

doi:10.15199/48.2017.02.32

## Modelowanie silnika BLDC na potrzeby diagnostyki

### Część I: Model polowy

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono proces budowy modelu magnetycznego dla silnika synchronicznego bezszczotkowego. Przedstawiono pokrótce aparat matematyczny i zrealizowano kolejne etapy modelowania. Osobno analizowano rozkład pola od magnesów trwałych i prądów fazowych. Zaproponowano sposób zamodelowania niejednorodności szczeliny spowodowanej obecnością żłobków stojana. Dokonano porównania wyników otrzymanych z modelu analitycznego i modelu MES.

**Abstract.** In the paper the process of construction of the analytical magnetic model of brushless synchronous motor was presented. At the beginning a mathematical tools was briefly depicted. Next, all important stages in the development of 2-D motor model were analyzed. Separately was analyzed the magnetic field distribution of the permanent magnets and the phase currents. Effect of a demagnetization of magnets was considered. Concept of the relative permeance function was used to take into consideration a slotting effect. Result from an analytical model was compared with the FEM model results which showed good agreement of both models. **The process of construction of the analytical magnetic model of brushless synchronous motor. Part 1: Field model**

**Słowa kluczowe:** modelowanie, silnik BLDC, diagnostyka, model polowy.

**Keywords:** modeling, BLDC motor, diagnosis, magnetic field model.

#### Wstęp

Dokładna analiza badanego obiektu jest zasadniczym etapem w zadaniu diagnozowania stanu technicznego. Jest to istotne nie tylko ze względu na dokładniejsze przestudiowanie zasady działania obiektu, lecz także pozwala rozwijać bardziej zaawansowane metody analizy sygnałów. W celu lepszego zrozumienia mechanizmów oddziaływania błędów mechanicznych na symptomy diagnostyczne budowane są odpowiednie modele. Interesujące podejście do modelowania silników BLDC stosowane było na przełomie ostatnich 40 lat głównie na potrzeby projektowania tego typu silników.

Można wskazać znaczną liczbę publikacji, w których autorzy starali się opisać zjawiska zachodzące w silniku poprzez analityczny opis zjawisk fizycznych. W pracach [1]–[5] autorzy stosowali dwuwymiarowy model do analizy rozkładu pola magnetycznego w szczeliny silnika BLDC. Ważny wkład stanowią prace [6], [7], w których autorzy po raz pierwszy dokonali całościowego opisu rozkładu pola magnetycznego pochodzącego od magnesów trwałych wirnika i prądów fazowych uzwojeń stojana. Rezultaty tych badań znaleźć można w innych pracach [8], [9], w których autorzy analizowali tak zwane subdomenowe modele. Wprowadzały one znaczące rozwinięcie opisu rozkładu pola w silniku. Uzyskiwano bardzo dużą zbieżność wyników pomiędzy modelami analitycznymi i MES. Wiele prac poświęconych było także zagadnieniom uwzględniania błędów mechanicznych, głównie niewspółosiowości. Analizowano ich wpływ nie tylko na rozkład pola, lecz także na poziom drgań czy pulsowanie momentu.

Niemniej autorowi nie udało się znaleźć kompletnego modelu opisującego wpływ błędów mechanicznych nie tylko na rozkład pola w szczeliny czy obszarze magnesów, lecz także na rozkład pola wokół silnika. Nie udało się także znaleźć pracy, która uwzględniałaby także wpływ uszkodzeń na chwilową wartość prądów fazowych, co ma istotny wpływ na całkowity rozkład pola w przestrzeni silnika. Był to jeden z motywów, jakie skłoniły autora do podjęcia się zadania opisu wpływu wybranych uszkodzeń mechanicznych na procesy zachodzące w silniku BLDC. Skupiono uwagę na błędach niewspółosiowości oraz pulsowaniu momentu obciążającego, poprzez które oddziałują na silnik uszkodzenia mechaniczne (np. łożysk czy przekładni współpracujących z silnikiem) oraz na demagnetyzacji.

W niniejszej pracy opisano podstawowy wariant modelu analitycznego pozwalający wyznaczyć rozkład pola w przestrzeni silnika pochodzącego od magnesów trwałych wirnika oraz prądów fazowych. Na tym etapie uwzględniono jedynie błąd demagnetyzacji. W kolejnej pracy przedstawione zostanie analityczne rozwiązanie opisu błędu niewspółosiowości oparte na metodzie perturbacyjnej. Według tej metody opis rozkładu pola można przedstawić w postaci sumy rozwinięć kolejnych rzędów, przy czym przedstawiony w niniejszej pracy opis stanowi punkt wyjścia dla dalszych analiz. Proces modelowania zrealizowano pod kątem silnika BG75x75SI firmy Dunkermotoren. Jest to trójfazowy silnik o czterech parach biegunów wirnika, sześciu żłobkach stojana, posiadający po dwie cewki na jeden biegun magnetyczny stojana. W kolejnych rozdziałach opisano przyjęte założenia upraszczające oraz podstawowe etapy budowy modelu.

#### Aparat matematyczny

Wychodząc od równania Maxwella (1), dla przypadku magnetostatyki można zdefiniować równanie potencjału skalarnego (2) i (3).

$$(1) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$(2) \quad \Delta \varphi = \operatorname{div}(\mathbf{M})$$

$$(3) \quad \Delta \varphi = 0$$

gdzie:  $\mathbf{B}$  – wektor indukcji pola magnetycznego,  $\mathbf{M}$  – wektor magnetyzacji,  $\varphi$  – potencjał skalarny.

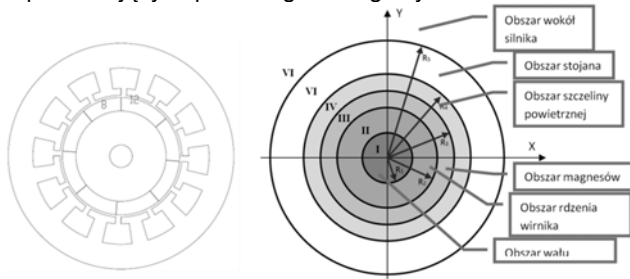
Równanie (3) zwane równaniem Laplace'a jest szczególnym przypadkiem równania Poissona (2). Ze względu na symetrię rozpatrywanych geometrii korzystnie jest stosować opis w biegunowym układzie współrzędnych  $(r, \theta)$ . Stosując metodę separacji zmiennych można wyznaczyć równanie potencjału spełniające równanie Laplace'a:

$$(4) \quad \varphi(r, \theta) = (A\theta + B)(C \ln(r) + D) + (Cr' + Dr') \left( A \cos(\theta \sqrt{\lambda}) + B \sin(\theta \sqrt{\lambda}) \right)$$

gdzie  $\gamma = \beta^2$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  to stałe, których wartość musi zostać określona na podstawie warunków brzegowych.

## Podział silnika na regiony

Zadanie modelowania silnika sprowadza się do rozwiązania układu równań różniczkowych cząstkowych reprezentujących poszczególne regiony silnika.



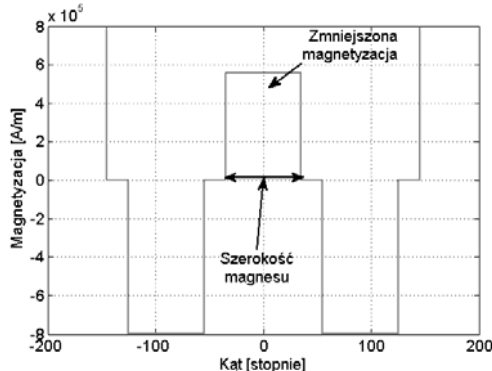
Rys. 1. Reprezentacja geometrii przekroju 2D silnika przez proste kształty geometryczne

Powstały one na skutek uproszczenia charakterystycznych obszarów przekroju poprzecznego silnika, co pokazano na rysunku 1.

Każdy z tych obszarów opisany jest za pomocą przenikalności magnetycznej oraz charakterystycznych wartości promieni. Każdemu z obszarów odpowiadać będzie jedno równanie różniczkowe cząstkowe w postaci (2) lub (3). Zaproponowany model jest więc modelem dwuwymiarowym. Jest to uproszczenie, które zakłada nieskończoną długość poosiową silnika.

## Rozkład wektora magnetyzacji

W pierwszym etapie tworzenia modelu wyznaczono rozkład wektora magnetyzacji magnesów trwałych w funkcji kąta w układzie współrzędnych biegunowych. W pracy ograniczono się jedynie do przypadku magnetyzacji promieniowej magnesów, spotykany w współczesnych konstrukcjach silników. Skupiono się jedynie na wirnikach z magnesami jawnymi umieszczonymi na powierzchni rotora. Na poniższym rysunku (rys. 2) przedstawiono wykres magnetyzacji  $M_r$  (składowej radialnej) w funkcji kąta.



Rys. 2. Rozkład wektora magnetyzacji  $M$  dla 4-biegunowego wirnika

Na wirniku silnika naklejoną jest  $p$ -par magnesów trwałych. Zakłada się, że wszystkie powierzchnie geometryczne magnesów są styczne lub prostopadłe do promienia wychodzącego ze środka biegunowego układu współrzędnych. W takim przypadku możliwe jest przedstawienie wektora magnetyzacji w układzie współrzędnych prostokątnych, jak to zostało zrobione. Na wykresie  $M_r(\theta)$  (Rys. 2) zaznaczono efekt demagnetyzacji. Rozwinięcie wektora magnetyzacji w szereg Fouriera przy uwzględnionej symetrii problemu opisuje równanie (5)

$$(5) \quad M_r(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M^n(n) \cos(n\theta)$$

gdzie:

$$(6) \quad M^n(n) = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2p(1+k_m)}\right) \left[ M_D + (-1)^n M_0 + 2M_0 \sum_{i=2}^p (-1)^{i-1} \cos\left(n(i-1)\frac{\pi}{p}\right) \right]$$

$$(7) \quad A_0 = \frac{1}{2p(1+k_m)} (M_D - M_0)$$

gdzie:  $k_m$  – współczynnik otwarcia bieguna magnetycznego,  $M_0$  – amplituda magnetyzacji sprawnych magnesów,  $M_D$  – amplituda magnetyzacji uszkodzonego magnesu.

Równanie (5) przyjmuje niezerowe wartości dla  $n=(2k-1)p$  gdzie  $k=1,2,3,\dots$  tylko dla przypadku braku demagnetyzacji. W przypadku wystąpienia demagnetyzacji równanie (5) przyjmuje niezerowe wartości dla wszystkich  $n$ . W przypadku wprowadzenia obrotu wału po przekształceniach otrzymuje się następującą zależność na funkcję opisującą rozkład wektora magnetyzacji:

$$(8) \quad M_r(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (M_n^C \cos(n\theta) + M_n^S \sin(n\theta))$$

gdzie  $\beta$  – kąt obrotu wału silnika oraz odpowiednio:

$$M_n^C = M^n(n) \cos(n\beta)$$

$$M_n^S = M^n(n) \sin(n\beta)$$

## Opis rozkładu pola od magnesów trwałych

Na wstępie uwzględnione zostanie tylko źródło w postaci magnesów trwałych, a pominięty zostanie wpływ prądów fazowych. Efekt zmiennej szerokości szczeliny powietrznej nie zostanie uwzględniony. Problem znalezienia rozkładu potencjału należy rozpocząć od podzielenia przekroju silnika na poszczególne obszary. Każdy obszar opisany jest jednym równaniem różniczkowym cząstkowym, natomiast przejście pomiędzy dwoma sąsiednimi obszarami opisane jest za pomocą warunków granicznych (w tym przypadku warunku brzegowego Neumanna).

Dla drugiego obszaru przyjmuje się ograniczenia zmiennych według (9) oraz warunki brzegowe według (10) i (11). Obszar ten to pierścień o wewnętrznym promieniu  $R_1$  i promieniu zewnętrznym  $R_2$ . Odpowiada on obszarowi rdzenia magnetycznego rotora. W tym obszarze nie ma żadnych źródeł, dlatego pełny opis rozkładu potencjału opisuje równanie Laplace'a. Warunki brzegowe według zależności (9) określają rozkład pola magnetycznego na brzegach pierścienia.

$$(9) \quad R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$(10) \quad H_\theta^i(R_i, \theta) = H_\theta^{i+1}(R_i, \theta), B_r^i(R_i, \theta) = B_r^{i+1}(R_i, \theta)$$

$$\text{dla } i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$(11) \quad B_r(R_i, \theta) = B_r(R_3, \theta) + \mu_0 M_r$$

$$(12) \quad \mathbf{H}(r, \theta) = \begin{bmatrix} H_r(r, \theta) \\ H_\theta(r, \theta) \end{bmatrix}$$

$$(13) \quad H_r(r, \theta) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, H_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

Uwzględniając okresowość rozwiązania z warunku (9), otrzymuje się:

$$(14) \quad \sqrt{\lambda} = n$$

$$n = (2k-1)p, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Pełnym rozwiązaniem równania Laplace'a jest suma szczególnych rozwiązań dla poszczególnych  $n$ , co pokazano poniżej:

$$(15) \quad \varphi^H(r, \theta) = C_0^H + D_0^H \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^H r^n + B_n^H r^{-n}) \cos(n\theta) + (C_n^H r^n + D_n^H r^{-n}) \sin(n\theta)$$

Dla rozróżnienia równań potencjału i pola wprowadzono górny indeks wskazujący przynależność równania i niewiadomych współczynników do konkretnego obszaru silnika. Korzystając z własności przekształcenia szeregu Fouriera, po podstawieniu (15) do (13) oraz przekształceniu otrzymuje się dwa zestawy równań (dla granicy  $r = R_1$  oraz  $r = R_2$ ) wyznaczających nieznanne współczynniki:

$$(16) \quad \left. \begin{aligned} -n(A_n^H r^{n-1} - B_n^H r^{-n-1}) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H^{rH}(r, \theta) \cos(n\theta) d\theta \\ -n(C_n^H r^{n-1} - D_n^H r^{-n-1}) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H^{rH}(r, \theta) \sin(n\theta) d\theta \\ n(A_n^H r^{n-1} + B_n^H r^{-n-1}) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H^{\theta H}(r, \theta) \sin(n\theta) d\theta \\ -n(C_n^H r^{n-1} + D_n^H r^{-n-1}) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H^{\theta H}(r, \theta) \cos(n\theta) d\theta \\ -\frac{D_0^H}{r} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H^{rH}(r, \theta) d\theta \end{aligned} \right\} r=R_1, R_2$$

W obszarze magnesów trwałych podstawowym równaniem opisującym rozkład potencjału magnetycznego jest równanie eliptyczne niejednorodne (2). Opisuje ono przypadek, gdy na rozpatrywanej powierzchni (lub ogólniej przestrzeni) znajduje się pewne źródło. Wykorzystuje się tu koncepcję fikcyjnego ładunku magnetycznego. W przypadku radialnego namagnesowania magnesów dywergencja wektora magnetyzacji upraszcza się do postaci:

$$(17) \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{M_r}{r} + \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} = \frac{M_r}{r}$$

Rozwiązanie równania niejednorodnego (2) można znaleźć poprzez złożenie dwóch prostszych rozwiązań, tj. rozwiązania dla równania jednorodnego  $u(r, \theta)$  z niejednorodnymi warunkami brzegowymi (w tym przypadku Neumanna) oraz równania niejednorodnego  $v(r, \theta)$  z zerowymi warunkami brzegowymi.

$$(18) \quad u(r, \theta) = C_0^{III} + D_0^{III} \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{III} r^n + B_n^{III} r^{-n}) \cos(n\theta) + (C_n^{III} r^n + D_n^{III} r^{-n}) \sin(n\theta)$$

$$(19) \quad v(r, \theta) = r \frac{A_0}{\mu_r} - \sum_{n=1}^{\infty} r \frac{M_n^C}{\mu_r (n^2 - 1)} \cos(n\theta)$$

$$(20) \quad H_r^{III}(r, \theta) = -\frac{D_0^{III}}{R_2} - \frac{A_0}{\mu_3} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( n A_n^{III} r^{n-1} - n B_n^{III} r^{-n-1} - \frac{M_n^C}{\mu_r (n^2 - 1)} \right) \cos(n\theta) + n \left( C_n^{III} r^{n-1} - D_n^{III} r^{-n-1} - \frac{M_n^S}{\mu_r (n^2 - 1)} \right) \sin(n\theta) \right]$$

Rozkład pola (składową radialną) dla obszaru magnesów po uwzględnieniu obrotu wału silnika opisuje równanie (20). Korzystając z własności przekształcenia Fouriera, można wyznaczyć zależności na nieznanne współczynniki i po porównaniu odpowiednich równań z (16) otrzymuje się układ równań dla granicy  $r = R_2$ :

$$(21) \quad \begin{aligned} n\mu_2 (A_n^H R_2^{n-1} - B_n^H R_2^{-n-1}) &= \\ \mu_3 \left( n A_n^{III} R_2^{n-1} - n B_n^{III} R_2^{-n-1} - \frac{M_n^C}{\mu_r (n^2 - 1)} \right) &+ \mu_0 M_n^C \\ n\mu_2 (C_n^H R_2^{n-1} - D_n^H R_2^{-n-1}) &= \\ \mu_3 \left( n C_n^{III} R_2^{n-1} - n D_n^{III} R_2^{-n-1} - \frac{M_n^S}{\mu_r (n^2 - 1)} \right) &+ \mu_0 M_n^S \\ A_n^H R_2^{n-1} + B_n^H R_2^{-n-1} &= \\ A_n^{III} R_2^{n-1} + B_n^{III} R_2^{-n-1} - \frac{M_n^C}{\mu_r (n^2 - 1)} & \\ C_n^H R_2^{n-1} + D_n^H R_2^{-n-1} &= \\ C_n^{III} R_2^{n-1} + D_n^{III} R_2^{-n-1} - \frac{M_n^S}{\mu_r (n^2 - 1)} & \\ \mu_2 \frac{D_0^H}{R_2} &= \mu_3 \left( \frac{D_0^{III}}{R_2} + \frac{A_0}{\mu_r} \right) \end{aligned}$$

W podobny sposób można wyznaczyć zestawy równania opisujące rozkład pola w szczelinie powietrznej, stojanie oraz przestrzeni wokół silnika. Dla każdej z granic pomiędzy obszarami uzyskuje się zestaw równań podobnych do (21), które łącznie tworzą dwa zestawy po dziesięć równań w każdym, pozwalające wyznaczyć poszukiwane współczynniki rozwinięcia. Równania te można przedstawić w formie macierzowej:

$$(22) \quad \begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_a &= -\mathbf{I} \cdot M_n^C \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_b &= -\mathbf{I} \cdot M_n^S \end{aligned}$$

gdzie: pełną postać macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{X}_a$ ,  $\mathbf{X}_b$  można znaleźć w pracy [11]

wależy zauważyć, że powyższe równanie macierzowe wyznacza tylko  $n$ -te współczynniki. Przyjmują one niezerową wartość tylko dla niezerowych wartości współczynników rozwinięcia funkcji magnetyzacji. Pozostałe współczynniki z zerowym indeksem opisane są za pomocą równań (23). Należy zauważyć, że zanikają one w momencie, gdy nie występuje efekt demagnetyzacji.

$$(23) \quad \begin{aligned} D_0^{II} &= 0 \\ D_0^{III} &= -\frac{A_0 R_2}{\mu_3} \\ D_0^{IV} &= \frac{A_0 R_3}{\mu_0} \left( 1 - \frac{R_2}{R_3} \right) \\ D_0^V &= \frac{A_0 R_3}{\mu_5} \left( 1 - \frac{R_2}{R_3} \right) \end{aligned}$$

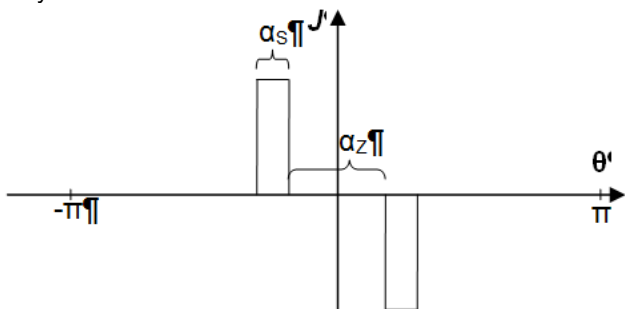
### Opis rozkładu pola od prądów stojana

Modelowanie rozkładu pola pochodzącego od prądu płynącego w uzwojeniach stojana zaproponowano poprzez przyjęcie kilku uproszczeń. Pominięto przestrzenny rozkład uzwojeń w szczelinie stojana, a co za tym idzie, przestrzenny rozkład prądów. Przyjęto traktować uzwojenia jako nieskończenie cienkie znajdujące się dokładnie na granicy pomiędzy stojanem a szczeliną powietrzną. Przyjęto także, że rozkład gęstości prądów jest stały. Taki

sposób modelowania uzwojeń stojana zaproponowany został między innymi w pracy [12]. Uwzględnienie pola od uzwojeń sprowadza się do przyjęcia następującego warunku brzegowego:

$$(24) \quad \begin{aligned} H_{\theta}^{IV}(R_4, \theta) + J &= H_{\theta}^V(R_4, \theta) \\ B_r^{IV}(R_4, \theta) &= B_r^V(R_5, \theta) \end{aligned}$$

Różnica w porównaniu do warunków brzegowych (10) polega na uwzględnieniu rozkładu gęstości prądu  $J$  (składowej stycznej) na granicy ośrodków. Wprowadzenie tej zmiany powoduje modyfikację układu równań dla granicy ośrodków  $r = R_4$ . Ze względu na przyjętą liniowość modelu prądy uzwojeń fazowych oraz magnesy trwałe można potraktować jako osobne źródła pola magnetycznego. Po wyznaczeniu wartości rozkładu pola od poszczególnych źródeł, wykorzystując zasadę superpozycji, można zsumować oba rozkłady pola i otrzymać rozkład wynikowy. W celu wyznaczenia rozkładu pola od uzwojeń stojana należy wyznaczyć funkcję opisującą rozkład gęstości prądów na granicy ośrodków. Rozwinięcie rozkładu funkcji gęstości prądu dla pojedynczej cewki nawiniętej na pojedynczym zębie stojana przedstawiono schematycznie na rysunku 3.



Rys. 3. Przebieg funkcji gęstości prądu dla pojedynczego bieguna

Funkcję tę można rozwinąć w szereg sinusów według poniższego wzoru:

$$(25) \quad J(\theta) = i \sum_{n=1}^{\infty} J_s(n) \sin(n\theta)$$

gdzie:

$$J_s(n) = \frac{-4}{R_4 \alpha_s \pi n} \sin(n(\alpha_s + \alpha_z)) \sin(n\alpha_s)$$

gdzie:  $\alpha_s$  – połowa szerokości kątowej żłobka,  $\alpha_z$  szerokość kątowa zęba stojana,  $i$  – prąd uzwojenia.

Po uwzględnieniu założenia, że jedna faza stojana składa się z dwóch cewek przesuniętych o 180 stopni geometrycznych oraz całkowita wartość gęstości prądu zależy od liczby uzwojeń  $W$  cewki bieguna, wynikowy wzór na gęstość prądu przedstawia się następująco:

$$(26) \quad J(\theta) = iW \sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n) J_s(n) \sin(n\theta)$$

Należy zauważyć, że tylko parzyste wyrazy szeregu przyjmują niezerowe wartości w powyższym równaniu. Przyjęto, że poszczególne fazy  $a$ ,  $b$ ,  $c$  przesunięte są o kąt  $120^\circ$  geometrycznych, co po zsumowaniu daje wynikowy rozkład funkcji gęstości prądu od poszczególnych prądów fazowych:

$$(27) \quad J(\theta) = 2W \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} [J_s^S(n) \sin(n\theta) + J_c^S(n) \cos(n\theta)]$$

gdzie  $i_a$ ,  $i_b$ ,  $i_c$  to chwilowe wartości prądów w poszczególnych fazach,  $J_s^S$  i  $J_c^S$  to współczynniki opisane w pracy [11].

Znając rozkład funkcji gęstości prądu, można przejść do wyznaczenia rozkładu pola dla poszczególnych charakterystycznych obszarów. W tym przypadku przyjmuje się jako jedyne źródło pola prąd od uzwojeń fazowych. Pomija się źródło w postaci magnetyzacji magnesów trwałych, a obszar magnesów traktowany jest jak obszar beźródłowy o przenikalności magnetycznej  $\mu_r$ . Uwzględniając warunek brzegowy, równanie składowej promieniowej pola na granicy ośrodków  $r = R_4$  będzie następujące:

$$(28) \quad \begin{aligned} H_r^{IV}(R_4, \theta) &= -\frac{D_0^{IV}}{R_4} \\ &- \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \left[ n(A_n^{IV} R_4^{n-1} - B_n^{IV} R_4^{-n-1}) \cos(n\theta) \right. \\ &\left. + n(C_n^{IV} R_4^{n-1} - D_n^{IV} R_4^{-n-1}) \sin(n\theta) \right] \end{aligned}$$

Ponownie otrzymuje się dwa układy równań do wyznaczenia poszukiwanych współczynników. Przedstawiono je poniżej.

$$(29) \quad \begin{aligned} A \cdot X_a &= I^S J_s^S \\ A \cdot X_b &= I^S J_c^S \end{aligned}$$

gdzie: postać wektora  $I^S$  znaleźć można w pracy [11]

Należy zaznaczyć, że poszukiwane wektory współczynników:  $X_a$ ,  $X_b$  są nowymi współczynnikami innymi niż te otrzymywane z (22).

### Uwzględnienie zmiennej szerokości szczeliny powietrznej

Kolejnym ważnym etapem w tworzeniu modelu rozkładu pola magnetycznego jest uwzględnienie zmiennej szerokości szczeliny powietrznej powstałej na skutek obecności żłobków w stojanie. W pracy przyjęto zastosowanie funkcji względnej permeancji do opisu wpływu żłobków na deformację pola w szczelinie powietrznej. Podejście to ma tę zaletę, że jest stosunkowo łatwo aplikowane, natomiast główna jego wada to ograniczona stosowalność tylko do obszaru szczeliny powietrznej. Analityczne podstawy funkcji względnej permeancji można znaleźć w pracy [13]. Tutaj przytoczone zostaną jedynie najważniejsze równania, mające bezpośrednie zastosowanie. Funkcję względnej permeancji opisuje poniższe równanie:

$$(30) \quad \lambda(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m(r) \cos\left(mQ\left(\theta + \frac{\alpha_z}{2}\right)\right)$$

gdzie:  $\lambda_m(r)$  - współczynniki rozwinięcia funkcji względnej permeancji zależne między innymi od szerokości kątowej zęba stojana, szerokości kątowej żłobka [13]

Równanie pola magnetycznego w szczelinie wyznacza się jako iloczyn pola bez uwzględnienia efektu żłobków i funkcji względnej permeancji w postaci:

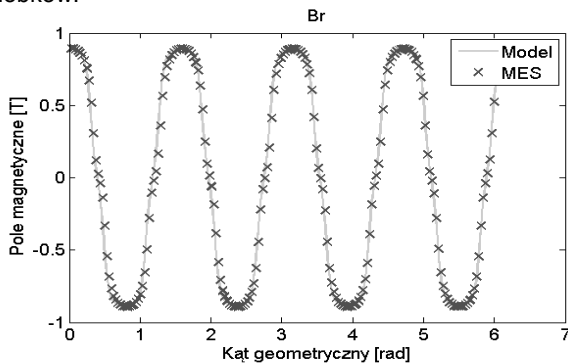
$$(31) \quad \begin{aligned} \vec{H}_r^S(r, \theta) &= \lambda(r, \theta) H_r^S(r, \theta) \\ \vec{H}_r^R(r, \theta) &= \lambda(r, \theta) H_r^R(r, \theta) \end{aligned}$$

gdzie  $H_r^S$  i  $H_r^R$  to odpowiednio składowe radialne pola w szczelinie powietrznej od prądów stojana i magnesów rotora.

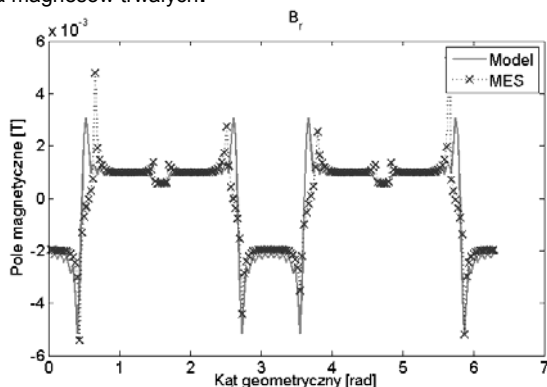
### Weryfikacja

Wyniki otrzymane z modelowania analitycznego porównane zostały z wynikami otrzymanymi dla modelu MES. Do analiz wykorzystano otwarte oprogramowanie femm 4.2. Taka metoda weryfikacji stosowana była w literaturze poświęconej tematyce modelowania analitycznego silników. W ten sposób dowodzi się poprawności przeprowadzonego procesu modelowania. Na rysunku 4 zestawiono porównanie składowej radialnej indukcji pola magnetycznego w szczelinie powietrznej dla modelu analitycznego oraz modelu MES. W obu modelach efekt żłobków nie został uwzględniony. Oba wykresy pokrywają się ze sobą w dużym stopniu, co świadczy o poprawności obliczeń modelu analitycznego. Należy także dodać, że w modelu MES nie uwzględniono nieliniowości przenikalności magnetycznej materiałów.

Na rysunku 5 porównano przebieg składowej radialnej pola w szczelinie dla obu modeli przy uwzględnieniu zmiennej szerokości szczeliny powietrznej wywołanej obecnością żłobków.



Rys. 4. Porównanie składowej radialnej indukcji magnetycznej od pola magnesów trwałych:



Rys. 5. Składowa radialna pola w szczelinie. Pole od prądów jednej fazy; uwzględniona obecność żłobków:

### Podsumowanie

W pracy przedstawiono matematyczne podstawy oraz zaprezentowano sposób modelowania rozkładu pola magnetycznego we wnętrzu silnika oraz w przestrzeni zewnętrznej. Przeanalizowano osobno rozkład pola od magnesów trwałych wirnika, od prądów fazowych stojana oraz dodatkowo uwzględniono efekt zmiennej szerokości szczeliny poprzez tzw. funkcję względną permeancji. Dla obu źródeł wyprowadzono pełne analityczne zależności, z których za pomocą narzędzi takich jak Matlab można wyznaczyć poszukiwane współczynniki i obliczyć

poszukiwany rozkład pola magnetycznego. W zaprezentowanym etapie modelowania uwzględniono jedynie błąd związany z demagnetyzacją. Błąd niewspółosiowości ze względu na skomplikowany opis matematyczny uwzględniony zostanie w opisie w kolejnej pracy. Otrzymane wyniki z modelu, tj. rozkłady przestrzenne pól oraz rozkłady pól w szczelinie powietrznej dla określonego stałego promienia, porównano z wynikami MES. Wysoka zgodność wyników wskazywać może na poprawnie przeprowadzony etap modelowania.

**Autorzy:** prof. dr hab. inż. Stanisław Radkowski, Politechnika Warszawska, Instytut Pojazdów, ul. Narbutta 84, 02-524 Warszawa, E-mail: [Stanislaw.Radkowski@simr.pw.edu.pl](mailto:Stanislaw.Radkowski@simr.pw.edu.pl); mgr inż. Przemysław Szulimi, Politechnika Warszawska, Instytut Pojazdów, ul. Narbutta 84, 02-524 Warszawa, E-mail: [p.szulim@mechatronika.net.pl](mailto:p.szulim@mechatronika.net.pl)

### LITERATURA

- [1] N. Boules, „Two-dimensional field analysis of cylindrical machines with permanent magnet excitation”, *Industry Applications, IEEE Transactions on*, nr 5, ss. 1267–1277, 1984.
- [2] N. Boules, „Prediction of no-load flux density distribution in permanent magnet machines”, *Industry Applications, IEEE Transactions on*, nr 3, ss. 633–643, 1985.
- [3] A. AFANASYEV i A. NIKOLAEV, „Mathematical model of the permanent magnet field in the air gap of electrical machine”, *Prace Instytutu Elektrotechniki*, nr 267, ss. 21–33, 2014.
- [4] Y. Volokitina, A. Vlasov, i Y. Opalev, „Application of field mathematical models for designing of windings of brushless permanent magnet motors”, *Prace Instytutu Elektrotechniki*, nr 267, ss. 59–66, 2014.
- [5] I. Dudzikowski, D. Gierak, i M. Ciurys, „Obwodowo-polowe modelowanie silnika komutatorowego o magnesach trwałych pracującego przy zmiennym obciążeniu”, *PRZEGLĄD ELEKTROTECHNICZNY*, nr 6, ss. 161–164, 2008.
- [6] Z. Q. Zhu, D. Howe, E. Bolte, i B. Ackermann, „Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet DC motors. I. Open-circuit field”, *Magnetics, IEEE Transactions on*, t. 29, nr 1, ss. 124–135, 1993.
- [7] Z. Q. Zhu i D. Howe, „Instantaneous magnetic field distribution in permanent magnet brushless DC motors. IV. Magnetic field on load”, *Magnetics, IEEE Transactions on*, t. 29, nr 1, ss. 152–158, 1993.
- [8] Z. Q. Zhu, D. Howe, i C. C. Chan, „Improved analytical model for predicting the magnetic field distribution in brushless permanent-magnet machines”, *Magnetics, IEEE Transactions on*, t. 38, nr 1, ss. 229–238, 2002.
- [9] T. Lubin, S. Mezani, i A. Rezzoug, „Exact Analytical Method for Magnetic Field Computation in the Air Gap of Cylindrical Electrical Machines Considering Slotting Effects”, *IEEE Transactions on Magnetics*, t. 46, nr 4, ss. 1092–1099, 2010.
- [10] A. Rahideh i T. Korakianitis, „Analytical Magnetic Field Calculation of Slotted Brushless Permanent-Magnet Machines With Surface Inset Magnets”, *IEEE Transactions on Magnetics*, t. 48, nr 10, ss. 2633–2649, paź. 2012.
- [11] P. Szulim i S. Gontarz, „Using The Surrounding Magnetic Field in Diagnosis of The BLDC Motor”, *Journal of Electrical Engineering*, t. 66, nr 7, ss. 193–198, 2015.
- [12] Z. Q. Zhu i D. Howe, „Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet DC motors. II. Armature-reaction field”, *Magnetics, IEEE Transactions on*, t. 29, nr 1, ss. 136–142, 1993.
- [13] Z. Q. Zhu i D. Howe, „Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet DC motors. III. Effect of stator slotting”, *Magnetics, IEEE Transactions on*, t. 29, nr 1, ss. 143–151, 1993.