

## Obliczanie mocy biernej w modelach matematycznych maszyn elektrycznych prądu przemiennego

**Streszczenie.** W pracy wykazano, że wartości mocy biernej, obliczone na podstawie składowych wektorów przestrzennych napięcia i prądu zgodnie ze znaną formułą, mogą być ujemne, pomimo że napięcie wyprzedza w fazie prąd. Dotyczy to układów wielofazowych, w tym trójfazowych maszyn prądu przemiennego, w których nastąpiła zmiana kolejności faz. Zaproponowano skorygowaną formułę obliczania mocy biernej układu wielofazowego dla przypadku przeciwnej kolejności faz oraz podano interpretację matematyczną.

**Abstract.** In the paper it is shown, that values of reactive power, calculated on the basis of components of voltage and current space vectors in accordance with the well-known formula, may be negative, even though the current is lagging relative to the voltage. This concerns multi-phase systems, incl. three-phase electric machines of alternating current, in which a phase sequence has been reversed. The corrected formula for calculation of reactive power of multi-phase system for the case of reverse phase sequence is suggested and the mathematical interpretation is added. (**Calculation of reactive power in mathematical models of alternating current electrical machines.**)

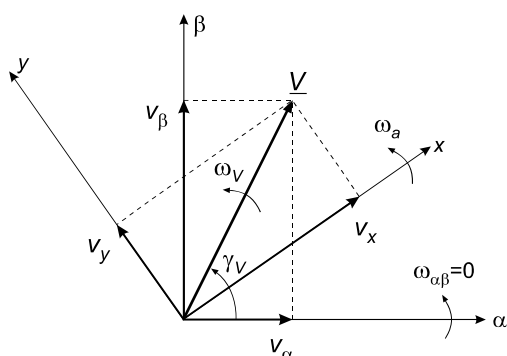
**Słowa kluczowe:** moc czynna, bierna i pozorna, układy wielofazowe, maszyny elektryczne, modelowanie matematyczne.

**Keywords:** active, reactive and apparent power, multi-phase systems, electrical machines, mathematical modelling.

### Wprowadzenie

Prawidłowe oszacowanie mocy czynnej i biernej jest istotne do celów analizy i syntezy układów sterowania maszyn elektrycznych prądu przemiennego. Dotyczy to w szczególności układów sterowania pracą prądnicową maszyny dwustronnie zasilanej [1,2,3]. Może być również niezbędne w przypadku diagnostyki maszyn elektrycznych [4], poprawy współczynnika mocy napędów przekształtnikowych itp.

Do opisu matematycznego maszyn elektrycznych, jak również rozbudowanych systemów elektromechanicznych stosuje się, w zależności od potrzeb, modele obwodowe, modele polowe oraz modele polowo-obwodowe. Modele obwodowe stanowią podstawę opisu matematycznego układów napędowych, w tym zautomatyzowanych układów przekształtnikowych wykorzystywanych w licznych procesach technologicznych. W przypadku modelowania obwodowego zazwyczaj wykorzystuje się równania zapisane z zastosowaniem wektorów przestrzennych, które tworzą wektorową postać obwodowego modelu matematycznego. Postać wektorową obwodowego modelu matematycznego uzyskuje się po zastosowaniu definicji wektora przestrzennego do równań bilansu napięć obwodów stojana i wirnika trójfazowej (wielofazowej) maszyny elektrycznej prądu przemiennego. W wyniku tej transformacji otrzymuje się równania napięciowe zawierające zmienne wektorowe reprezentowane na płaszczyźnie zmiennych zespolonych, które przez rozpisanie dla obu składowych można sprowadzić do układu współrzędnych prostokątnych [5].



Rys. 1. Składowe wektora przestrzennego  $\underline{V}$  w różnych układach współrzędnych prostokątnych

W zależności od układu odniesienia wektory przestrzenne są zdefiniowane za pomocą długości i kąta położenia lub za pomocą składowych prostokątnych, przy czym ten sam wektor odniesiony do różnych układów współrzędnych będzie posiadał inne składowe (rys. 1).

Składowe wektora przestrzennego  $\underline{V}$  w nieruchomym układzie współrzędnych  $\alpha\text{-}\beta$  można wyrazić następująco:

$$(1) \quad \begin{aligned} v_\alpha &= V \cos \gamma_V \\ v_\beta &= V \sin \gamma_V \\ \gamma_V &= \int_0^t \omega_V d\tau + \gamma_V(0) \end{aligned}$$

gdzie:  $\gamma_V$  – kąt położenia wektora  $\underline{V}$  względem układu nieruchomego,  $t$  – czas. Z kolei kąt położenia wektora  $\underline{V}$  względem układu  $x\text{-}y$  wirującego z dowolną prędkością  $\omega_a$  względem układu nieruchomego  $\alpha\text{-}\beta$  wyraża się zależnością:

$$(2) \quad \int_0^t (\omega_V - \omega_a) d\tau = \int_0^t \omega_V d\tau - \int_0^t \omega_a d\tau = \gamma_V - \gamma_a$$

a zatem współrzędne wektora  $\underline{V}$  w układzie  $x\text{-}y$  są następujące:

$$(3) \quad \begin{aligned} v_x &= V \cos(\gamma_V - \gamma_a) = V \cos \gamma_V \cos \gamma_a + V \sin \gamma_V \sin \gamma_a \\ v_y &= V \sin(\gamma_V - \gamma_a) = V \sin \gamma_V \cos \gamma_a - V \cos \gamma_V \sin \gamma_a \end{aligned}$$

Zależności (3) można przedstawić w postaci macierzowej:

$$(4) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \gamma_a & \sin \gamma_a \\ -\sin \gamma_a & \cos \gamma_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \cos \gamma_V \\ V \sin \gamma_V \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \gamma_a & \sin \gamma_a \\ -\sin \gamma_a & \cos \gamma_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

z której wynika, iż możliwa jest transformacja wektora  $\underline{V}$  z jednego układu współrzędnych do drugiego w rezultacie pomnożenia wektora przez macierz przekształcenia:

$$(5) \quad \mathbf{P}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

W celu odwrotnej transformacji wektora, na przykład z układu  $x$ - $y$  do układu  $\alpha$ - $\beta$ , należy wektor  $[v_x, v_y]^T$  pomnożyć przez macierz odwrotną, to jest:

$$(6) \quad \mathbf{P}^{-1}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

stąd:

$$(7) \quad \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1}(\gamma) \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

Moc czynną i bierną układu wielofazowego, sprowadzonego do układu współrzędnych prostokątnych, określa się jako składowe mocy pozornej na podstawie składowych wektorów przestrzennych napięcia  $u_x, u_y$  i prądu  $i_x, i_y$  w następujący sposób:

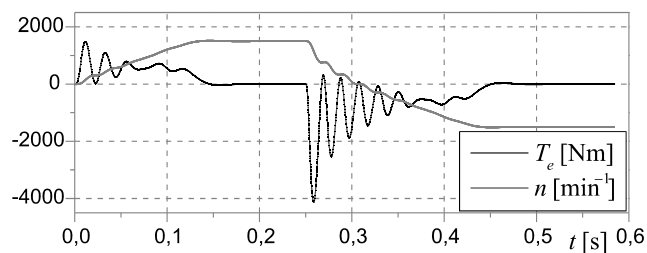
$$(8) \quad \underline{s} = \underline{u} \underline{i}^* = (u_x i_x + u_y i_y) + j(u_y i_x - u_x i_y) = p + jq$$

przy czym składowe wektorów przestrzennych mogą być reprezentowane w dowolnym układzie współrzędnych prostokątnych  $x$ - $y$ , wirującym lub nieruchomym ( $\alpha$ - $\beta$ ). Z powyższej zależności otrzymuje się zależności określające moc czynną (9) i bierną (10):

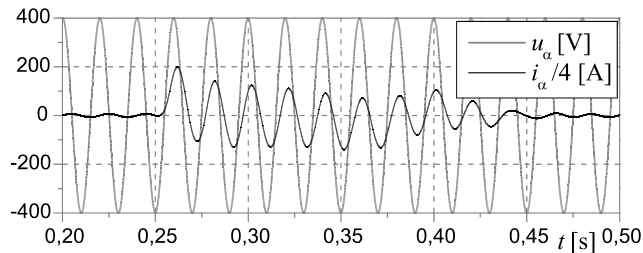
$$(9) \quad p = u_x i_x + u_y i_y$$

$$(10) \quad q = u_y i_x - u_x i_y$$

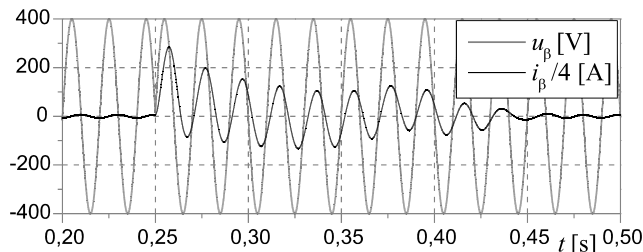
Zgodnie z przyjętą definicją mocy biernej, jej wartości powinny być dodatnie, jeśli napięcie wyprzedza w fazie prąd. W przeciwnym przypadku wartości mocy biernej powinny być ujemne. Zdarza się jednak, że wartości mocy biernej obliczone zgodnie z (10) są ujemne, pomimo że napięcie wyprzedza w fazie prąd. Dotyczy to układów wielofazowych, w których nastąpiła zmiana kolejności faz. W przypadku trójfazowych maszyn prądu przemiennego sytuacja taka ma miejsce po zmianie kierunku wirowania pola magnetycznego w silnikach indukcyjnych i synchronicznych oraz przy pracy maszyny dwustronnie zasilanej z prędkością nadsynchroniczną [6]. Ilustrują to przebiegi przedstawione na rysunkach 2 do 11, na których pokazano wyniki symulacji rozruchu i nawrotu nieobciążonego silnika indukcyjnego, włączonego bezpośrednio do sieci zasilającej, oraz obciążonego silnika synchronicznego wzbudzanego magnesami trwałymi, sterowanego z wykorzystaniem strategii przedstawionej w [7].



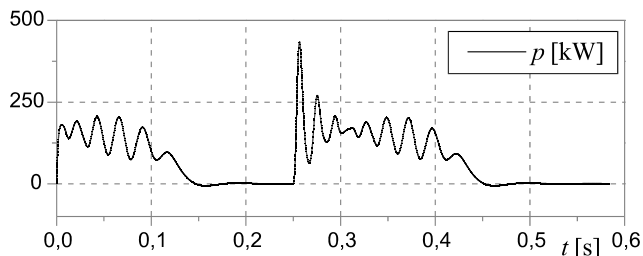
Rys. 2. Przebiegi momentu elektromagnetycznego  $T_e$  i prędkości obrotowej wirnika  $n$  silnika indukcyjnego



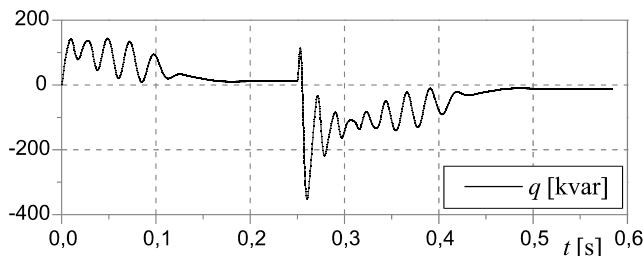
Rys. 3. Przebiegi składowych w osi  $\alpha$  wektorów przestrzennych napięcia i prądu silnika indukcyjnego



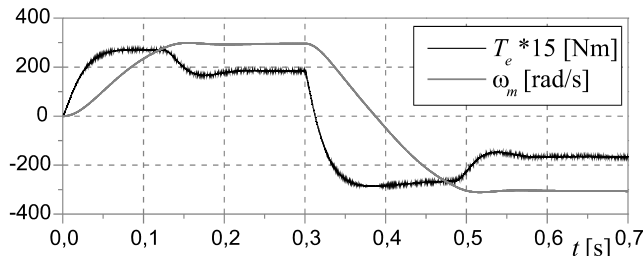
Rys. 4. Przebiegi składowych w osi  $\beta$  wektorów przestrzennych napięcia i prądu silnika indukcyjnego



Rys. 5. Przebieg mocy czynnej silnika indukcyjnego



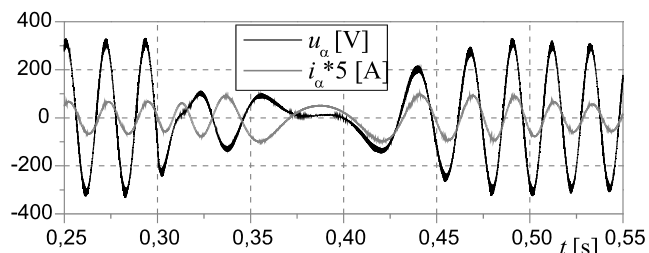
Rys. 6. Przebieg mocy biernej silnika indukcyjnego, obliczonej według zależności (10)



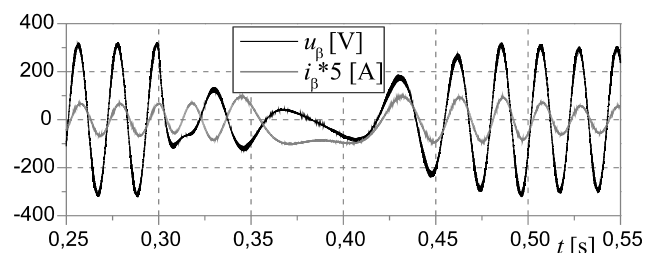
Rys. 7. Przebiegi momentu elektromagnetycznego  $T_e$  i prędkości kątowej wirnika  $\omega$  silnika synchronicznego wzbudzanego magnesami trwałymi

W badaniach modelowo-symulacyjnych uwzględniono następujące dane silnika indukcyjnego klatkowego głębokożłobkowego w wykonaniu rurowym [5]: 55 kW, 400 V, 108 A, 1420  $\text{min}^{-1}$ , 50 Hz, 0,49  $\text{kgm}^2$  oraz dane silnika

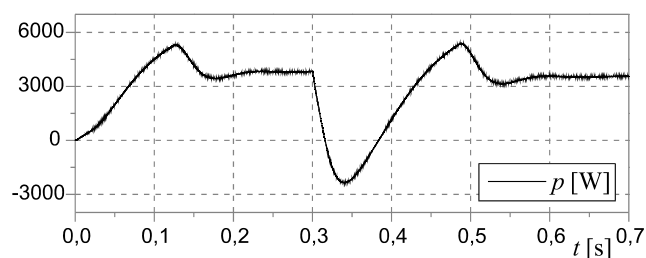
synchronicznego wzbudzanego magnesami trwałymi: 4 kW, 400 V, 7,5 A, 3000 min<sup>-1</sup>, 50 Hz, 0,005 kgm<sup>2</sup>.



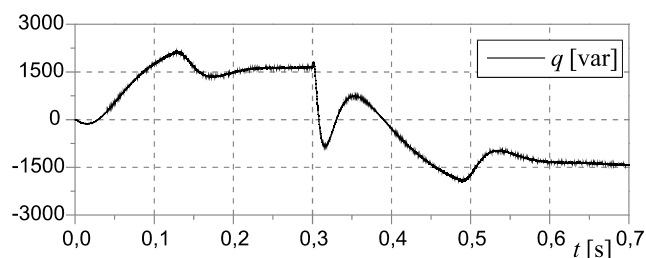
Rys. 8. Przebiegi składowych w osi α wektorów przestrzennych odfiltrowanego napięcia i prądu silnika synchronicznego wzbudzanego magnesami trwałymi



Rys. 9. Przebiegi składowych w osi β wektorów przestrzennych odfiltrowanego napięcia i prądu silnika synchronicznego wzbudzanego magnesami trwałymi



Rys. 10. Przebieg odfiltrowanej mocy czynnej silnika synchronicznego wzbudzanego magnesami trwałymi



Rys. 11. Przebieg odfiltrowanej mocy bierniej silnika synchronicznego wzbudzanego magnesami trwałymi, obliczonej według zależności (10)

Zgodnie z wynikami symulacji, zaprezentowanymi na rysunkach 2 do 6, po zmianie kolejności faz napięcia zasilającego, inicjującej pracę nawrotną silnika indukcyjnego, moc bierna ma wartości ujemne, także po osiągnięciu przez wirnik ustalonej prędkości, pomimo że napięcie wyprzedza prąd zarówno przed zmianą, jak i po zmianie kolejności faz. Podobnie w przypadku silnika synchronicznego wzbudzanego magnesami trwałymi: zmiana kierunku wirowania pola magnetycznego skutkuje pojawieniem się ujemnych wartości mocy bierniej, pomimo że napięcie wyprzedza w fazie prąd (rys. 7 do 11).

### Korekta formuły obliczania mocy bierniej

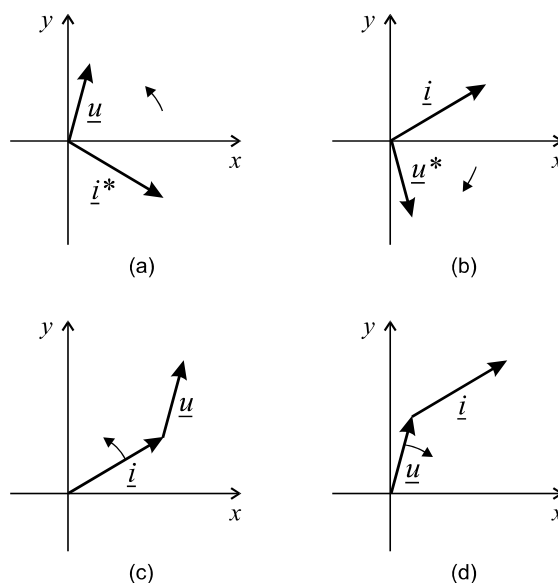
Z wcześniejszych rozważań wynika, że moc bierna powinna być dodatnia jeśli napięcie wyprzedza prąd, niezależnie od kolejności faz. Z tego powodu zależność (10) powinna być stosowana przy zgodnej kolejności faz, natomiast przy przeciwnej kolejności faz należy stosować zależność skorygowaną:

$$(11) \quad q = u_x i_y - u_y i_x$$

która odpowiada skorygowanej definicji mocy pozornej:

$$(12) \quad \underline{s} = \underline{u}^* \underline{i}$$

Oba przypadki są zilustrowane za pomocą wykresów fazorowych (a) i (b), pokazanych na rysunku 12. Na wykresach tych zaznaczono kierunek wirowania wektorów przestrzennych napięcia i prądu: przeciwny do ruchu wskazówek zegara przy zgodnej kolejności faz oraz zgodny z ruchem wskazówek zegara przy odwrotnej kolejności faz.



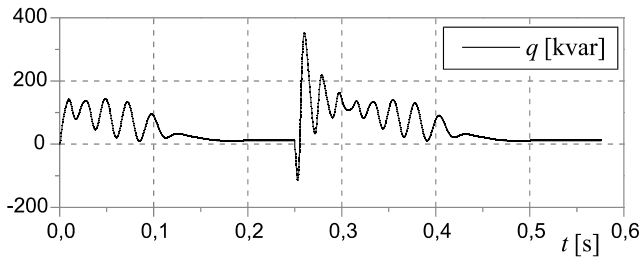
Rys. 12. Związki między wektorami przestrzennymi napięcia i prądu w układach wielofazowych

Przez analogię do rachunku wektorowego można również napisać, odpowiednio, dla zgodnej (rys. 12c) oraz przeciwnej (rys. 12d) kolejności faz:

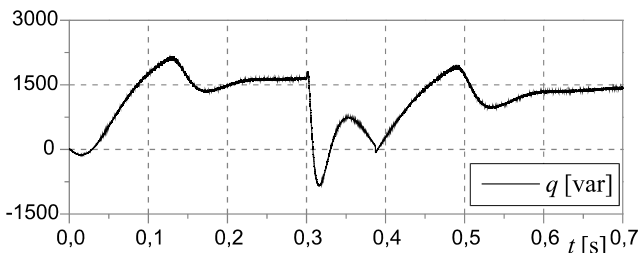
$$(13) \quad jq = \begin{vmatrix} 1 & j & j \\ i_x & i_y & 0 \\ u_x & u_y & 0 \end{vmatrix} = j(u_y i_x - u_x i_y)$$

$$(14) \quad jq = \begin{vmatrix} 1 & j & j \\ u_x & u_y & 0 \\ i_x & i_y & 0 \end{vmatrix} = j(u_x i_y - u_y i_x)$$

Zasadniczą cechą, która odróżnia moc bierną obliczoną według zależności (13) lub (14) od iloczynu wektorowego, jest możliwość reprezentowania tej mocy wraz z wektorami przestrzennymi napięcia i prądu na tej samej płaszczyźnie zmiennych zespolonych, podczas gdy wynikiem iloczynu wektorowego jest wektor prostopadły do płaszczyzny poprowadzonej przez wektory tworzące ten iloczyn.



Rys. 13. Przebieg mocy biernej silnika indukcyjnego, obliczonej według zależności (10) przy zgodnej kolejności faz oraz według zależności (11) przy przeciwnej kolejności faz



Rys. 14. Przebieg odfiltrowanej mocy biernej silnika synchronicznego wzbudzanego magnesami trwałymi, obliczonej według zależności (10) przy zgodnej kolejności faz oraz według zależności (11) przy przeciwnej kolejności faz

Na rysunkach 13 i 14 pokazano przebiegi mocy biernej silników rozważanych w pierwszej części pracy, to jest silnika indukcyjnego klatkowego oraz silnika synchronicznego wzbudzanego magnesami trwałymi. Do obliczenia mocy biernej zastosowano dwie zależności: podstawową (10) przy zgodnej kolejności faz oraz skorygowaną (11) przy przeciwnej kolejności faz. Przebiegi pozostałych wielkości pokrywają się z przebiegami pokazanymi na rysunkach 2 do 11.

### Obliczanie mocy w układach trójfazowych

Przekształcenie dowolnych wielkości fazowych  $v_a, v_b, v_c$  układu trójfazowego, zachowujące inwariantność mocy, na składowe wektora przestrzennego, reprezentowanego w układzie współrzędnych prostokątnych, ma następującą postać:

$$\begin{aligned} v_x &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left( v_a - \frac{1}{2} v_b - \frac{1}{2} v_c \right) \\ (15) \quad v_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} (v_b - v_c) \\ v_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (v_a + v_b + v_c) \end{aligned}$$

W przypadku układu symetrycznego nie występuje składowa zerowa wektora:  $v_0 = 0$ .

Uwzględniając powyższe zależności oraz wyrażenia (9), (10) i (11), określające moc czynną i bierną na podstawie składowych wektorów przestrzennych napięcia i prądu, otrzymuje się zależności pozwalające obliczyć moc czynną i bierną na podstawie napięć i prądów fazowych układu trójfazowego. Moc czynna układu trójfazowego:

$$(16) \quad p = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c$$

Moc bierna układu trójfazowego przy zgodnej kolejności faz:

$$(17) \quad q = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_b - u_c) i_a + \frac{1}{\sqrt{3}} (u_c - u_a) i_b + \frac{1}{\sqrt{3}} (u_a - u_b) i_c$$

Moc bierna układu trójfazowego przy przeciwnej kolejności faz:

$$(18) \quad q = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_c - u_b) i_a + \frac{1}{\sqrt{3}} (u_a - u_c) i_b + \frac{1}{\sqrt{3}} (u_b - u_a) i_c$$

Porównując zależności (17) i (18) można zauważyć, że napięcia fazowe w poszczególnych składnikach tych zależności występują w odwrotnej kolejności, co potwierdza adekwatność formuły (11) w przypadku odwrotnej kolejności faz.

### Podsumowanie

Zgodnie z przyjętą definicją mocy biernej jej wartości powinny być dodatnie, jeśli napięcie wyprzedza w fazie prąd oraz ujemne w przeciwnej sytuacji. Zdarza się jednak, że wartości mocy biernej obliczone zgodnie ze znaną formułą są ujemne, pomimo że napięcie wyprzedza w fazie prąd. Dotyczy to układów wielofazowych, w których nastąpiła zmiana kolejności faz. W przypadku trójfazowych maszyn prądu przemiennego sytuacja taka ma miejsce po zmianie kierunku wirowania pola magnetycznego w silnikach indukcyjnych i synchronicznych oraz przy pracy maszyny dwustronnie zasilanej z prędkością nadsynchroniczną. Aby dodatnia moc bierna zawsze odpowiadała napięciu wyprzedzającemu w fazie prąd należy przy jej obliczaniu korzystać z dwóch zależności: podstawowej – przy zgodnej kolejności faz oraz skorygowanej – przy przeciwnej kolejności faz.

**Autor:** dr hab. inż. Andrzej Popenda prof. nadzw., Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, Instytut Elektrotechniki Przemysłowej, Al. Armii Krajowej 17, 42-200 Częstochowa, E-mail: popenda@el.pcz.czest.pl.

### LITERATURA

- [1] Popenda A., The DFM control system based on PLL, *Communications, Scientific Letters of the University of Žilina*, 11 (2009), nr 1, 55-59
- [2] Popenda A., Analysis and investigations into sensorless control system based on doubly fed machine working as a generator, *Przegląd Elektrotechniczny*, 87 (2011), nr 12b, 141-144
- [3] Popenda A., Analysis of influence of input quantities and disturbances on generator operation of doubly fed machine, *Prace Instytutu Elektrotechniki*, (2011), nr 253, 27-38
- [4] Drif M., Cardoso A.J.M., Stator Fault Diagnostics in Squirrel Cage Three-Phase Induction Motor Drives Using the Instantaneous Active and Reactive Power Signature Analyses, *IEEE Trans. on Industrial Informatics*, 10 (2014), nr 2, 1348-1360
- [5] Popenda A., *Modelowanie i symulacja dynamicznych stanów pracy układów napędowych do reaktorów polimeryzacji z silnikami indukcyjnymi specjalnego wykonania*, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2011, 152
- [6] Kumar V.S.S., D. Thukaram, Accurate Steady-State Representation of a Doubly Fed Induction Machine, *IEEE Letters on Power Electronics*, 30 (2015), nr 10, 5370-5375
- [7] Popenda A., A Concept of Control of PMSM Angular Velocity, *Przegląd Elektrotechniczny*, 89 (2013), nr 12, 290-292