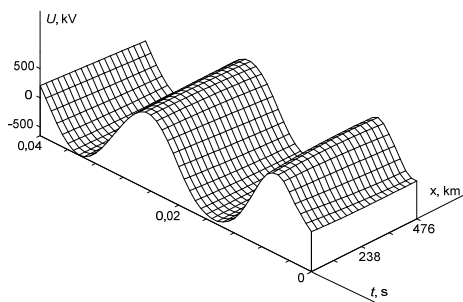
Rys. 4. Przebieg czasowy prądu w pierwszym (1), dziesiątym (2) oraz dwudziestym (3) węzle dyskretyzacji linii

Na rysunkach 3 i 4 przedstawiono przebiegi czasowe napięcia oraz prądu w pierwszym (początek), dziesiątym (środek) i dwudziestym (koniec) węzłach dyskretyzacji równania linii Lechera. Co do przebiegów pokazanych na tych rysunkach, to można zauważyć następujące fakty:

1. Maksymalne napięcie obserwuje się w środku linii, a minimalne – na jej początku. Ponieważ linia zachowuje się jako obciążenie o charakterze pojemnościowym dla układu transformatora elektroenergetycznego, a przyjęte do obliczeń symulacyjnych obciążenie na końcu linii czynno-indukcyjne, to oczywiście linia pracuje jako generator mocy biernej. W takim przypadku ważną rolę odgrywają procesy rezonansowe w linii.
2. Ponieważ rozpatrywane funkcje zależą od przestrzennej współrzędnej, to zmienia się ich faza na początku i końcu linii (dodatkowo rysunki 6 i 7).
3. Jeżeli rozpatrywać procesy przejściowe w linii w zakresie czasowym $t \in [0; 0,003]$ to na początku linii napięcie i prąd mają wartości nie równe zero, natomiast bliżej końca linii te wartości są równe zero. Przyczyną tego jest wpływ procesów falowych zachodzących w układzie.



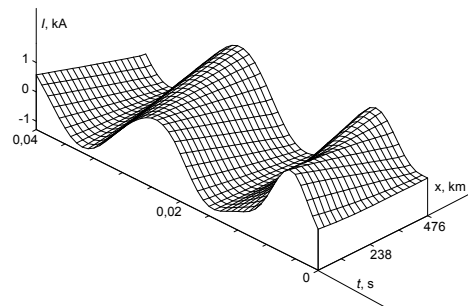
Rys. 5. Przestrenny rozkład funkcji napięcia (1) i prądu (2) w chwili czasu $t = 0,005$ s



Rys. 6. Czasowo-przestrzenny rozkład funkcji napięcia w przedziale czasowym $t \in [0; 0,04]$ s

Na rysunku 5 przedstawiono przestrzenny rozkład funkcji napięcia oraz prądu w chwili czasu $t = 0,005$ s. Widać tutaj znaczenie rozpatrywanych zależności funkcyjnych wzdłuż całej linii zasilania. Do przeprowadzenia analizy procesów elektromagnetycznych przedstawionych na rysunku 5

należy uwzględnić przebiegi z rysunków 3 i 4 w chwili $t = 0,005$ s.



Rys. 7. Czasowo-przestrzenny rozkład funkcji prądu w przedziale czasowym $t \in [0; 0,04]$ s

Na rysunkach 6 i 7 przedstawiono czasowo-przestrzenny rozkład napięcia oraz prądu w przedziale czasowym $t \in [0; 0,04]$ s. Przedstawienie rozkładu przestrzenno czasowego wielkości funkcyjnych układu daje najwięcej informacji. Opisane na rysunkach wcześniejszych procesy fizyczne widoczne są tutaj w pełni.

Wnioski

Wykorzystanie rozszerzonej zasady Hamiltona pozwala istotnie rozszerzyć możliwości modelowania matematycznego, zwłaszcza w stosunku do skomplikowanych układów dynamicznych o parametrach rozłożonych. Na podstawie wyników symulacji komputerowej można wyciągnąć szereg wniosków dotyczących pracy analizowanego układu. Procesy falowe w linii istotnie wpływają na pracę całego układu elektroenergetycznego co widać na przedstawionych rozkładach przestrzenno-czasowych wielkości funkcyjnych.

Autorzy: dr hab. inż. Andriy Czaban prof. PCz, Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, al. Armii Krajowej 17, e-mail: atchaban@gmail.com, dr. hab. inż. Marek Lis prof. PCz., Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, al. Armii Krajowej 17, e-mail: lism@el.pcz.czest.pl, mgr inż. Karol Klatow Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny al. Armii Krajowej 17, e-mail: karolklatow@gmail.com, mgr inż. Marek Patro Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny al. Armii Krajowej 17, mgr inż. Andrzej Gastołek Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny al. Armii Krajowej 17

LITERATURA

- [1] Czaban A. Zasada Hamiltona-Ostrogradskiego w układach elektromechanicznych. – Lwów: *W-wo T. Soroki* 2015
- [2] Lis M. Modelowanie matematyczne procesów niustalonych w elektrycznych układach napędowych o złożonej transmisji ruchu. Częstochowa. – *W-wo Politechniki Częstochowskiej*, 2013
- [3] A. Rusek Stany dynamiczne układów napędowych z silnikami indukcyjnymi specjalnego wykorzystania. Monografia. *W-wo Politechniki Częstochowskiej*, Częstochowa, 2012.
- [4] Simoni K. Theoretische elektrotechnik. – Berlin, 1956
- [5] White D.C., Woodson H.H. Electromagnetic Energy Conversion, New-York, *John Wiley & Sons, Inc*, 1958
- [6] Czaban A., Rusek A., Lis M., Popenda A., Lis T.: Mathematical Modeling of Induction Generator Electrical Circuits using Hamilton's Formalism Proceedings of the 8th International Scientific Symposium on Electrical Power Engineering ELEKTROENERGETIKA 2015 September 16–18, 2015, Stará Lesná, Slovak Republic, 435-438