

Porównanie efektywności iteracyjnej metody rozwiązań fundamentalnych i metody elementów skończonych w analizie zagadnień elektrostatyki

Streszczenie. W artykule przedstawiono porównanie efektywności iteracyjnej metody rozwiązań fundamentalnych (IMRF) i metody elementów skończonych (MES) na podstawie analizy rezultatów testów numerycznych przeprowadzonych na modelowym zagadnieniu elektrostatyki. Stwierdzono, że za pomocą IMRF można uzyskać rozwiązanie o danej dokładności w czasie wielokrotnie krótszym (nawet kilkadziesiąt razy) niż za pomocą MES.

Abstract. The article presents efficiency comparison of the iterative method of fundamental solutions (IMFS) and finite element method (FEM), based on the analysis of numerical tests results obtained for the model of electrostatics problem. It has been found, that applying the IMFS a solution of assumed accuracy could be obtained numerous times shorter (even several dozen times) than using the FEM. (Efficiency comparison of the fundamental solutions iterative method and finite element method in the analysis of electrostatic problems).

Słowa kluczowe: iteracyjna metoda rozwiązań fundamentalnych, metoda elementów skończonych, elektrostatyka, równanie Laplace'a
Keywords: iterative method of fundamental solutions, finite element method, electrostatics, Laplace equation

Wstęp

Do rozwiązywania zagadnień pola elektromagnetycznego obecnie najpowszechniej stosuje się Metodę Elementów Skończonych (MES) [1, 2, 3]. Korzystają z niej niemal wszystkie solvery profesjonalnego oprogramowania do obliczeń polowych (np. ANSYS, Maxwell, Flux, Opera, CST EMC STUDIO). Metoda MES należy do kategorii metod obszarowych (wewnętrznych). Konkurencyjne w stosunku do nich metody brzegowe (np. Metoda Elementów Brzegowych [4] i inne należące do grup metod momentów, czy Treftza [5, 6]) nie zyskały takiej popularności, pomimo że pod wieloma względami przewyższają metody obszarowe. Są one lepsze od metod obszarowych ze względu na: znacznie prostszą dyskretyzację (dotyczy tylko powierzchni granicznych obszarów analizowanego układu), mniejszą wielkość modelu numerycznego (liczba koniecznych do otrzymania rozwiązań niewiadomych) i w konsekwencji mniejsze wymagania sprzętowe. Do walorów metod brzegowych zalicza się również, m.in.: analityczność rozwiązania, łatwość oceny błędu, prostotę analizy w obszarach nieograniczonych. Ważniejszą wymienianą wadą metod brzegowych jest mniejsza uniwersalność, ponieważ nie da się ich bezpośrednio zastosować do analizy zagadnień, w których występują ośrodki niejednorodnie materiałowo lub anizotropowe o zmiennych współczynnikach anizotropii. Zdecydowana większość analiz polowych elektrodynamiki technicznej nie dotyczy jednak tego typu zagadnień, wydaje się więc, że metody brzegowe powinny być znacznie bardziej docenione i wykorzystywane.

Autorzy niniejszej pracy od szeregu lat starają się zaadaptować do elektrodynamiki obliczeniowej, mało rozpowszechnioną w tej dziedzinie, iteracyjną Metodę Rozwiązań Fundamentalnych (IMRF), należącą do kategorii metod brzegowych [6, 7].

Celem niniejszej pracy jest wstępna ocena jej efektywności (dokładności i czasu obliczeń) w zestawieniu z MES. Porównanie przeprowadzono na przykładzie stosunkowo prostego zagadnienia modelowego 3D z elektrostatyki. Obliczenia metodą MES wykonano z wykorzystaniem oprogramowania ANSYS Electromagnetic Suite 18.2.

Sformułowanie IMRF dla układu N naładowanych ciał przewodzących

Rozpatrywany układ składa się z N ciał przewodzących o zadanych potencjałach V_n , $n = 1, \dots, N$ zanurzonych w

obszarze dielektrycznym o stałej przenikalności elektrycznej ε . Rozważane jest zagadnienie obliczania rozkładu pola elektrostatycznego.

W obszarze dielektrycznym pozbawionym ładunków potencjał elektrostatyczny φ ($\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \varphi$, \mathbf{E} – natężenie pola elektrycznego) spełnia równanie Laplace'a

$$(1) \quad \Delta \varphi = 0$$

a na powierzchniach ciał przewodzących S_n warunki brzegowe typu Dirichleta:

$$(2) \quad \varphi|_{S_n} = V_n, \quad n = 1, \dots, N$$

Prezentowana metoda rozwiązania tak sformułowanego zagadnienia ma charakter iteracyjny (por. [6, 7]). W k -tym kroku iteracji wybierane jest po L_n punktów $\mathbf{r}_{k,n,i}$ ($i = 1, \dots, L_n$) we wnętrzu każdego z obszarów przewodzących Ω_n . Każdemu z tych punktów przyporządkowany jest parametr rzeczywisty $q_{k,n,i}$, który intuicyjnie może być interpretowany jako wartość fikcyjnego ładunku elektrycznego znajdującego się w punkcie $\mathbf{r}_{k,n,i}$. Ładunki te nazywane będą dalej *źródłami fikcyjnymi*.

Poszukiwany potencjał aproksymowany jest w k -tym kroku iteracji potencjałem, pochodzącym od wszystkich źródeł fikcyjnych w układzie:

$$(3) \quad \tilde{\varphi}_k(\mathbf{r}) = \tilde{\varphi}_{k-1}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{L_n} \frac{q_{k,n,i}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k,n,i}|}, \quad \tilde{\varphi}_0(\mathbf{r}) \equiv 0$$

Niezależnie od rozmieszczenia źródeł fikcyjnych, funkcja (3) spełnia dokładnie równanie (1) w obszarze dielektrycznym (jako kombinacja liniowa rozwiązań równania Laplace'a) i jest w nim wszędzie ograniczona (jej punkty osobliwe $\mathbf{r}_{k,n,i}$ leżą poza obszarem dielektrycznym).

Przybliżone spełnienie warunków brzegowych (2) uzyskuje się przez odpowiednie określenie wartości źródeł fikcyjnych $q_{k,n,i}$. W tym celu należy wprowadzić miarę dokładności spełnienia tych warunków. Lokalne, względne odchylenia rozwiązania przybliżonego od dokładnego na powierzchniach obszarów przewodzących opisują funkcje

$$(4) \quad \varepsilon_{k,n}(\mathbf{r}) = \frac{\tilde{\varphi}_k(\mathbf{r}) - V_n}{V_n}, \quad \mathbf{r} \in S_n$$

Jako miarę dokładności całego rozwiązania przyjmuje się ich sumaryczną, średniokwadratową normę, nazywaną dalej *błędem brzegowym*:

$$(5) \quad \delta_k(q_{k,n,i}) = \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{S_n} \iint_{S_n} (\varepsilon_{k,n}(\mathbf{r}))^2 dS_n}$$

Warunek jego minimalizacji

$$(6) \quad \frac{\partial \delta_k}{\partial q_{k,n,i}} = 0$$

prowadzi (na drodze standardowej procedury najlepszej aproksymacji [9]) do układu równań liniowych

$$(7) \quad \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{L_n} a_{k,n,i,j} q_{k,n,i} = b_{k,j}$$

gdzie

$$(8) \quad a_{k,n,i,j} = \sum_{m=1}^N \frac{1}{V_n^2} \iint_{S_m} \frac{dS_m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k,n,i}| |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k,m,j}|}$$

$$(9) \quad b_{k,j} = 4\pi\varepsilon \sum_{m=1}^N \frac{1}{V_n^2} \iint_{S_m} \frac{(V_m - \tilde{\varphi}_{k-1})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k,m,j}|} dS_m$$

Po numerycznym rozwiązaniu układu (7) (np. metodą eliminacji Gaussa) otrzymuje się zbiór wartości źródeł fikcyjnych $q_{k,n,i}$, które po podstawieniu do (3) dają kolejne przybliżenie poszukiwanego rozwiązania, po czym następuje przejście do następnego kroku iteracji.

Uwagi

- Opisana metoda należy do kategorii metod brzegowych, czyli nie wymaga dyskretyzacji wnętrza analizowanego obszaru, a jedynie jego brzegów (w celu numerycznego obliczenia całek powierzchniowych w (8) i (9)).

- Dzięki iteracyjnemu charakterowi IMRF nie wymaga rozwiązywania dużych układów równań, co pozwala uniknąć problemów z ich słabym uwarunkowaniem (często spotykanych w innych metodach brzegowych). Z tego też powodu IMRF nie wymaga stosowania sprzętu numerycznego o dużej pamięci operacyjnej.

- W każdym kroku iteracji obliczany jest błąd brzegowy (5), co pozwala na ocenę dokładności rozwiązania oraz automatyczne przerwanie obliczeń w momencie uzyskania żądanej dokładności. Można teoretycznie wykazać, że ciąg błędów brzegowych δ_k uzyskiwanych w kolejnych krokach iteracyjnych jest ciągiem nierosnącym, co oznacza, że opisana procedura jest zbieżna [6].

- Szybkość zbieżności procedury uwarunkowana jest m.in. rozmieszczeniem źródeł fikcyjnych. Teoretycznie możliwe jest zastosowanie algorytmu poszukującego położeń optymalnych, co jednak wiąże się ze znacznymi komplikacjami i wielokrotnym wydłużeniem czasu przebiegu kroku iteracji (z tego powodu nie należy się też spodziewać szybszej zbieżności w czasie rzeczywistym). W opisywanych testach numerycznych przyjęto zasadę losowego wyboru położeń źródeł fikcyjnych, uzyskując w pełni zadowalającą zbieżność (patrz też [7]).

- Dodatkowym kryterium oceny dokładności rozwiązania może być maksymalna wartość funkcji błędu brzegowego,

$$(10) \quad \varepsilon_{\max k} = \max |\varepsilon_{n,k}(\mathbf{r})|$$

którą można wyznaczyć bardzo niewielkim kosztem numerycznym (wartości odchyłeń lokalnych i tak są obliczane w każdym kroku iteracji przy tablicowaniu

współczynników $b_{k,j}$ – por. (4) i (9)). Korzystając z zasady maksimum dla funkcji harmoniczych można teoretycznie wykazać, że odchylenie rozwiązania przybliżonego od dokładnego w analizowanym obszarze jest nie większe niż na powierzchniach brzegowych [6, 8]. Daje to gwarancję, że względne lokalne odchylenie uzyskanego rozwiązania od rozwiązania dokładnego w całym analizowanym układzie nie przekracza wartości $\varepsilon_{\max k}$.

- Zaletą opisanej metody, na którą warto też zwrócić uwagę, jest łatwość wyznaczania sumarycznych ładunków zgromadzonych na powierzchniach ciał przewodzących (np. w celu obliczenia współczynników pojemnościowych układu). Z przybliżeniem, wynikającym z dokładności uzyskanego rozwiązania, można przyjąć, że rzeczywisty strumień pola elektrycznego emitowanego przez dane ciało przewodzące jest równy strumieniowi emitowanemu przez ładunki fikcyjne zgromadzone w jego wnętrzu [8]. Zgodnie z prawem Gaussa oznacza to, że rzeczywisty ładunek zgromadzony na powierzchniach ciał przewodzących jest równy sumie ładunków fikcyjnych znajdujących się w ich wnętrzach. Dzięki temu unika się kłopotliwego i generującego dodatkowe błędy obliczania rozkładu gęstości powierzchniowej ładunku oraz jej całkowania.

Zestawienie niektórych właściwości IMRF i MES

Metoda elementów skończonych jest najbardziej rozpowszechnioną i najlepiej rozwiniętą metodą numeryczną rozwiązywania zagadnień polowych. Poświęcona jest jej bardzo bogata literatura (np. [1, 2, 3]).

W przeciwieństwie do IMRF należy ona do kategorii metod obszarowych, czyli wymaga dyskretyzacji zarówno brzegów jak i wnętrza obszarów występujących w analizowanym układzie. Konsekwencją tego jest zwykle znacznie większy niż w przypadku metod brzegowych model numeryczny (zwłaszcza w zagadnieniach 3D).

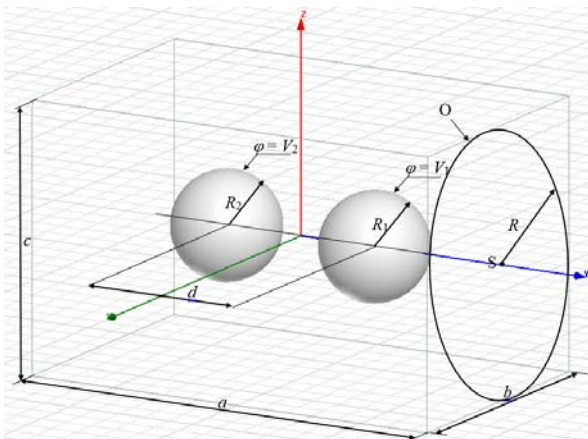
Innym mankamentem MES (podobnie jak wszystkich metod obszarowych w stosunku do metod brzegowych) jest konieczność sztucznego ograniczania analizowanego obszaru w analizie zagadnień otwartych. Autorzy oprogramowania ANSYS zalecają w takim przypadku ograniczenie obszaru, w którym jest analizowane pole specjalnym obszarem dodatkowym o dziesięciokrotnie większych rozmiarach [Maxwell Online Help]. Na jego brzegach przyjmowane są dla potencjału zerowe warunki Neumanna. Strumień pola elektrycznego przez powierzchnię ograniczającą taki obszar jest zawsze zerowy, co oznacza, iż tak otrzymane rozwiązanie może nie spełniać całkowitego prawa Gaussa (w przypadku, gdy ładunki w analizowanym układzie się nie równoważą).

Ocena dokładności rozwiązania w MES jest trudniejsza niż w IMRF, ponieważ otrzymane za pomocą MES rozwiązanie nie spełnia dokładnie rozwiązywanego równania i błąd brzegowy nie jest miarodajny dla całego rozważanego obszaru. W solverze ANSYS Electromagnetic Suite 18.2 do oceny dokładności używa się tzw. *błędu energetycznego*, tzn. różnicy między energią rzeczywistych źródeł pola występujących w analizowanym obszarze, a energią źródeł obliczoną na podstawie uzyskanego rozwiązania [Maxwell Online Help]. Taka wielkość nie daje się jednak bezpośrednio przełożyć na błąd rozumiany jako średnie, lub maksymalne odchylenie obliczonej funkcji pola od wartości dokładnej. Z tego też powodu porównanie dokładności rezultatów otrzymanych za pomocą obu metod nastręcza trudności.

Zagadnienie modelowe

W celu porównania efektywności metod IMRF i MES przeprowadzono szereg testów numerycznych dla prostego układu modelowego. Składa się on z dwóch kul

przewodzących zanurzonych w nieograniczonym obszarze dielektrycznym (Rys. 1.). W obszarze tym potencjał elektrostatyczny spełnia równanie (1) i warunki brzegowe (2) na powierzchniach kul.



Rys. 1. Rozważany układ modelowy

Należy zwrócić uwagę, że analizowany układ cechuje się symetrią osiową względem osi OY. Symetrię tę można wykorzystać dla skrócenia czasu obliczeń (tak metodą IMRF jak i MES). W opisanych dalej testach numerycznych celowo z tego zrezygnowano, ponieważ umożliwia to ocenę dokładności otrzymanych rezultatów dla obu metod według ujednoczonego kryterium.

Testy przeprowadzono dla następujących danych:

Promienie kul: $R_1 = R_2 = 0,1$ m

Odległość między środkami kul: $d = 0,4$ m

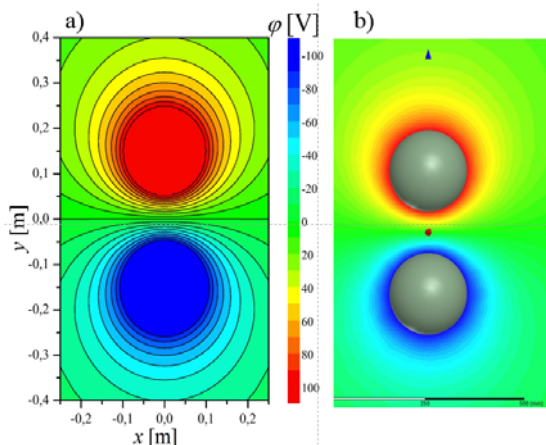
Potencjały kul: $V_1 = -V_2 = 100$ V

Obszar analizy pola: prostopadłościan o wymiarach $0,8 \times 0,5 \times 0,5$ m (por. Rys 1.)

Obszar zewnętrzny ograniczający przestrzeń (do analizy MES): prostopadłościan o wymiarach $8 \times 5 \times 5$ m.

Wszystkie opisane dalej testy numeryczne wykonano na komputerze z procesorem Intel® Core™ i7-3770 CPU @ 3.50GHz 3.90 GHz, RAM 32 GB.

Przykładowe rezultaty obliczeń rozkładu potencjału przedstawiono na Rys.2 a).



Rys. 2. Obliczony rozkład potencjału w płaszczyźnie OXY a) za pomocą IMRF b) za pomocą MES (w środowisku ANSYS Electromagnetic Suite 18.2)

Rezultaty obliczeń IMRF

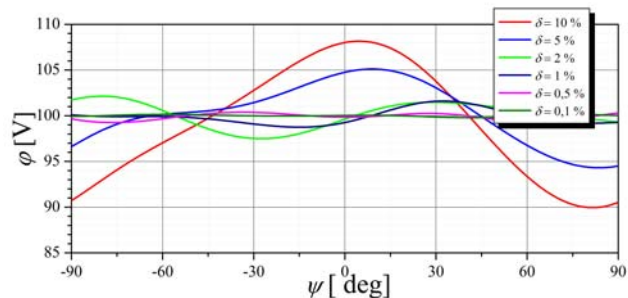
Program numeryczny realizujący opisaną procedurę IMRF został wykonany w języku FORTRAN 95 z użyciem kompilatora Microsoft Visual Studio 2010 Shell. Użytkownik

może zadać cztery kryteria zakończenia działania programu (przerwania pętli iteracyjnej):

- osiągnięcie żądanej wartości błędu brzegowego δ_k (por (5)),
- osiągnięcie żądanej wartości maksymalnego odchylenia lokalnego ϵ_{maxk} (por. (10)),
- maksymalną liczbę iteracji,
- maksymalny czas obliczeń.

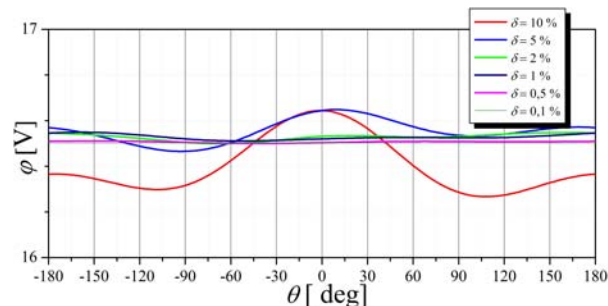
Ponadto, użytkownik może zadać liczbę źródeł fikcyjnych L_n uwzględnianych w każdym kroku iteracyjnym (por. (3)), od której w dużym stopniu zależy tempo zbieżności metody (por. wykresy na rysunkach 6 i 7).

Stopień spełnienia warunku brzegowego na powierzchni jednej z kul (wzdłuż jednego z południków), dla różnie zadanych dokładności (wartości błędu brzegowego) ilustruje wykres na rysunku 3.



Rys. 3. Rozkład potencjału na powierzchni kuli o promieniu R_1 (wzdłuż południka leżącego w płaszczyźnie OXY) obliczony za pomocą IMRF dla różnie zadanych dokładności

Na rysunku 4. przedstawiono obliczony rozkład potencjału wzdłuż okręgu $O(S, R)$ leżącego w płaszczyźnie równoległej do OXZ, o promieniu $R = 0,25$ m i środku w punkcie $S(0; 0,4; 0)$ m (por. Rys. 1).



Rys. 4. Rozkład potencjału na okręgu $O(S, R)$ (por. Rys. 1.) obliczony za pomocą IMRF dla różnie zadanych dokładności.

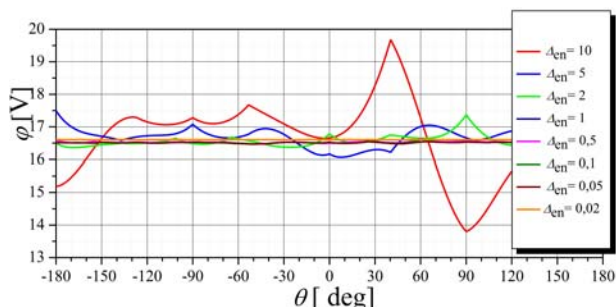
Ze względu na wspomnianą symetrię osiową zagadnienia, dokładna wartość potencjału na tym okręgu musi przyjmować wartość stałą. Różnice w wartościach obliczonych wynikają więc z niedokładności rozwiązania i również mogą posłużyć weryfikacji jego dokładności. Zgodnie z oczekiwaniami, różnice te są wyraźnie mniejsze niż na brzegach kul (por. Rys.3), co potwierdza tezę, że miarodajną dla oceny dokładności rozwiązania IMRF w całym analizowanym obszarze jest ocena dokładności spełnienia samych warunków brzegowych.

Rezultaty obliczeń MES

Obliczenia MES wykonano za pomocą oprogramowania ANSYS Electromagnetic Suite 18.2. Przykładowe rezultaty obliczeń rozkładu potencjału przedstawiono na Rys.2 b).

Dla oceny dokładności otrzymanego rozwiązania wykorzystano wspomniane wcześniej symetrie zagadnienia, których rozwiązania numeryczne, ze względu na ich przybliżony charakter, w pełni nie realizują. W tym celu

wykonano szereg testów polegających na obliczeniach pola na okręgach leżących w płaszczyznach równoległych do OXZ i środkach na osi OY (por. okrąg O na Rys.1.). Przykłady takich obliczeń, dla różnie zadanych dokładności (określanych w programie ANSYS przez wartość błędu energetycznego Δ_{en}), zaprezentowano na rysunku. 5.

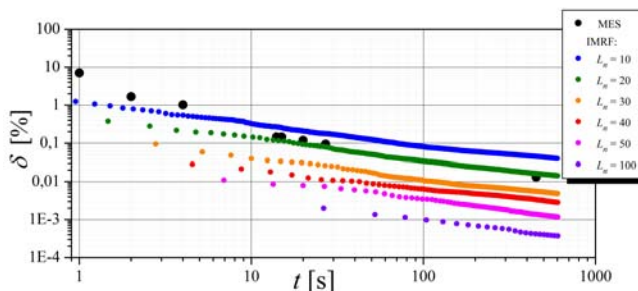


Rys. 5. Rozkład potencjału na okręgu O(S, R) (por. Rys. 1) obliczony za pomocą MES dla różnie zadanych wartości błędów energetycznych Δ_{en} .

Przyjmując wartość średnią funkcji potencjału na okręgu jako najbliższą wartości dokładnej wyznaczono odchylenie standardowe i maksymalne. Stanowią one miary dokładności rozwiązania analogiczne do δ_k i ε_{max} używanych w IMRF (por. (5) i (10)) i użyto ich do porównania efektywności obu metod.

Porównanie efektywności IMRF i MES

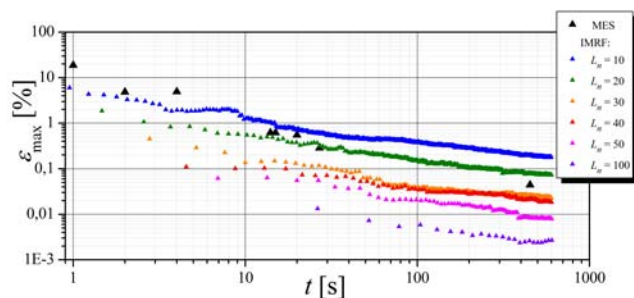
W celu oceny efektywności obydwu metod wykonano testy numeryczne pozwalające na określenie zależności δ_k i ε_{max} od rzeczywistego czasu obliczeń. Rezultaty zaprezentowano na rysunkach 6 i 7.



Rys. 6. Porównanie błędów średniokwadratowych dla wyników obliczeń za pomocą MES i IMRF

Z przedstawionych wykresów wynika, że tempo zbieżności IMRF w czasie rzeczywistym poprawia się w miarę zwiększania liczby fikcyjnych źródeł L_n uwzględnianych w pojedynczym kroku iteracji.

Dla $10 < L_n < 30$ efektywność obu metod można określić jako zbliżoną. Dla $L_n \geq 30$ zauważa się wyraźnie szybsze tempo zbieżności IMRF w stosunku do MES, bez względu na zadaną dokładność. Na przykład, dokładność $\delta = 0,1\%$ za pomocą IMRF można uzyskać już po czasie nieprzekraczającym 2 s (dla $L_n = 30$), a za pomocą MES dopiero po ok. 30 s. Dokładność $\delta = 0,01\%$ za pomocą IMRF można uzyskać po czasie ok. 7 s (dla $L_n = 50$), a za pomocą MES po ok. 450 s (ponad sześćdziesięciokrotna różnica).



Rys. 7. Porównanie błędów maksymalnych dla wyników obliczeń za pomocą MES i IMRF

Wnioski

Przeprowadzone badania efektywności metod IMRF i MES na podstawie zagadnienia modelowego elektrostatyki pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

- tempo zbieżności IMRF w czasie rzeczywistym silnie zależy od liczby fikcyjnych źródeł L_n uwzględnianych w pojedynczym kroku,
- przy odpowiednim doborze L_n , za pomocą IMRF można uzyskać rozwiązanie o danej dokładności w czasie wielokrotnie krótszym (nawet kilkadziesiąt razy) niż za pomocą MES,
- regularny charakter krzywych na rysunku 6 sugeruje możliwość udoskonalenia opisaną procedurę IMRF przez dynamiczne ustalanie optymalnej wartości L_n w każdym kroku iteracji.

Autorzy: dr hab. inż. Stanisław Pawłowski, prof. PRz, Politechnika Rzeszowska, Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów, E-mail: spawlo@prz.edu.pl; dr inż. Jolanta Plewako, Politechnika Rzeszowska, Katedra Energoelektroniki i Elektroenergetyki, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów, E-mail: jplewako@prz.edu.pl; mgr inż. Piotr Grodzki, Politechnika Rzeszowska, Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów, E-mail: prgo@prz.edu.pl.

LITERATURA

- [1] Collatz L., Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych, PWN, Warszawa, (1960)
- [2] Demenko A., Obwodowe modele układów z polem elektromagnetycznym, WPP Poznań, (2004)
- [3] Gołębiowski L., Kulig T. S., Metody numeryczne w technice, OWPRz Rzeszów, (2012)
- [4] Jabłoński P., Metoda elementów brzegowych w analizie pola elektromagnetycznego, WPCz, Częstochowa, (2003)
- [5] Brański A., Metody numeryczne rozwiązywania zagadnień brzegowych. Klasyfikacja i przegląd, OWPRz Rzeszów, (2013)
- [6] Pawłowski S., Solution of boundary value problem approximated by fundamental solutions, *Journal of Technical Physics*, 34 (1993), No 2, 161-172
- [7] Apanasewicz S., Pawłowski S., Plewako J., Application of an iterative method of fundamental solutions for the analysis of quasi-stationary electromagnetic field in the presence of non-linear magnetic bodies, *Przegląd Elektrotechniczny*, 89 (2013), nr 11, 304-308
- [8] Pawłowski S., Analiza pola elektrostatycznego w otoczeniu ciał przewodzących metodą aproksymacyjno-brzegową. *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Elektrotechnika*, Rzeszów, 17 (1996), nr 145, 69-80
- [9] Achieser N.I., Teoria aproksymacji, PWN, Warszawa (1957)