

doi:10.15199/48.2017.02.25

## Równania elektropiezospężystości tarczowego silnika piezoelektrycznego

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono rozszerzone równania elektropiezospężystości odniesione do silników piezoelektrycznych. Wyprowadzono równania pola sprężystego i elektrycznego oraz związki konstytutywne dla silnika piezoelektrycznego o konstrukcji tarczowej. Szczególne równania sformułowano dla przypadku najprostszej struktury materiału piezoelektrycznego stosowanego w tych silnikach.

**Abstract.** In the paper the electropiezoelectricity equations of piezoelectric motors are presented. Elastic and electric coupled fields equations and constitutive relations for disc piezoelectric motor are formulated. Peculiar form of equations in case of simplest piezoelectric material structure applied in these motors are defined. (**Electropiezoelectricity equations of disc piezoelectric motor**)

**Słowa kluczowe:** równania polowe i konstytutywne elektropiezospężystości, tarczowy silnik piezoelektryczny.

**Keywords:** electropiezoelectric fields and constitutive equations, electropiezoelectricity, disc piezoelectric motor.

### Wstęp

Pomimo stuletniej wiedzy o fizycznym efekcie piezoelektrycznym i skonstruowaniu pierwszego silnika piezoelektrycznego przed ponad pięćdziesięciu laty, jest faktem charakterystycznym rozwoju techniki, że dopiero od ćwierćwiecza nastąpił intensywny rozwój maszyn piezoelektrycznych.

Podstawową trudnością teorii tych maszyn są silnie sprzężone równania sprężystości i elektryczności przez związki konstytutywne również sprzężone. Trudności technologiczne i konstrukcyjne tych maszyn były (są) również związane z parametrami konstytutywnymi materiałów piezoelektrycznych. Należy jednak podkreślić, że rozwój konstrukcji silników piezoelektrycznych, w ostatnich latach i stopień ich miniaturyzacji jest nadzwyczajny.

Efekt piezoelektryczny został odkryty przez braci P. i J. Curie pod koniec dziewiętnastego wieku, natomiast teoria piezoelektryczności, obejmująca sprzężenie pola odkształceń z polem elektrycznym, została sformułowana przez Voigta [9], a następnie rozwinięta i uogólniona przez A.R. Toupina i D.R. Mindlina [10, 4]. Na wyróżnienie w tym miejscu zasługują prace, z dziedziny szeroko rozumianych pól sprzężonych, polskich uczonych S. Kaliskiego i W. Nowackiego. Zwieńczeniem tych badań jest monografia prof. W. Nowackiego [6].

Do ważnych monografii z dziedziny silników piezoelektrycznych można zaliczyć prace [1, 2, 3]. Należy odnotować, że prawdopodobnie pierwszy patent dotyczący silnika piezoelektrycznego był zgłoszony w połowie ubiegłego wieku [9].

Sprzężenie pola elektrycznego i sprężystego następuje w pewnego rodzaju materiałach (kryształach), cechujących się polaryzacją elektryczną, wskutek oddziaływań

mechanicznych (sprężystych)  $\vec{\sigma} \Rightarrow \vec{E}$  na pole elektryczne i odwrotnie materiał piezoelektryczny zmienia swoją postać

pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego  $\vec{E} \Rightarrow \vec{\varepsilon}$ ;

( $\vec{\varepsilon}, \vec{\sigma}, \vec{E}$  oznaczają odpowiednio: tensor odkształceń, tensor naprężeń i wektor natężenia pola elektrycznego).

Istotną trudnością w budowie silników piezoelektrycznych są problemy konstrukcyjne i technologiczne, które są skutecznie pokonywane. Świadczy o tym różnorodność konstrukcji i stosowanych materiałów oraz nadmieniona wysoka skala miniaturyzacji tych silników [2, 3, 7, 11].

Pomimo iż od pierwszego sformułowania teorii piezoelektryczności przez Voigta [12] upłynęło sto lat i nastąpiło dalsze jej rozwinięcie w pracach R.A. Toupina i R.D. Mindlina [13, 14] oraz w pracach W. Nowackiego [15], obejmujących szeroko rozumianą dziedzinę pól sprzężonych, to przystosowanie teorii i związków konstytutywnych do opisu działania silników piezoelektrycznych jest bardzo skromne (Appendix w pracy [2]).

Opis działania silników piezoelektrycznych jest formułowany dwutorowo, jak zazwyczaj postępuje się w opisach działania maszyn elektrycznych, a więc na podstawie zależności polowych i w oparciu o uproszczone metody obwodowe. Należy zauważyć, że opis obwodowy jest znacznie rozwinięty. Jednakże brak jest spójnego przejścia z opisu polowego do obwodowego. Należy podkreślić, że opis polowy jest oczywiście podstawowy.

W pracy podjęto próbę polowego ujęcia opisu działania silników piezoelektrycznych na podstawie ogólnego sformalizowanego opisu rozważanych zagadnień. Sformułowane w pracy zależności odniesiono do silnika o ruchu obrotowym i konstrukcji tarczowej.

### Podstawowe równania elektropiezospężystości

Z uwagi na dominację pola elektrycznego w oddziaływaniach elastopiezoelektrycznych, równania pola elektromagnetycznego ograniczono do zależności obejmujących tylko tę wielkość.

Zestaw równań pola elektromagnetycznego i pola sprężystości w zapisie wskaźnikowym z notacją tensorową, stosowaną powszechnie w teorii sprężystości [14, 15], ma postać:

– równania elektryczności

$$(1) \quad \epsilon_{ijk} E_{k,j} = -\dot{B}_i; \quad (\Leftrightarrow \text{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t})$$

$$(2) \quad D_{k,k} = \rho_q; \quad (\Leftrightarrow \text{div} D = \rho)$$

$$(3) \quad J_{k,k} + \rho_q = 0$$

gdzie:  $B_k$  – składowe wektora indukcji magnetycznej,  $E_k$  – składowe wektora natężenia pola elektrycznego,  $D_k$  – składowe wektora indukcji elektrycznej,  $J_k$  – składowe wektora gęstości prądu,  $\rho_q$  – gęstość ładunku,  $\epsilon_{ijk}$  – symbol permutacyjny Ricciego.

– równania elastokinetyki

$$(4) \quad \sigma_{ji,j} + f_i = \rho_m \ddot{u}_i$$

oraz

$$(5) \quad \varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i})$$

gdzie:  $\sigma_{ij}$  – składowe tensora naprężeń,  $u_k$  – składowe wektora przemieszczeń,  $\varepsilon_{ij}$  – składowe tensora odkształceń,  $f_i$  – składowe wektora sił objętościowych,  $\rho_m$  – gęstość ośrodka,  $\ddot{u}_i$  – składowe wektora przyspieszenia;  
– pierwszy wskaźnik w indeksie naprężeń tensorowych oznacza współrzędną normalną do powierzchni oddziałującego naprężenia, a drugi wskaźnik współrzędną naprężenia;

– przecinek przy dolnych wskaźnikach oznacza różniczkowanie po współrzędnej przestrzennej, a po wskaźnikach powtarzających się dokonuje się sumowania.

Należy zaznaczyć, że zapis wskaźnikowy ( $D_{i,i}$ ) równań ma tę dogodność nad zapisem konwencjonalnym ( $\text{div } D$ ), że ujawnia zasady rachunku określonego operatora na wielkości fizycznej. Trzeba w tym miejscu zaznaczyć, że równanie (1) ma tylko znaczenie formalne, jako podstawowe równie Maxwella, lecz nie jest wykorzystywane w dalszych rozważaniach, ponieważ w tych silnikach główną determinantą przemian elektropiezospężystych jest potencjał elektryczny wyznaczający natężenie i indukcję pola elektrycznego.

Główną trudnością w analizie oddziaływań elastopiezoelektrycznych, jak we wszystkich zagadnieniach technicznych pól fizycznych, są związki konstytutywne definiujące rozważane ośrodki (środoiska) i jednocześnie w tym zagadnieniu sprzęgające efekty mechaniczne z elektrycznymi.

Związki konstytutywne mają postać:

$$(6) \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k$$

$$(7) \quad D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \beta_{ik} E_k$$

gdzie:  $C_{ijkl}$  – tensor sztywności,  $e_{kij}$  – tensor piezoelektryczny,  $\beta_{ik}$  – tensor przenikalności dielektrycznej.

Tensor sztywności  $C_{ijkl}$  o walencji 4 zawiera 21 składowych przy uwzględnieniu symetrii; tensor piezoelektryczny  $e_{kij}$  o walencji 3, ma 18 składowych przy symetrii względem dwu wskaźników  $kl$ ; tensor przenikalności dielektrycznej  $\beta_{ik}$  o walencji 3, jest symetryczny o 6 składowych.

Zależność (6) jest rozszerzonym związkiem Hooke'a w układzie równań sprężystości o składnik  $e_{kij} E_k$ , ujmujący oddziaływania piezoelektryczne na stan naprężeń. W zależności (7) stanowiącej związek materiałowy indukcji elektrycznej z natężeniem pola elektrycznego przez tensor przenikalności dielektrycznej  $\beta_{ik}$ , dołączony jest składnik zawierający tensor odkształcenia  $\varepsilon_{kl}$  i materiałowy tensor piezoelektryczny  $e_{kij}$ . Elementem charakterystycznym tych związków jest identyczność miana fizycznego parametru konstytutywnego  $e_{kij}$  z wielkością pola fizycznego  $D_k$  – indukcją elektryczną.

Układ równań (2 – 7) uzupełnia się warunkami brzegowymi. W części powierzchni mogą być zadane przemieszczenia, a w części naprężenia:

$$(8) \quad u_i(\xi^*, t) = U_i(t)$$

$$(9) \quad p_i^* = \sigma_{ji}(\xi^*, t) n_j(\xi^*)$$

gdzie:  $\xi^*$  oznacza współrzędną wyróżnionej powierzchni brzegowej w przyjętym układzie współrzędnych  $\langle \xi, \varphi, \zeta \rangle$  (związanym ze stojaniem) parametryzującym przetwornik.

W zagadnieniach opisu silników piezoelektrycznych o ruchu obrotowym stosuje się warunek brzegowy naprężeniowy (9), określający docisk rotora do piezoelektrycznego twornika – stojana.

Odnosząc współrzędne przestrzenne  $\langle \xi, \varphi, \zeta \rangle$  do układu cylindrycznego, przyjmuje się oznaczenia  $\langle r, \varphi, z \rangle$ .

Dla pola elektrycznego warunki brzegowe mogą być zadane w reprezentacji potencjału elektrycznego  $V$  lub wektora natężenia pola elektrycznego  $E$ , który określa się gradientem tego potencjału

$$(10) \quad E_i = -V_{,i}; \quad (E = -\text{grad } V)$$

W silnikach piezoelektrycznych o ruchu obrotowym: cylindrycznych, tarczowych i o toczącym się wirniku pole elektryczne twornika, wytwarzające oddziaływania piezoelektryczne, może być polem o jednej składowej:  $\langle E_r \rangle$ ,  $\langle E_\varphi \rangle$ ,  $\langle E_z \rangle$  lub polem dwuskładowym:  $\langle E_r, E_\varphi \rangle$ ,  $\langle E_r, E_z \rangle$ ,  $\langle E_\varphi, E_z \rangle$ .

Ograniczając rozważania do ośrodka materialnego typu piezoelektrycznego i pomijając siły objętościowe oraz przyjmując niewystępowanie ładunków elektrycznych, równania (2, 4) redukują się do zestawu równań stanu sprężystego i elektrycznego:

$$(11) \quad \begin{aligned} \sigma_{ji,j} &= \rho_m \ddot{u}_i \\ D_{i,i} &= 0 \end{aligned}$$

natomiast związki konstytutywne (6, 7) pozostają bez zmian.

Uwzględniając związek konstytutywny dla indukcji elektrycznej i natężenia pola elektrycznego, oraz wyrażając pole elektryczne przez potencjał, oraz wykorzystując naprężeniowy związek konstytutywny piezosprężystości i zastępując tensor odkształceń przez przemieszczenia, równania piezoelektryczności mają postać:

$$(12) \quad \begin{aligned} C_{ijkl} u_{k,lj} + e_{kij} V_{,kji} &= \rho \ddot{u}_i \\ e_{ikl} u_{k,li} - \beta_{ik} V_{,ki} &= 0 \end{aligned}$$

Ostatecznie można uznać, że opis działania silnika piezoelektrycznego o dowolnej kinetyce i formie strukturalnej (nawet o ruchu złożonym) ujmują równania (11), stanowiące cztery równia dość silnie sprzężone. Z uwagi na charakterystyczne sprzężenie związków konstytutywnych i generowanie w urządzeniach piezoelektryków naprężeń o wymuszeniu elektrycznym i wzbudzenie indukcji elektrycznej wskutek odkształceń ośrodka piezoelektrycznego można wydzielić odpowiednie składniki naprężeń i indukcji elektrycznej. Tak więc naprężenia od wymuszenia elektrycznego można zapisać w postaci:

$$(13) \quad \sigma_{ij}^{(e)} = -e_{kij} E_k$$

a indukcję elektryczną od oddziaływania naprężeniowego w postaci:

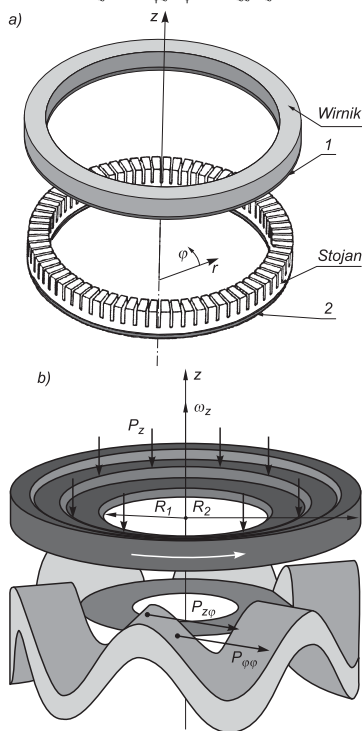
$$(14) \quad D_i^{(n)} = e_{ikl} \varepsilon_{kl}$$

W zakończeniu ogólnego opisu elektro-piezoelastodynamiki przetworników elektromechanicznych należy zauważyć, iż z uwagi na postęp w dziedzinie materiałów piezoelektrycznych o własnościach ferroelektrycznych oraz osobliwych piezoelektryków organicznych, będzie miało znaczenie wprowadzenie oddziaływań (sił) określonych również tensorem Maxwella, wyznaczonym wielkościami elektrycznymi. Kwestię tę autor zasygnalizował w pracy [10]. Należy w tym miejscu nadmienić, że w większości prac dotyczących silników piezoelektrycznych (ultrasonicznych) nie są explicitie wypisywane ogólne równania pól.

## Model i podstawowe równania elektro-piezonaprężeniowe silnika tarczowego

Jednym z typowych silników piezoelektrycznych jest silnik o strukturze tarczowej. Podstawowymi elementami są: stojan złożony z zespołu piezoelektrycznych elektrod pod kolektorowym pierścieniem jarzma stojana oraz wirnik, złożony z pierścienia deformacyjno-kontaktowego i jarzmo wirnika (rys. 1). Kryształy piezoelektryczne dla takiej konstrukcji silnika mogą być spolaryzowane w ogólnym przypadku układem dwu zestawów elektrod generujących pole elektryczne o dwu składowych – tangencjalnej i aksjalnej  $E_\varphi, E_z$ . Efekt o tak zorientowanych składowych pola elektrycznego wywołuje fale podłużną i poprzeczną deformacji. W takiej strukturze podstawowymi oddziaływaniami (siłami) będą naprężenia brzegowe o składowej tangencjalnej i aksjalnej:

$$(15) \quad \begin{aligned} P_\varphi &= \sigma_{\varphi\varphi} n_\varphi + \sigma_{z\varphi} n_z \\ P_z &= \sigma_{\varphi z} n_\varphi + \sigma_{zz} n_z \end{aligned}$$



Rys. 1. Szkic a) modelowy i b) poglądowy silnika piezoelektrycznego tarczowego: 1- pierścień deformacyjny, 2- struktura piezoelektryczna

Należy podkreślić, że w silniku tarczowym oddziaływaniem podstawowym, w efekcie momentu elektropiezoelastycznego, jest naprężenie tangencjalne  $p_\varphi$ :

$$(16) \quad \vec{T}_e = \frac{m}{\tau} \int_0^\tau \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{R_1}^{R_2} p_\varphi r^2 dr d\varphi dt$$

gdzie:  $m$  – liczba segmentów elektrod silnika,  $\tau$  – okres częstości zmian w czasie przebiegu fali sprężystej,  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$  – rozmiar obwodowy strefy potencjałowej elektrod,  $R_1, R_2$  – promień wewnętrzny i zewnętrzny tarczy wirnika.

Pole naprężeń obejmuje, więc składowe tensora naprężeń  $\sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{z\varphi}, \sigma_{zz}$  w obszarze kontaktu stojana i wirnika ( $n_\varphi, n_z$  – składowe wektora normalnego w punkcie kontaktu).

Pole przemieszczeń zawiera składowe  $u_\varphi, u_z$ , którym od-powiadają następujące odkształcenia  $\varepsilon_{\phi\phi} = u_{\phi,\phi}$ ,

$\varepsilon_{\phi z} = 0.5(u_{\phi,z} + u_{z,\phi}), \varepsilon_{zz} = u_{z,z}$  przez które z kolei określone są naprężenia i składowe indukcji elektrycznej:

$$(17) \quad \begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= C_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} + C_{\varphi\varphi z z} \varepsilon_{z z} + C_{\varphi\varphi\varphi z} \varepsilon_{z\varphi} - e_{\varphi\varphi\varphi} E_\varphi - e_{z\varphi\varphi} E_z \\ \sigma_{r\varphi} &= C_{\varphi z\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} + C_{\varphi z z z} \varepsilon_{z z} + C_{\varphi z\varphi z} \varepsilon_{\varphi z} - e_{\varphi\varphi z} E_\varphi - e_{z\varphi z} E_z \\ \sigma_{z z} &= C_{\varphi\varphi z z} \varepsilon_{\varphi\varphi} + C_{z z z z} \varepsilon_{z z} + C_{\varphi z\varphi z} \varepsilon_{\varphi z} - e_{\varphi z z} E_\varphi - e_{z z z} E_z \end{aligned}$$

$$(18) \quad \begin{aligned} D_\varphi &= e_{\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} + e_{\varphi r\varphi} \varepsilon_{r\varphi} + \beta_\varphi E_\varphi \\ D_z &= e_{z z z} \varepsilon_{z z} + e_{r r\varphi} \varepsilon_{r\varphi} + \beta_z E_z \end{aligned}$$

## Syntetyczny zapis równań z uwzględnieniem symetrii tensorów fizycznych i konstytutywnych

Ze względu na symetrię funkcji elastokinetycznych (naprężeń i odkształceń) oraz symetrię, podług niektórych wskaźników, parametrów konstytutywnych: sprężystości, piezoelektryczności i przenikalności elektrycznej, można uprościć notację zespalając w jedno oznaczenie pary indeksów, względem, których rozpatrywany tensor jest symetryczny. Zmniejszają się jednocześnie liczby stałych materiałowych w związkach konstytutywnych (6, 7) i równia przyjmują formę syntetyczną.

Dla naprężeń i odkształceń przyjmuje się odpowiednie oznaczenia,

$$t_n \leftrightarrow \sigma_{ij} \quad d_n \leftrightarrow \varepsilon_{ij}$$

$$(19) \quad d_n = \begin{cases} \varepsilon_{ij} & n=1,2,3; i=j \\ \varepsilon_{ij} & n=4,5,6; i \neq j \end{cases}$$

Dla parametrów konstytutywnych wprowadza się oznaczenia:  $C_{ijkl} \leftrightarrow c_{ik}, e_{ikl} \leftrightarrow e_{im}, \beta_{ij} \leftrightarrow \beta_{ji}$

Z zastosowanej notacji do zapisu naprężeń i odkształceń wynika, że wielkości te z indeksem o numeracji  $n=1, 2, 3$  oznaczają wielkości główne - normalne, a z indeksem o numeracji  $n=4, 5, 6$  są wielkościami stycznymi. A zatem :

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_{11}, t_2 = \sigma_{22}, t_3 = \sigma_{33}, \\ t_4 &= \sigma_{23}, t_5 = \sigma_{31}, t_6 = \sigma_{12} \\ d_1 &= \varepsilon_{11}, d_2 = \varepsilon_{22}, d_3 = \varepsilon_{33}, \\ d_4 &= 2\varepsilon_{23}, d_5 = 2\varepsilon_{31}, d_6 = 2\varepsilon_{12} \end{aligned}$$

Równania stanu sprężystego i elektrycznego mają postać:

$$(22) \quad \begin{aligned} t_{1,1} + t_{6,2} + t_{5,3} &= \rho_m \ddot{u}_1 \\ t_{6,1} + t_{2,2} + t_{4,3} &= \rho_m \ddot{u}_2 \\ t_{5,1} + t_{4,2} + t_{3,3} &= \rho_m \ddot{u}_3 \end{aligned}$$

$$(23) \quad D_{1,1} + D_{2,2} + D_{3,3} = 0$$

Równania dla silnika tarczowego w tej notacji mają postać:

$$(24) \quad t_{2,2} + t_{4,3} = \rho_m \ddot{u}_2$$

$$t_{4,2} + t_{3,3} = \rho_m \ddot{u}_3$$

$$(25) \quad D_{2,2} + D_{3,3} = 0$$

Uwzględniając zależności na tensory naprężeń (w związkach konstytutywnych) i na odkształcenia oraz wyrażając wielkości elektryczne przez potencjał, można równania elektropiezonaprężeniowe, w reprezentacji przemieszczeń i potencjału elektrycznego, zapisać w postaci

$$(27) \quad c_{2k} u_{2,2k} + c_{k3} u_{3,3k} + c_{k4} (u_{2,3k} + u_{3,2k}) + c_{24} u_{2,2k} + c_{34} u_{3,3k} + c_{k4} (u_{2,3k} + u_{3,2k}) +$$

$$(28) \quad -e_{k2} \varphi_{,2k} - e_{k3} V_{,3k} - e_{24} V_{,2k} - e_{34} V_{,3k} = \rho_m \ddot{u}_k$$

$$e_{22} u_{2,22} + e_{23} u_{3,32} + e_{24} (u_{2,32} + u_{3,22}) + e_{32} u_{2,23} + e_{33} u_{3,33} + e_{34} (u_{2,33} + u_{3,23}) + \beta_2 V_{,22} + \beta_3 V_{,33} = 0$$

gdzie:  $k=2, 3$ , a  $k^*=3$  dla  $k=2$ ,  $k^*=2$  dla  $k=3$ .

Sformułowane równania dla silnika tarczowego mają najogólniejszą postać przy dwuskładowym polu elektrycznym  $E_\varphi$ ,  $E_z$  i można te równania przystosować do innej struktury silnika obrotowego i innej formy pola elektrycznego.

### Równania silnika piezoelektrycznego dla najprostszej struktury piezomateriałów

W prezentowanym przykładzie stałe materiałowe są odniesione do struktury krystalicznej piezokryształów, która zapewnia realizację wskazanych naprężeń.

Najszerzy zbiór parametrów materiałowych sprężystych i piezoelektrycznych cechuje układ krystaliczny jednoskośny z płaszczyzną symetrii  $\xi_1 \xi_2$  –

$$\{c_{22}, c_{23}, c_{33}, c_{44}; e_{22}, e_{32}, e_{23}, e_{33}, e_{24}, e_{34}\}.$$

Drugi pod względem liczebności jest układ trygonalny z trójkrotną osią równoległą do osi  $\xi_3$ ; -  $\{c_{22}, c_{23}, c_{33}, c_{44}; e_{22}, e_{32}, e_{33}, e_{24}\}$ .

Układ heksagonalny z sześciokrotną osią równoległą do osi  $\xi_2$  cechuje się parametrami -  $\{c_{22}, c_{23}, c_{33}, c_{44}; e_{32}, e_{33}, e_{24}\}$ .

Najprostszym pod względem piezoelektrycznym jest ustrój krystaliczny heksagonalny o dwukrotnej osi równoległej do osi  $\xi_2$  -  $\{c_{22}, c_{23}, c_{33}, c_{44}; e_{22}\}$ .

Dla najprostszej struktury materiałowej ośrodka piezoelektrycznego równania elektropiezoelastyczne w zapisie wektorowym i cylindrycznym układzie współrzędnych mają postać:

$$(29) \quad c_{22} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + c_{23} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + c_{44} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi \partial z} - e_{22} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = \rho_m \ddot{u}_\varphi$$

$$(c_{23} + c_{44}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi \partial z} + c_{33} \frac{\partial^2 u_{zz}}{\partial z^2} + c_{44} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} - e_{22} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = \rho_m \ddot{u}_z$$

$$e_{22} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \beta_\varphi \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

Tak więc opis silnika piezoelektrycznego tarczowego w najprostszym przypadku; – jednoskładowej indukcji elektrycznej, jednej składowej tensora piezoelektrycznego i dwuskładowym polu przemieszczeń określony jest trzema równaniami różniczkowymi sprzężonymi przez wszystkie funkcje pola.

**Autor:** Dr hab. inż. Włodzimierz Przyborowski, Politechnika Warszawska, Instytut Maszyn Elektrycznych, Pl. Politechniki 1, 00-662 Warszawa E-mail: [Wlodzimierz.Przyborowski@ime.pw.edu.pl](mailto:Wlodzimierz.Przyborowski@ime.pw.edu.pl).

### LITERATURA

- [1] Lawrenko W. W., Kartaszew I. A., Wiszniewskij W. S.: Piezoelektriceskije dwigatieli, Energija, Moskwa, 1980.
- [2] Ueha S., Tomikawa M., Kurosawa M., Nakamura N.: Ultrasonic Motors. Theory and Application, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [3] Sashida T., Kenjo T., An introduction to ultrasonic motors, Oxford, Clarendon Press, 1993.
- [4] Dąbrowski M.: Evolution of the theory and application of ultrasonic motors. Prace Instytutu Elektrotechniki, zeszyt 208, 2001.
- [5] Kosiński Z., Szemla A.: Piezomechaniczny przetwornik energii z tarczowym rezonatorem i pasywnymi koncentratorami ruchu. Projektowanie mechatroniczne, Zagadnienia wybrane, AGH Kraków, 2004.
- [6] Hao M., Chen W.: Analysis and Design of a Ring-type Traveling Ultrasonic Motor, Proceeding of the IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, Luoyang China 2006.
- [7] Ting Y., Tsai Y, Hou B-K., Lin S-C., Lu C-C.; Stator Design of a New Type of Spherical Piezoelectric Motor. IEEE Transaction on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 57, No 10, 2010.
- [8] Ryndzionek R., Rouchon J-F., Ronkowski M: Koncepcja realizacji i analiza nowego typu silnika piezoelektrycznego o strukturze wielokomórkowej. Zeszyty BOBRME Komel, nr 100, 4/2013.
- [9] Williams A., Brown W.: Piezoelectric Motor Patent N° 2439499 USA 1948.
- [10] Przyborowski W.: Podstawy teorii elektropiezoelastycznych przetworników – silników piezoelektrycznych Zeszyty BOBRME Komel nr 100, 4/2015.
- [11] Heywang W., Lubitz K., Wersing W. Piezoelectricity, Evolution and Future of a Technology Springer 1995.
- [12] Voigt W.: Lehrbuch der Kristall-physik, Taubner, Leipzig 1910.
- [13] Mindlin R.D.: On the equation of motion piezoelectric crystals, Problem of Continuum Mechanics, SIAM Philadelphia, Pensylwania 1961.
- [14] Toupin R.A.: A dynamical theory of elastic dielectrics, Int. J. Engrn. Sci. 1, 101, 1963.
- [15] Nowacki W.: Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych, PWN, Warszawa 1983.