

# Zastosowanie zmodyfikowanej metody Monte Carlo do obliczenia mocy strat ciepłych w przewodzącym wsadzie rurowym formowanym elektrodynamicznie

**Streszczenie.** W pracy wyznaczono straty mocy cieplnej w procesie elektrodynamicznego formowania metali. Obliczenia dokonano numerycznie stosując zmodyfikowaną metodę Monte Carlo do wyznaczenia całki oznaczonej w programie MATLAB. Uniwersalny algorytm pozwala z dużą dokładnością wyznaczyć dowolne wielkości fizyczne.

**Abstract.** In the paper thermal power losses dissipated during electrodynamic process of metal forming were determined. The calculations were carried numerically with the Monte Carlo method, for determination of the definite integral using MATLAB software. The versatile algorithm allows one to determine any physical quantities of interest. (A modification of Monte Carlo method using to obtaining the thermal power in electrodynamic process metal forming of tubular charge).

**Słowa kluczowe:** formowanie polem magnetycznym, moc strat ciepłych, analiza numeryczna, Monte Carlo.

**Keywords:** electromagnetic forming, power thermal loss, numerical analysis, Monte Carlo.

## Wstęp

Sposoby rozwiązywania zagadnień korzystających z wielkości losowych, nazywa się ogólnie metodą Monte Carlo [1,2]. Dokładniej przez metodę Monte Carlo rozumie się zbiór sposobów, pozwalających otrzymać rozwiązanie zagadnień matematycznych i fizycznych za pomocą wielokrotnych prób losowych. Ponieważ oceny zmiennej szukanej wyprowadza się statystycznie, są to oceny probabilistyczne. Efektywne zastosowanie metody Monte Carlo stało się możliwe dzięki wprowadzeniu szybkich maszyn liczących.

## Modyfikacja metody Monte Carlo

Rozważmy całkę oznaczoną: [1]

$$(1) \quad I = \int_0^1 f(x) dx, \quad f(x) \in (0,1)$$

Jak wynika z powyższego wzoru, rozpatrujemy zadanie znormalizowane do kwadratu jednostkowego. Nie ogranicza to ogólności metody, ponieważ normalizacja taka jest zawsze możliwa [1]. Całkę oznaczoną funkcji ciągłej i ograniczonej w przedziale  $[x_1, x_2]$  możemy przekształcić, wprowadzając podstawienie: [1]

$$(2) \quad x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi, \quad dx = (x_2 - x_1)d\xi$$

Zauważmy, że dla  $x=x_1$ :  $\xi=0$ , dla  $x=x_2$ :  $\xi=1$ . Tak więc: [1]

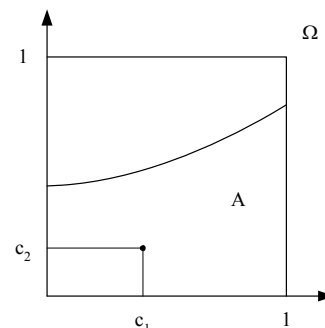
$$(3) \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = (x_2 - x_1) \int_0^1 f[x_1 + (x_2 - x_1)\xi] d\xi = (x_2 - x_1) \int_0^1 F(\xi) d\xi$$

Oznaczmy  $M = \sup_{\xi \in [0,1]} F(\xi)$ , gdzie  $M$  jest bezwzględnie

największą wartością funkcji  $F(\xi)$  w przedziale  $[0,1]$ . Równanie (3) zapiszemy w postaci: [1]

$$(4) \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = M(x_2 - x_1) \int_0^1 \frac{F(\xi)}{M} d\xi = M(x_2 - x_1) \int_0^1 F^*(\xi) d\xi$$

Funkcja  $F^*(\xi)$  i granice całkowania spełniają postulat "wpisania się" w jednostkowy kwadrat, natomiast współczynnik  $M(x_2 - x_1)$  będzie potrzebny do końcowych obliczeń numerycznych.



Rys.1. Metoda Monte Carlo [1]

Z interpretacji geometrycznej prawdopodobieństwa zdarzenia  $A$ ,  $A \in \Omega$ ,  $P(\Omega)=1$  wynika, że  $P(A)=|A|$ , gdzie  $|A|$  jest polem figury odpowiadającej zdarzeniu  $A$  (rys. 1) [1]. Wartość pola figury  $A$  można wyznaczyć w sposób przybliżony, traktując kwadrat na rys. 1 jako tarczę strzelecką, do której w sposób losowy oddano  $n$  strzałów, przy czym każdy strzał trafił w tarczę ( $P(\Omega)=1$ ). Jeżeli przez  $k$  oznaczymy liczbę trafień w wyróżnione pole  $|A|$ , to [1]

$$(5) \quad |A| = P(A) \approx \frac{k}{n}$$

Pole  $|A|$ , czyli pole trapezu krzywoliniowego ograniczonego funkcją  $f(x)$ , osią  $x$  i rzędnymi w punktach  $x=0$ ,  $x=1$ , jest faktycznie wartością naszej całki [1]

$$(6) \quad \int_0^1 f(x) dx \approx \frac{k}{n}, \quad f(x) \in [0,1]$$

## Numeryczna realizacja metody

Numeryczną symulację procesu fizycznego polegającego na oddaniu  $n$  strzałów do jednostkowej tarczy kwadratowej realizuje się wykorzystując generator liczb pseudolosowych (funkcję losową) [1]. Funkcja ta przyjmuje wartości losowe z przedziału  $(0,1)$ . Symulacja strzału do tarczy sprowadza się do generowania dwóch liczb pseudolosowych  $c_1, c_2$ , które traktujemy jako współrzędne punktu leżącego w jednostkowym kwadracie  $\Omega$ . Jeżeli punkt ten leży dodatkowo w obszarze trapezu krzywoliniowego, to próbę traktujemy jako sukces (trafienie). Sukcesem jest strzał spełniający warunek  $f(c_1) \geq c_2$ . [1]

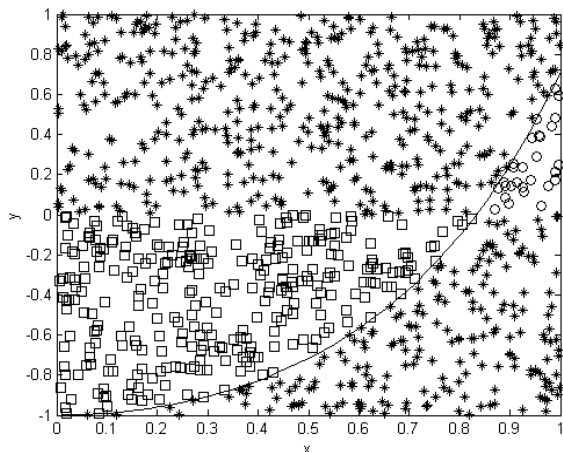
Opisaną wyżej symulację realizujemy  $n$  razy, zliczając przy tym liczbę sukcesów i ostatecznie otrzymujemy przybliżoną wartość całki zgodnie z (5).

Problem przy zastosowaniu tej metody pojawia się w momencie, gdy funkcja podcałkowa w interesującym nas przedziale przyjmuje wartości dodatnie i ujemne.

Fakt ten najłatwiej zilustrować na przykładzie. Rozważmy obliczenie następującej całki:

$$(7) \quad P = \int_0^1 (e^{-x^2} - 2) dx$$

Funkcja podcałkowa pokazana jest na rys. 2.



Rys.2. Zmodyfikowana metoda Monte Carlo (2000 strzałów)

Po znormalizowaniu naszej funkcji do kwadratu jednostkowego otrzymujemy dwa przypadki, które musimy rozważyć oddzielnie.

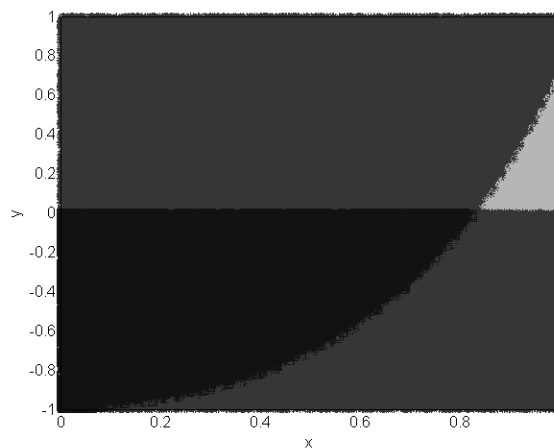
Pierwszy przypadek gdy  $0 < y < 1$ , czyli pole  $P_1$  jest dodatnie (zaznaczone kółkami) oraz drugi, w którym  $-1 < y < 0$ , czyli pole  $P_2$  jest ujemne (zaznaczone kwadratami). Strzały poza interesującym nas polem oznaczono gwiazdką. Ostatecznie nasze pole  $P = P_1 - P_2$ .

Algorytm zmodyfikowanej metody Monte Carlo przedstawia się następująco:

Tabela 1. Algorytm metody Monte Carlo

<p><b>Lista zmiennych:</b>                  całkowite: <math>i, a, b, n</math>                  rzeczywiste: <math>P, P_1, P_2</math>                  tablice: <math>c1, c2</math></p> <pre>                 &gt;&gt;&gt; Podaj n, a, b                 &gt;&gt;&gt; Zdefiniuj f(x)                 Oblicz n = n / 2, min = min(f,a,b), max = max(f,a,b)                 Jeżeli max &gt; min to podstaw M = max                 w przeciwnym razie podstaw M = min                 Podstaw k = 0                 Dla i = 1,2 .....n                     Wygeneruj c1,c2                     Jeżeli f(a + (b - a) c1) / M &gt;= c2 to podstaw k = k + 1                     w przeciwnym razie podstaw k = k                 Oblicz P1 = (k/n) M (b - a)                 Podstaw k = 0                 Dla i = 1,2 .....n                     Wygeneruj c1,c2                     Podstaw c2 = -c2                     Jeżeli f(a + (b - a) c1) / M &lt;= c2 to podstaw k = k + 1                     w przeciwnym razie podstaw k = k                 Oblicz P2 = (k/n) M (b - a)                 Oblicz P = P1 - P2                 Drukuj P                 &gt;&gt;&gt;             </pre>
--

Na rys.2 do wyznaczenia funkcji (7) oddano 2000 strzałów, co jak widać nie zapełnia całego kwadratu. Przy oddaniu od 100000 strzałów wzwyż metoda ta staje się dokładna (rys.3).



Rys.3. Zmodyfikowana metoda Monte Carlo (100000 strzałów)

Wizualizację i obliczenia przeprowadzono w programie MATLAB.

Tabela 2. Listing programu do obliczania zmodyfikowanej metody Monte Carlo w MATLAB

```

function [] = carlo(fun,a,b,n)
f=fcnchk(fun);
n=n/2;
t=cputime;
f=vectorize(f);
Min=f(fminbnd(f,a,b)); %Min - minimum lokalne funkcji
string=strcat('-',formula(f,));
g=inline(string);
Max=f(fminbnd(g,a,b)); %Max - maksimum lokalne funkcji
if (Max>=abs(Min)) %M - bezwzględne maksimum lokalne
    M=Max;
else
    M=abs(Min);
end
hold off %wymazanie poprzedniego wykresu
x=linspace(0,1,50); %rysujemy wykres
y=(f(a+(b-a)*x))/M;
plot(x,y)
hold on

k=0; %k - liczba trafień pod wykres (sukcesów)
for (i=1:1:n) %zaczynamy zliczać trafienia
    alfa1=rand;
    alfa2=rand;
    if ( (f(a+(b-a)*alfa1))/M >= alfa2 ) %sprawdzenie trafienia
        k=k+1;
        plot(alfa1,alfa2,'go')
    else
        plot(alfa1,alfa2,'r*')
    end
end
pole_gorne=(k/n)*M*(b-a); %obliczamy końcową wartość całki

k=0; %k - liczba trafień pod wykres (sukcesów)
for (i=1:1:n) %zaczynamy zliczać trafienia
    alfa1=rand;
    alfa2=rand;
    alfa2=-alfa2;
    if ( (f(a+(b-a)*alfa1))/M <= alfa2 ) %sprawdzenie trafienia
        k=k+1;
        plot(alfa1,alfa2,'bs')
    else
        plot(alfa1,alfa2,'r*')
    end
end
pole_dolne=(k/n)*M*(b-a); %obliczamy końcową wartość całki
wy1=pole_gorne-pole_dolne;
e=cputime-t; %obliczamy czas trwania obliczeń
disp(sprintf('\nWartosc całki metoda mc:\n%f,wy1))
disp(sprintf('Czas %f sekund',e))
    
```

### Moc strat ciepłych

W celu wyznaczenia rozkładu temperatury w procesie kształtowania wsadu rurowego należy określić tzw. wewnętrzne źródła ciepła, które określone są poprzez gęstość objętościową mocy przetwarzanej na ciepło. [3-11] Zgodnie z twierdzeniem Poyntinga chwilowa gęstość objętościowa mocy przetwarzanej na ciepło w obszarze  $V$  w  $[W \cdot m^{-3}]$ , a stąd moc chwilowa w  $[W]$  [10]

$$(8) \quad P_{cal}^{III}(t) = \frac{1}{\gamma} \int_0^l \int_0^{2\pi R_2} \int_{R_1}^{R_2} [J_{\theta}^{III}(r, \theta, z, t)]^2 r dr d\theta dz = \frac{2\pi l}{\gamma} \int_{R_1}^{R_2} [J_{\theta}^{III}(r, t)]^2 r dr$$

Do rozwiązania zagadnienia potrzebne jest wyznaczenie gęstości prądu, a następnie wyliczenie całki. Do wyznaczenia posłużymy się metodą Monte Carlo.

Poszukiwana zespolona gęstość prądu w obszarze III ( $R_1 < r < R_2$ ) związana jest z natężeniem pola elektrycznego prawem Ohma [7]

$$(9) \quad \underline{J}_{\theta}^{III}(r, t) = \gamma \underline{E}_{\theta}^{III}(r, t)$$

Dla tej gęstości prądu  $\underline{J}_{\theta}^{III}(r, t)$  oznaczamy przez  $\bar{J}_{\theta}^{III}(r, s)$  jej transformatę Laplace'a względem zmiennej  $t$  i wtedy otrzymujemy:

$$(10) \quad \bar{J}_{\theta}^{III}(r, s) = -\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} \left[ \underline{A}_2 I_1(\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} r) - \underline{A}_3 K_1(\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} r) \right] = \frac{N_J(s)}{D(s)} H_0$$

gdzie licznik

$$(11) \quad N_J(s) = -\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} \left\{ \begin{aligned} & \left[ 2K_1(\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} R_1) + \sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} R_1 K_0(\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} R_1) \right] I_1(\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} r) - \\ & \left[ -2I_1(\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} R_1) - \sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} R_1 I_0(\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} R_1) \right] K_1(\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} r) \end{aligned} \right\}$$

i mianownik

$$(12) \quad D(s) = (s - s_0) D_1(s)$$

gdzie

$$(13) \quad D_1(s) = I_0(\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} R_2) \left[ 2K_1(\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} R_1) + \sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} R_1 K_0(\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} R_1) \right] + K_0(\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} R_2) \left[ 2I_1(\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} R_1) - \sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} R_1 I_0(\sqrt{s} \sqrt{\mu\gamma} R_1) \right]$$

Prądy wirowe w przewodzącym wsadzie rurowym opisane są równaniem (10). Równania te wyrażone są poprzez stałe  $\underline{A}_2$  i  $\underline{A}_3$ , które z kolei zależą wyłącznie od wymiarów i parametrów elektrycznych przewodzącego wsadu rurowego [7].

Podobnie jak w przypadku pola magnetycznego do obliczenia oryginału  $\underline{J}_{\theta}^{III}(r, t)$  funkcji operatorowej  $\bar{J}_{\theta}^{III}(r, s)$  można wykorzystać twierdzenie o rozkładzie otrzymując

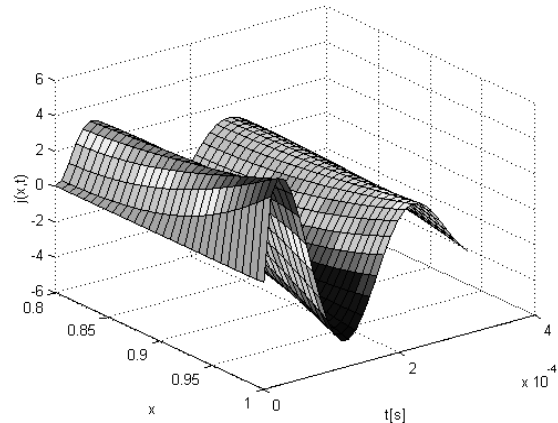
$$(14) \quad \underline{J}_{\theta}^{III}(r, t) = \left\{ \frac{N_J(s_0)}{D'(s_0)} e^{s_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_J(s_n)}{D'(s_n)} e^{s_n t} \right\} H_0 = \underline{J}_{\theta,0}^{III}(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{J}_{\theta,n}^{III}(r, t)$$

gdzie  $\underline{J}_{\theta,0}^{III}(r, t)$  jest oryginałem tej funkcji w biegunie  $s=s_0$ , zaś  $\underline{J}_{\theta,n}^{III}(r, t)$  jest oryginałem tej funkcji w biegunie  $s=s_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),  $D'(s_0)$  oraz  $D'(s_n)$  są wartościami pierwszej

pochoźnej mianownika odpowiednio w biegunie  $s_0$  oraz w biegunie  $s_n$ . Wtedy też możemy przedstawić czasowo – przestrzenny rozkład gęstości prądów wirowych dla wsadu rurowego dla zadanych parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  (rys 4). Wykresy przedstawiono dla wartości względnych, tzn. w odniesieniu

do  $\frac{R_2}{H_0} = \frac{\alpha}{kH_0}$ ,  $x = \frac{r}{R_2}$ ,  $\beta \leq x \leq 1$  czyli jako funkcję [7]

$$(15) \quad j(x, t) = \frac{\alpha}{kH_0} J_{\theta}^{III}(x, t)$$

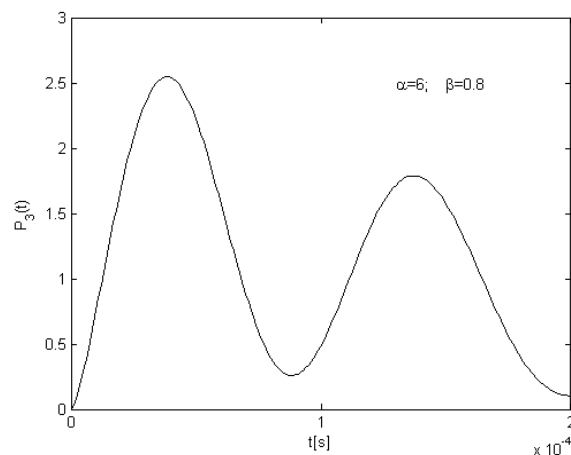


Rys.4. Rozkład czasowo – przestrzenny gęstości prądów wirowych w przewodzącym wsadzie rurowym;  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 0.8$ ,  $\psi = 0$ ,  $\eta = 5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega = \pi \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\gamma = 58 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Ponieważ funkcja gęstości prądu jest funkcją dwuwymiarową zależną od  $r$  i  $t$  to proces całkowania numerycznego zmodyfikowaną metodą Monte Carlo należy przeprowadzić dla każdego punktu  $t$  oddzielnie. W naszym przypadku przeprowadzimy obliczenia dla 200 jednostek czasu  $t$  i zastosujemy 100000 strzałów, co zapewni nam dokładne odwzorowanie mocy strat ciepłych w funkcji czasu.

Przebieg mocy chwilowej przetwarzanej na ciepło przedstawiono na rys. 5. Podobnie jakla gęstości prądu przedstawiono dla wartości względnych jako funkcję

$$(16) \quad P_3(t) = \frac{\gamma}{2\pi l H_0^2} P_{cal}^{III}(t)$$



Rys 5. Przebieg mocy chwilowej przetwarzanej na ciepło we wsadzie rurowym;  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 0.8$ ,  $\psi = 0$ ,  $\omega = \pi \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\eta = 5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma = 58 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Przeprowadzanie 200 operacji całkowania znacznie zwiększa czas obliczeń. Przy zastosowaniu 100000 strzałów proces trwa około dwie godziny. Można to usprawnić zmniejszając ilość strzałów do 50000 (poniżej wynik może być już niedokładny) oraz zmniejszając ilość jednostek czasu. Przy zastosowaniu coraz szybszych komputerów na szczęście proces obliczeń można znacznie skrócić, nie zmniejszając dokładności obliczeń.

Wyznaczenie mocy strat ciepłych jest niezbędne do przeprowadzenia procesu bilansu mocy, czyli wyliczenie ile energii odkształca faktycznie wsad rurowy, a ile rozchodzi się w postaci strat ciepłych. Z wyliczeń wynika, że moc przetwarzana na ciepło we wsadzie stanowi około 60% mocy całkowitej.

Często do dokładnego formowania wsadu rurowego stosuje się matrycę przewodzącą. Wtedy teoretycznie moc strat ciepłych występuje również w matrycy. Ponieważ stosuje się przeważnie wsady aluminiowe bądź miedziane i wtedy pole we wsadzie zostaje całkowicie wytłumione, co praktycznie powoduje, że straty ciepłe w matrycy są bliskie zera i można je pominąć w ogólnym bilansie mocy.

### Wnioski

Błąd uzyskany w obliczeniach jest odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka z liczby eksperymentów, tzn.  $R \sim n^{-0.5}$ , czyli oddanie np. 10000 strzałów do tarczy da wynik lepszy niż oddanie 5000 strzałów. Jednak przy małej ilości strzałów metoda ma charakter losowy i może okazać się, że wartość uzyskana dla np. 2000 strzałów jest mniej dokładna niż dla 1500 strzałów.[1]

Dokładność metody łatwo można sprawdzić licząc całki funkcji nieparzystych w przedziale  $(a, b=-a)$ . Całka taka z definicji wynosi 0. W tabelce 3 przedstawiono wyniki

różnych ilości strzałów  $n$  dla funkcji  $P = \int_{-10}^{10} x dx$  oraz czas obliczeń  $t$ .

Tabela 3. Wyniki i czas obliczeń

N	10000	50000	100000	500000	1000000
P	0.879996	-0.1678	0.131999	0.04	0.00540
t[s]	4.13	20	42	251	493

Podobną symulację możemy wykonać dla funkcji (7).

Tabela 4. Wyniki i czas obliczeń funkcji (7)

N	10000	50000	100000	500000	1000000
P	-0.5378	-0.5354	-0.53748	-0.53822	-0.53737
t[s]	3.7	20	39	232	510

Wartość teoretyczna funkcji(7) wynosi  $P=-0.537348$ . Obliczenia dokonano na komputerze z procesorem klasy Intel Core i3 oraz 4MB pamięci RAM. Przy użyciu szybszej maszyny czas ten można znacznie skrócić.

Praktyka wykazuje, że całki obliczone metodą Monte Carlo przy oddaniu ponad 100000 strzałów są dokładne. Oczywiście metodę tą stosuje się głównie wtedy, gdy w inny sposób nie można wyliczyć całkowanej funkcji.

Powyższy uniwersalny algorytm pozwala nam wyliczyć interesujące nas wielkości w wielu różnych procesach fizycznych. Można także zastosować metodę Monte Carlo do wyznaczenia całek wielokrotnych.

Ponieważ metoda opiera się na generacji punktów w interesującym nas kwadracie jednostkowym uniezależniamy się od wyliczenia funkcji podcałkowej, co niejednokrotnie nie jest proste. Po za tym przy naszym sposobie wyliczenia pola nie ma znaczenia kształt naszej funkcji w odróżnieniu od innych metod całkowania numerycznego ( metoda prostokątów, trapezów). Pozwala to wyliczyć interesującą nas wielkość z dużo większą dokładnością.

**Autorzy:** dr inż. Borys Borowik, Politechnika Częstochowska, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Informatyki, Instytut Technologii Mechanicznych, ul. Armii Krajowej 21, 42-200 Częstochowa, E-mail:borys\_b@poczta.fm

### LITERATURA

- [1] Majchrzak E., Mochnacki B., Metody numeryczne, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1994
- [2] Bjorek A., Dahlquist.G, Metody numeryczne, PWN, Warszawa 1983
- [3] Dobrogowski J., Kołaczkowski Z., Tychowski F., Tłoczenie metali impulsowym polem magnetycznym, PWN, Warszawa Poznań 1979
- [4] Batygin Y., Daehn., The pulse magnetic fields for progressive technologies. *Ohio State University.*, Kharkov – Columbus 1999
- [5] Bednarczyk J., Elektrodynamiczna obróbka metali, Wydawnictwa AGH, Kraków 2007
- [6] Bednarczyk J., Distributions of for ces in the inductors used in metal processing in the pulse magnetic field, *Journal of Materials Processing Technology*, 133(2003), pp.340-347
- [7] Borowik B., Gęstość prądu wewnątrz przewodzącego wsadu rurowego z matrycą przewodzącą w procesie kształtowania impulsowym polem magnetycznym, *Przegląd Elektrotechniczny*, 8/2011 pp. 264-268
- [8] Borowik B., Odkształcenie wsadów rurowych wybranych materiałów w procesie elektrodynamicznego formowania metali, *Przegląd Elektrotechniczny.*, 12b/2011 pp. 19-21
- [9] Tegopoulos J. Kriezis E., Eddy Currents in Linear Conducting Media. *Elsevier.*, New York 1985
- [10] Piątek Z., Borowik B., Powers in Electrodynamical Tubular Workpiece Forming, *Computer Applications in Electrical Engineering*, Poznań 2007
- [11] Borowik B., Ściskanie wsadów rurowych w procesie elektrodynamicznego formowania metali – analiza numeryczna , *Przegląd Elektrotechniczny.*, 12/2015 pp. 56-58