

## Eksperymentalna realizacja nowego elementu ułamkowego rzędu z dowolnym parametrem ułamkowego rzędu

**Streszczenie.** W artykule opisano wyniki badań dotyczących realizacji elementów ułamkowego rzędu z wykorzystaniem uogólnionego konwertera impedancji - GIC. Do realizacji opracowanego układu wymagany jest co najmniej jeden element pierwotny ułamkowego rzędu, np. w postaci superkondensatora. Proponowany układ opisany jest impedancją ułamkowego rzędu, której wykładnik impedancji może przyjmować dowolne wartości. Porównano wyniki badań symulacyjnych i doświadczalnych tego układu. Badania te obejmowały wyznaczenie charakterystyk częstotliwościowych układu ułamkowego rzędu. Opisano także system pomiarowy służący do wyznaczenia charakterystyk częstotliwościowych. Dla wybranego przypadku konfiguracji układu GIC opracowano stanowisko pomiarowe i wykonano badania eksperymentalne. Porównane zostały charakterystyki częstotliwościowe otrzymanej nowej impedancji wejściowej ułamkowego rzędu.

**Abstract.** The paper describes the results of studies on the realization of fractional-order elements using active electronic system - the generalized impedance converter (GIC). At least one original fractional-order element is required for this realization, eg. a supercapacitor. The proposed system is described by a fractional-order impedance, which impedance exponent can obtain arbitrary value. The results of simulation as well as experimental studies have been compared for the considered system. Studies included the determination of the frequency characteristics of the fractional-order system. The measuring system used for the determination of the frequency characteristics has been described too. For the chosen GIC system configuration, a measuring position has been developed and experimental studies were performed. The frequency characteristics of the new fractional-order input impedance have been compared. (**Experimental realization of a new fractional-order element of an arbitrary fractional-order parameter**).

**Słowa kluczowe:** uogólniony konwerter impedancji GIC, indukcyjność i pojemność ułamkowego rzędu.

**Keywords:** generalized impedance converter GIC, fractional-order inductance and capacitance.

### Wprowadzenie

Elementy ułamkowego rzędu  $L_\beta$ ,  $C_\alpha$  są uogólnieniem klasycznych elementów reaktancyjnych LC [1], [2]. Ich modele matematyczne w dziedzinie częstotliwości są często opisywane wzorami:

$$(1) \quad Z_L(j\omega) = R_L + (j\omega)^\beta L_\beta, \quad \beta \in R^+,$$

$$(2) \quad Z_C(j\omega) = R_C + (j\omega)^{-\alpha} C_\alpha^{-1}, \quad \alpha \in R^+.$$

gdzie:  $R_L$ ,  $R_C$  – szeregowo rezystancje wewnętrzne,  $L_\beta$ ,  $C_\alpha$  – pseudoindukcyjność i pseudopojemność,  $\alpha$ ,  $\beta$  – współczynniki ułamkowego rzędu (bezwymiarowe).

Nazwy pseudoindukcyjność i pseudopojemność wynikają z wymiarów tych wielkości, których jednostkami są nie henr i farad, jak w przypadku klasycznych elementów, ale  $H \cdot s^{(1-\beta)}$  oraz  $F/s^{(1-\alpha)}$  [1].

Analiza układów z tymi elementami jest tematem wielu prac [1], [2]. Układy i elementy ułamkowego rzędu znajdują zastosowanie m.in. w:

- budowie oscylatorów niskich częstotliwości [3],
- opisie i modelowaniu rzeczywistych istniejących układów i elementów, takich jak np. tranzystory mocy [4],
- budowie filtrów ułamkowego rzędu [5].

Osobnym zagadnieniem jest obwodowa lub fizyczna realizacja takich elementów. Stosuje się obecnie najczęściej jedną z trzech grup metod. Do pierwszej grupy metod należą realizacje z wykorzystaniem specyficznych własności fizykochemicznych materiałów służących do ich budowy:

- elektrolitów i dielektryków w przypadku superkondensatorów [3], i innych kondensatorów [6],
- miękkich ferromagnetyków, w przypadku cewek [7].

Ograniczeniem dla tych elementów są wartości wykładników ułamkowego rzędu, które wynikają z wewnętrznej budowy tych elementów. Ich wartość mieści się w przedziale  $(0,1)$  i daje informację o stratności tych elementów.

Druga grupa realizacji polega na aproksymacji ich

modeli częstotliwościowych lub czasowych przez układy drabinkowe RC [8].

Trzecia grupa metod opiera się na wykorzystaniu układów elektronicznych realizujących transformacje obwodowe impedancji oryginalnych elementów  $L_\beta$ ,  $C_\alpha$ . Używa się do tego celu elektronicznych układów aktywnych, jak np. uogólnione konwertery impedancji GIC. Konwerter taki można skonstruować różnymi sposobami [9-11]. Najpopularniejszą metodą jest użycie do jego konstrukcji wzmacniaczy operacyjnych [11]. Dzięki takiej budowie, nowe impedancje ułamkowego rzędu mogą przyjmować wartości wykładników ułamkowego rzędu wykraczające poza zakres  $\alpha, \beta \in (0,1)$ .

Artykuł ten zawiera propozycję konstrukcji elementów reaktancyjnych  $L_\beta$ ,  $C_\alpha$  ułamkowego rzędu, których wykładniki mogą przyjmować wartości poza obszarem  $\alpha, \beta \in (0,1)$ .

Zaprezentowane poniżej wyniki badań są kontynuacją i rozszerzeniem wyników uzyskanych w pracach [12], [13].

W pracy [12] rozpatrzono teoretycznie możliwe przypadki włączenia jednej lub dwóch impedancji ułamkowego rzędu do struktury konwertera GIC. W pracy [13] zbadano symulacyjnie przykładową strukturę konwertera GIC z jedną impedancją ułamkowego rzędu - superkondensatorem dołączonym do wyjścia układu.

Niniejszy artykuł stanowi kontynuację wyżej opisanych badań i ma na celu weryfikację eksperymentalną analizy teoretycznej i symulacyjnej rozpatrywanego problemu.

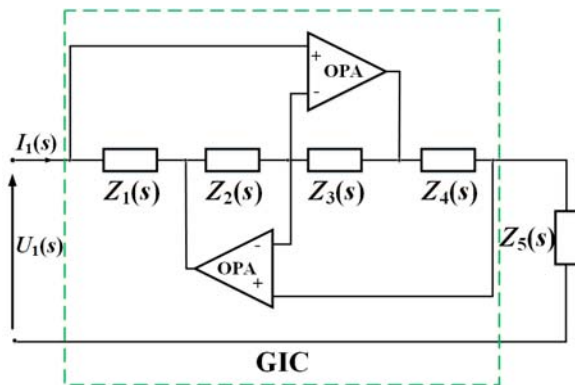
### Formalizacja problemu

Rozpatrywany układ do syntezy i realizacji nowych elementów ułamkowego rzędu, wykorzystujący uogólniony konwerter impedancji, został pokazany na rys. 1

Przyjęto do analizy, że impedancje  $Z_1(s)$ ,  $Z_2(s)$ ,  $Z_3(s)$  oraz  $Z_4(s)$  należą do wewnętrznej struktury konwertera GIC, natomiast impedancja  $Z_5(s)$  jest impedancją obciążenia. Zakładając, że wzmacniacze operacyjne są idealne (por. rys. 1), impedancja wejściowa tego układu jest wówczas

dana zależnością:

$$(3) \quad Z_{we}j(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = \frac{Z_1(s)Z_3(s)}{Z_2(s)Z_4(s)} Z_5(s).$$



Rys.1. Realizacja impedancji ułamkowego rzędu z użyciem uogólnionego konwertera impedancji (GIC) [9]

Zakładając, że układ tworzą takie elementy jak: rezystancje, klasyczne indukcyjności i pojemności i co najmniej jeden element ułamkowego rzędu, którego wykładnik impedancji ( $\alpha, \beta$ ) należą do przedziału  $\langle 0,1 \rangle$ , wzór (3) przyjmie postać:

$$(4) \quad Z_{we}j(s) = Ks^\gamma,$$

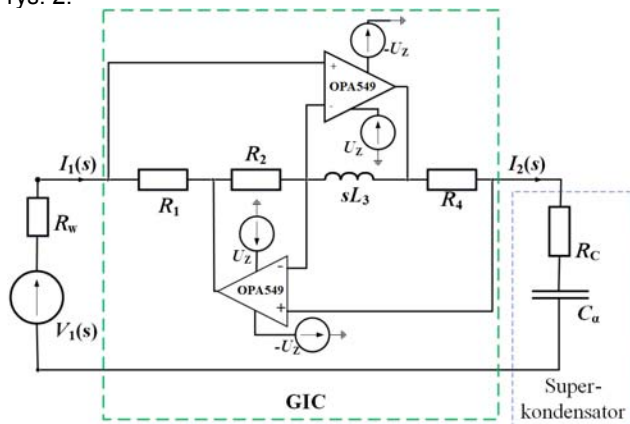
gdzie:  $K$  - współczynnik mający indukcyjny ( $\gamma > 0$ ) lub pojemnościowy ( $\gamma < 0$ ) charakter ułamkowego rzędu.

W pracy [12] zostały zestawione różne możliwości połączenia układu o strukturze uogólnionego konwertera impedancji GIC i jednego oraz dwóch elementów ułamkowego rzędu  $L_\beta, C_\alpha$  oraz klasycznych pojemności, indukcyjności i rezystancji.

W dalszej części artykułu posłużono się konkretnym przypadkiem konfiguracji elementów w celu weryfikacji przeprowadzonych analiz.

### Model rozpatrywanego układu

Model przebadanego układu został zaprezentowany na rys. 2.



Rys. 2. Skonstruowany układ uogólnionego konwertera impedancji GIC do syntezy elementu ułamkowego rzędu

Do badań został wybrany wzmacniacz operacyjny OPA549. Jest to wysokonapięciowy i wysokoprądowy wzmacniacz operacyjny do szerokiego spektrum zastosowań [14]. Oba wzmacniacze operacyjne zostały zasilone symetrycznie napięciem stałym  $U_Z = \pm 15$  V. Pozostałe elementy układu z rys. 2 zostały dobrane

następująco:  $V_1(s)$  - źródło napięcia o amplitudzie 1 V (generator arbitralny),  $R_w$  - bocznik, do pomiarów prądu, oraz odpowiednio:  $R_1 = Z_1(s) = R_2 = Z_2(s) = R_4 = Z_4(s) = 10 \Omega$ ,  $sL_3$  ( $L_3 = 15$  mH) - impedancje  $Z_1(s)$ ,  $Z_2(s)$ ,  $Z_3(s)$  and  $Z_4(s)$ . Impedancję obciążenia  $Z_5(s)$  stanowił superkondensator, którego model ułamkowego rzędu został wyznaczony doświadczalnie w części eksperymentalnej badań. W rozważaniach teoretycznych pominięto szeregową rezystancję wewnętrzną  $R_C$  superkondensatora i szeregową rezystancję  $R_L$  cewki oraz założono wartość pseudopojemności jako  $C_\alpha = 12$  mF/s $^{(1-\alpha)}$  (dla  $\alpha = var$ ). Wówczas moduł  $|Z_{we}j(j\omega)|$  i fazę  $\varphi(\omega)$  impedancji wejściowej nowego elementu ułamkowego rzędu określają wzory:

$$(5) \quad |Z_{we}j(\omega)| = \frac{R_1 L_3}{R_2 R_4 C_\alpha} \frac{1}{\omega^{\alpha-1}},$$

oraz:

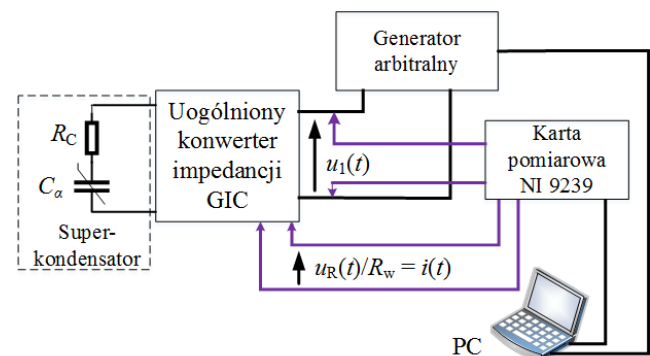
$$(6) \quad \varphi = (1 - \alpha)\pi / 2.$$

Symulacje powyższego układu z dobranymi parametrami obwodu zostały przeprowadzone w programie PSpice A/D. Układ ten został zamodelowany na dwa sposoby. W pierwszym sposobie zamodelowano wzmacniacze operacyjne jako elementy idealne, w postaci napięciowych źródeł sterowanych. W drugim przypadku wykorzystano modele rzeczywistych wzmacniaczy operacyjnych OPA549.

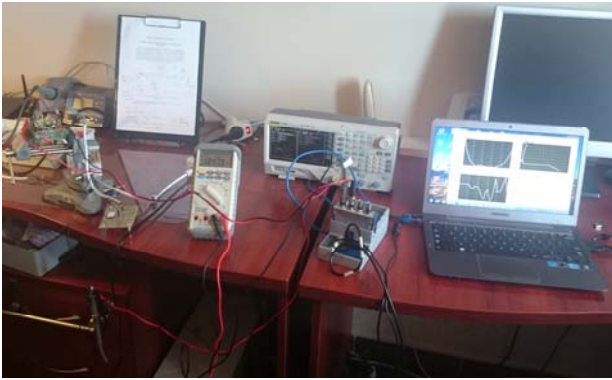
Element ułamkowego rzędu został zamodelowany w programie PSpice A/D w trybie ABM w postaci źródła napięcia sterowanego prądem  $I_1(s)$ . Jak dowiedziono w pracy [10], zachodzi równoważność zapisu impedancji operatorowej elementu ułamkowego rzędu w postaci sterowanego źródła napięcia lub prądu i elementu modelowanego klasycznie. Sposób ten został wykorzystany do symulacji charakterystyk częstotliwościowych układu GIC z superkondensatorem.

### System pomiarowy

Schemat realizacji stanowiska pomiarowego został pokazany na rys. 3. Zdjęcie fizycznego układu pokazano na rys. 4, natomiast na rys. 5 przedstawiono skonstruowany uogólniony konwerter impedancji GIC wraz z opisem jego poszczególnych elementów. Jako impedancję  $Z_5(s)$  zastosowano superkondensator firmy Panasonic, model EECF5R5U473 o małej pojemności znamionowej  $C = 47$  mF. Z pomiaru charakterystyk częstotliwościowych analizowanego superkondensatora wyznaczono wartości jego parametrów modelu: pseudopojemność  $C_\alpha = 0.012006$  F/s $^{(1-\alpha)}$ , parametr ułamkowego rzędu  $\alpha = 0.477$  oraz szeregową rezystancja wewnętrzną  $R_C = 44.7 \Omega$ .



Rys. 3. Schemat układu pomiarowego do pomiaru charakterystyk skonstruowanego konwertera GIC

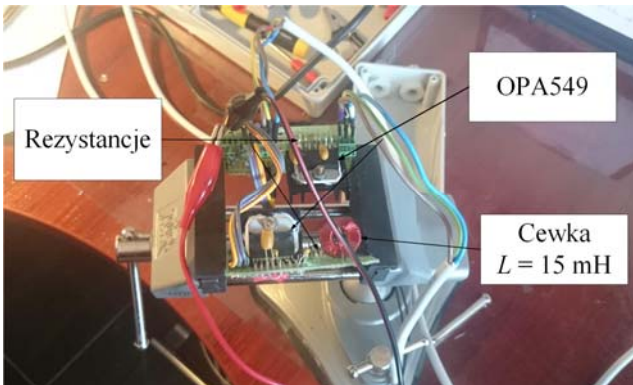


Rys. 4. Zdjęcie układu pomiarowego podczas prób pomiarów charakterystyk częstotliwościowych

Do pomiarów charakterystyk zarówno superkondensatora, jak i układu uogólnionego konwertera impedancji, została użyta karta pomiarowa National Instruments NI 9239.

Algorytm działania programu, napisanego w języku LabView, do pomiaru charakterystyk częstotliwościowych elementów (superkondensatorów) i układów (np. z wykorzystaniem konwertera GIC) ułamkowego rzędu przedstawiono na rys. 5. Algorytm ten składa się z następujących etapów:

- Inicjalizacja i uruchomienie zadań: obsługi generatora, obsługi karty pomiarowej i interfejsu użytkownika,
- wprowadzenie konfiguracji generatora i karty pomiarowej oraz parametrów pomiaru,
- uruchomienie pomiaru, generacja częstotliwości i pobieranie danych z karty wejść analogowych,
- analiza danych, obliczenia charakterystyki i rysowanie wykresów.



Rys.4. Budowa skonstruowanego uogólnionego konwertera impedancji GIC

Program do pomiaru charakterystyk częstotliwościowych pozwala na wykreślenie charakterystyk Bode'go (modułu i fazy impedancji wejściowej) oraz po odpowiednich przekształceniach, na wykreślenie charakterystyk Nyquista.

Pomiar impedancji wejściowej układu polegał na pomiarze wartości amplitudy napięcia na wejściu układu  $u_1(t)$  oraz amplitudy napięcia na szeregowo dołączonym boczniku - rezystancji  $R_w$  o wartości  $2,5 \Omega$ . Program umożliwia przeskalowanie wartości napięcia na rezystancji  $R_w$  na wartość amplitudy prądu  $i_1(t)$  płynącego w omawianym układzie.

Pomiar fazy impedancji wejściowej  $\varphi(\omega)$  polegał na metodzie pomiaru czasu przesunięcia pomiędzy przebiegami napięcia  $u_1(t)$  i prądu  $i_1(t)$ , rejestrowanymi za pomocą karty pomiarowej.



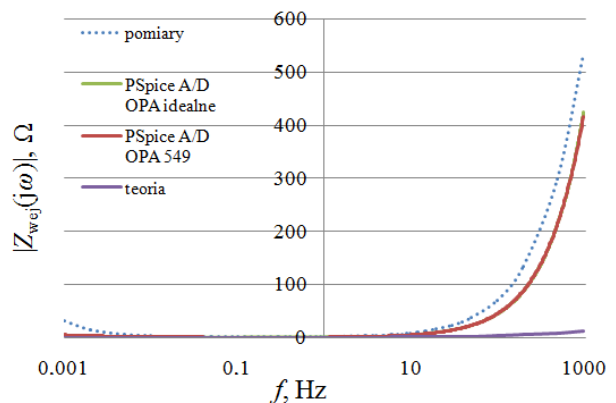
Rys.5. Schemat blokowy działania programu do pomiaru charakterystyk częstotliwościowych

W dalszej części artykułu zostały zestawione wyniki analizy teoretycznej, symulacyjnej i weryfikacji eksperymentalnej przeprowadzonej syntezy elementu ułamkowego rzędu.

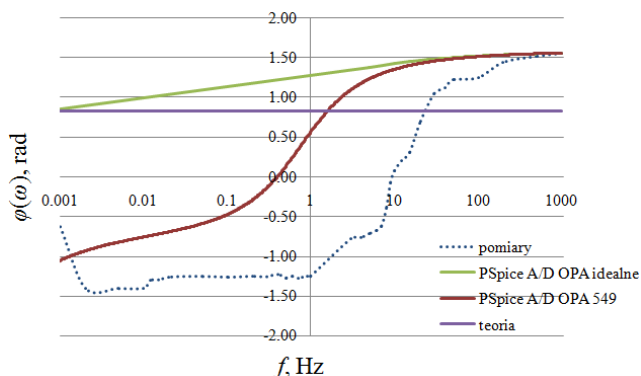
### Wyniki badań symulacyjnych i eksperymentalnych

Dla dobranych i opisanych w poprzedniej części artykułu parametrów uogólnionego konwertera impedancji GIC, wykonano badania symulacyjne i eksperymentalne charakterystyk częstotliwościowych. Zestawienie otrzymanych charakterystyk dla szerokiego zakresu częstotliwości, od 1 mHz do ponad 1000 Hz.

Charakterystyka modułu impedancji wejściowej  $|Z_{wej}(j\omega)|$  otrzymana teoretycznie, według symulacji w programie PSpice A/D oraz wyznaczona eksperymentalnie, została przedstawiona na rys. 6, natomiast charakterystykę fazy  $\varphi(\omega)$  pokazano na rys. 7.



Rys.6. Zestawienie charakterystyk modułu impedancji wejściowej  $|Z_{wej}(j\omega)|$  dla analizowanego układu konwertera GIC



Rys.7. Zestawienie charakterystyk fazy impedancji wejściowej  $\varphi(\omega)$  dla analizowanego układu konwertera GIC

Z charakterystyki modułu impedancji można zauważyć, że w zakresie od 0.01 Hz do około 10 Hz charakterystyki są praktycznie takie same. Dla częstotliwości mniejszych od ok. 0.01 Hz oraz większych od 10 Hz, charakterystyki pochodzące z pomiarów odbiegają nieco od charakterystyk wykonanych w programie PSpice A/D.

Przyczynami występujących rozbieżności są:

- konstrukcja układu (dla małych częstotliwości indukcyjność zachowuje się jak zwarcie, wówczas dużą rolę odgrywa rezystancja wewnętrzna  $R_L$ ),
- wewnętrzne napięcie zasilania wzmacniacza, które dla niskich częstotliwości wprowadza stałą do pomiarów impedancji.

Ponadto, dodatkowymi czynnikami wpływającymi na różnice wyników badań symulacyjnych i doświadczalnych mogą być:

- niedokładny model wzmacniacza operacyjnego
- nieuwzględnienie szeregowej rezystancji superkondensatora i szeregowej rezystancji własnej cewki indukcyjnej.

Charakterystyka modułu  $|Z(j\omega)|$  otrzymana eksperymentalnie i symulacyjnie jest bardzo podobna, poza wartościami skrajnymi. Większe różnice pomiędzy charakterystyką teoretyczną i symulacyjną, a otrzymaną eksperymentalnie można zauważyć w przypadku fazy  $\varphi(\omega)$ . Jej pomiar jest obciążony większym błędem, zapewne ze względu na metodę pomiaru różnicy czasu pomiędzy przebiegami napięcia i prądu, zwłaszcza dla większych częstotliwości. Z charakterystyk fazy  $\varphi(\omega)$  wynika, że dla niskich częstotliwości występuje nagle jej zmiana o  $180^\circ$ , czego model teoretyczny nie przewiduje.

## Podsumowanie

Artykuł przedstawia wyniki badań dotyczących realizacji nowych elementów rzędu ułamkowego przy pomocy elektronicznego układu aktywnego, uogólnionego konwertera impedancji GIC. Do realizacji nowego elementu ułamkowego rzędu użyto superkondensatora, który stanowi pierwotny element ułamkowego rzędu. Uogólniony konwerter impedancji GIC został zasymulowany i skonstruowany w oparciu o rzeczywiste wzmacniacze operacyjne OPA549. Zweryfikowano teoretyczne założenia realizacji nowego elementu ułamkowego rzędu z wynikami badań symulacyjnych w symulatorze PSpice A/D. Dla wybranego przypadku konfiguracji układu GIC opracowano stanowisko pomiarowe i wykonano badania eksperymentalne. Wykonano pomiary charakterystyk częstotliwościowych modułu  $|Z(j\omega)|$  i fazy  $\varphi(\omega)$  (wykresy Bode'go). Można z nich zauważyć, że dla bardzo małych

częstotliwości oraz częstotliwości wysokich, charakterystyki pochodzące z pomiarów odbiegają od charakterystyk wykonanych w programie PSpice A/D (dla modeli rzeczywistych OPA).

Charakterystyka modułu  $|Z(j\omega)|$  otrzymana eksperymentalnie i symulacyjnie jest bardzo podobna, poza skrajnymi wartościami częstotliwości. Większe różnice można zaobserwować w przypadku charakterystyki fazy  $\varphi(\omega)$ . Możliwe przyczyny rozbieżności charakterystyk dla rzeczywistego układu zostały przeanalizowane i podane w artykule.

**Autorzy:** mgr inż. Agnieszka Jakubowska-Ciszek, Politechnika Śląska, Wydział Elektryczny, Instytut Elektrotechniki i Informatyki, Zakład Elektrotechniki Teoretycznej, Informatyki i Telekomunikacji, ul. Akademicka 2A, 44-100 Gliwice, E-mail: [agnieszka.jakubowska-ciszek@polsl.pl](mailto:agnieszka.jakubowska-ciszek@polsl.pl);

mgr inż. Janusz Lewandowski, Ośrodek Pomiarów i Automatyki Przemysłu Węglowego OPA PW S.A., ul. Hagera 14a, 41-800 Zabrze, E-mail: [januszlewandowski@opa.pl](mailto:januszlewandowski@opa.pl).

## LITERATURA

- [1] Radwan A., Salama K., Fractional-order RC and RL circuits, *Circuits, Systems and Signal Processing*, Vol. 31, 2012, pp. 1901-1915
- [2] Kaczorek T., Rogowski K.: Fractional Linear Systems and Electrical Circuits, Springer International Publishing, 2015
- [3] Elwakil A.S., Allagui A., Maundy B.J., Psychalinos C., A low frequency oscillator using a supercapacitor, *Int J Electron Commun (AEÜ)*, (2016), <http://dx.doi.org/10.1016/j.aeue.2016.03.020> (in press)
- [4] Elwakil S.A., Jarndal A.: Fractional-order model of GaN high electron mobility transistors for switching applications, *Proceedings of ICMNP 2016*, vol. 10 (7), Stockholm, Sweden, (2016), pp. 711-715
- [5] Dimeas J., Tsirimokou G., Psychalinos C., Elwakil A.S.: Experimental verification of filters using fractional-order capacitor and inductor emulators, *Int. Conf. on Telecommunications and Signal Processing*, (2016), Vienna, Austria, pp. 559 - 562
- [6] Krishna M.S., Das S., Biswas K., Goswami B.: Fabrication of a fractional order capacitor with desired specifications: a study on process identification and characterization, *IEEE Transactions on Electron. Devices*, vol. 58, no. 11, (2011), pp. 4067-4073
- [7] Schafer J., Kruger K.: Modelling of lossy coils using fractional derivatives, *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 41, (2008), pp. 367-376
- [8] Shi, L., Crow, ML: Comparison of ultracapacitor electric circuit models, *Proceedings of IEEE Power and Energy Society General Meeting*, (2008), Pittsburgh, USA, pp.1-6
- [9] Semani R.: Floating GNIC configuration with only single OMA, *Electr. Lett.*, vol. 31, no. 6, (1995), pp. 423-425
- [10] Igbal A.K., Muslim T.A., Niger M., Generalized impedance converters with only transconductance elements and grounded capacitors, *Active and Passive Electr. Comp.*, vol. 25, (2002), pp. 265-269
- [11] Antoniu A., Realization of gyrators using operational amplifiers, *IEEE Proc.*, vol. 116, no 11, (1969), pp. 1838 - 1850
- [12] Jakubowska A., Walczak J., Electronic realizations of fractional-order elements: I. Synthesis of the arbitrary order elements, *Poznan University of Technology Academic Journals, Electrical Engineering*, vol. 85, Poznań, (2016), pp. 137-148
- [13] Jakubowska A., Szymczak M., Electronic realizations of fractional-order elements: II. Simulation studies, *Poznan University of Technology Academic Journals, Electrical Engineering*, vol. 85, Poznań, (2016), pp. 149-159
- [14] Strona internetowa: <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/opa549.pdf> z 18.02.2017