

Ocena termicznych właściwości dynamicznych materiałów warstwowych ze strukturą periodyczną

Streszczenie. W pracy przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych struktur periodycznych o proponowanej geometrii oraz przykładowego układu zbudowanego z powtarzalnej sieci komórek przewodzących ciepło. Zaproponowano metodę opisu przebiegu impedancji termicznej rozpatrywanych struktur i wyznaczono parametry skupionego modelu zastępczego. Analizie poddano wpływ geometrii periodycznego elementu na jego właściwości termiczne. Scharakteryzowano właściwości i przebiegi czasowe chłodzonego konwekcyjnie układu, zbudowanego z rozpatrywanych elementów.

Abstract. The paper demonstrates the results of the numerical computations of the periodic structures with a specified geometry as well as a proposed system composed of a periodic structure of the heat conducting elements. We proposed a thermal impedance model for the investigated structures and computed model parameters. We have also studied the geometry influence on an attributes of a single element. The properties and a transient state of the naturally cooled system of the considered elements were characterized. (Evaluation of the thermal dynamic properties of the laminar materials with a periodic structure).

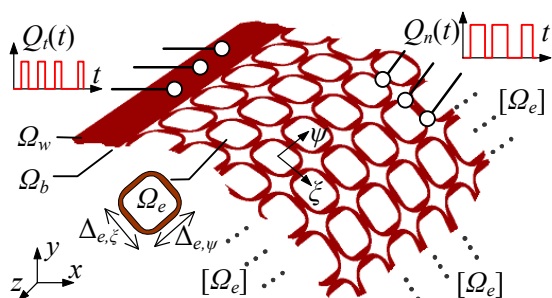
Słowa kluczowe: materiały laminarne, struktury periodyczne, parametry cieplne, rozkład temperatury.

Keywords: laminar materials, periodic structures, thermal properties, temperature distribution.

Wstęp

Aktywnie rozwijaną grupą materiałów kompozytowych są laminarne struktury z warstwami periodycznymi [1], gdzie dobierany, powtarzalny układ elementów o geometrii daje możliwość kształtowania właściwościami termicznych, elektrycznych, czy mechanicznych. Materiały tego typu mogą być stosowane jako struktury pasywne o parametrach złożonych (np. radiatory niskiej mocy, elementy nagrzewające izolowane galwanicznie) jak też jako układy aktywne z rozproszonym, dobranym rozkładem obszarów generacji energii cieplnej (np. maty cieplne) [2].

Poszukiwane metody modelowania i charakteryzacji struktur periodycznych mają na celu sformułowanie ujednorodnionego opisu oraz jego zastosowanie do analizy złożonych układów [3]. Jednym ze stosowanych narzędzi analizy, ze względu na złożony opis i konstrukcję układów, są metody numeryczne. Ujednorodnienie złożonych struktur materiałowych daje możliwość rozpatrywania elementów dużej skali i ocenę konstrukcji układów o dobranej, nietypowej geometrii.



Rys. 1. Opis modelu układu periodycznego złożonego z elementów Ω_e

Przedmiotem realizowanych prac są elastyczne laminaty z periodyczną warstwą przewodzącą, których parametry elektryczne i termiczne podlegają modyfikacji w wyniku zmian geometrii elementów struktury (rys. 1). Na materiale nośnym Ω_b naniesione są odpowiednio uformowane elementy Ω_e , które składają się na powtarzalny układ dwuwymiarowy. Otrzymuje się w ten sposób materiał porowaty ze strukturą, której parametry są pochodną geometrii i skali elementów [4]. W dalszej analizie założono, że skupione źródła ciepła $Q=Q_t(t)$ o przebiegu impulsowym,

zamocowane i odizolowane galwanicznie od warstwy Ω_w , są jedynym źródłem ciepła w omawianym układzie pasywnym.

Problem analizy materiałów warstwowych obejmuje modelowanie poszczególnych warstw i ich wpływu na rozkład temperatury. Algorytmy dyskretyzacji materiału na liczne podwarstwy, wiążą się z obliczaniem układów równań o znacznej liczbie niewiadomych, które jednak redukować można przez ułożenie oddzielnych równań dla każdej z warstw i wprowadzenie dodatkowych wymuszeń cieplnych [2]. Rozwiązanie układów periodycznych metodą quasi-liniowego przewodnictwa cieplnego [5], wyznaczającą średnią temperaturę w rozpatrywanym obszarze, nie wymaga dyskretyzacji struktury, lecz zakłada znajomości jej funkcji kształtu - trudnej do zdefiniowania dla złożonych geometrii. Inne podejście zaprezentowane w [6] umożliwia wyznaczenie zastępczych parametrów modelu skupionego, stosując równania Kirchhoffa do określenia właściwości sieci połączeń między cząsteczkami (elementami) przewodzącymi, przy znanym ich rozkładzie w materiale.

W niniejszej pracy rozpatrzono właściwości termiczne elementu Ω_e o dobranej geometrii, pod kątem dynamiki zmian temperatury. Do oceny właściwości materiału o strukturze dwuwymiarowej wykorzystano złożone modele elementu oraz całego układu, tworzone z użyciem metody elementów skończonych. Określono charakterystyki impedancji termicznej dla odmiennych stopni złożoności proponowanego modelu zastępczego, a następnie porównano wyniki obliczeń rozkładu temperatury uzyskane przy zastosowaniu modelu zastępczego i niejednorodnego układu o zakładanej wielkości elementów struktury. Scharakteryzowano termiczny stan nieustalony przykładowego układu złożonego z elementów Ω_e .

Opis struktury

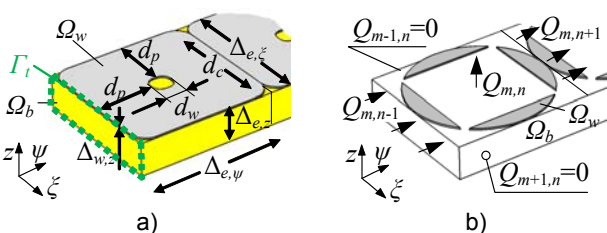
Model zastępczy materiału laminarnego tworzony jest na poziomie elementu Ω_e , w którym przewodzenie ciepła odbywa się kilkoma drogami (rys. 2a). Droga strumienia cieplnego oraz jego gęstości zależy od geometrii warstwy Ω_w oraz grubości i materiału podłoża Ω_b [4, 6]. Przekazywana przez element energia może być także modulowana przez specyficzne mostki termiczne (ścieżki) i występującą pomiędzy nimi szerokość przerwy (rys. 2b).

Zachowanie informacji o geometrii przewodnika i jego danych materiałowych jest istotne z punktu widzenia dokładności analizy. Dlatego w opisie polowym rozkład

temperatury w elemencie wyznaczany jest na podstawie równania przewodnictwa cieplnego [2]

$$(1) \quad \nabla \cdot k \nabla T - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = Q,$$

gdzie: k - przewodność cieplna, c - ciepło właściwe, ρ - gęstość materiałów w ramach elementu Ω_e .



Rys. 2. Przykładowa geometria elementu Ω_e (a) oraz rozkład strumienia w elemencie w innej geometrii (b)

Identyfikacja właściwości układów niejednorodnych

Rozpatrywane elementy posiadają niejednorodną i w ogólnym przypadku niesymetryczną geometrię oraz rozkład materiałów [6]. Metody czasowe aproksymujące przebieg odpowiedzi czasowej członem inercyjnym pierwszego rzędu, obarczone są znacznymi rozbieżnościami pomiędzy mierzonymi wartościami, a stosowanym modelem matematycznym. Złożoność struktury wewnętrznej oraz technologiczne różnice wymiarów kolejnych elementów Ω_e przekładają się na konstrukcję modelu. W tym przypadku mogą być stosowane modele rzędu całkowitego, jak też rzędu ułamkowego [7].

Rozkład temperatury opisany jest równaniem parabolicznym, jednak przy analizie oddziaływania impulsowego źródła $Q_t(t)$ w stanie nieustalonym, uzasadnione jest uwzględnienie skończonej prędkości propagacji energii w układzie [8]. Toteż w celu scharakteryzowania dynamicznych właściwości struktury na poziomie pojedynczego elementu, zastosowano impedancję termiczną $z_t(t)$ wyznaczaną w modelu pełnym, bez redukcji warstwy, zaś impedancja ta opisana jest złożonym modelem relaksacyjnym [9, 10]

$$(2) \quad z_{t,e}(t) \approx R_t 1(t) - R_t \sum_{n=1}^N a_n e^{-\frac{t}{\tau_n}} 1(t)$$

gdzie: R_t - rezystancja termiczna w stanie ustalonym, a_n i $\tau_n=1/\lambda_n$ - dobierane współczynniki i czasy relaksacji. Uwzględnienie zależności (2) prowadzi do opisu dynamicznych właściwości termicznych i tworzenia układu zastępczego o dobranych właściwościach.

Identyfikacja charakterystyk czasowych rozpatrywanych elementów polega na opisanu otrzymanej funkcji odpowiedzi za pomocą skończonej sumy ($n=1, 2, \dots, N$) funkcji wykładniczych o dobranych parametrach. Określenie parametrów zastępczych $\{a_n, \lambda_n\}$ zrealizowano w oparciu o autorski wyliczeniowy algorytm optymalizacji z dobranymi ograniczeniami. Rządu tworzonego modelu zastępczego N wynosił co najwyżej 3. Dobór parametrów modelu zastępczego był wykonywany przy założeniu minimalizacji błędów średniokwadratowego między charakterystyką rzeczywistą i obliczoną dla modelu aproksymowanego.

Rozwiązanie zagadnienia uzyskuje się przez tworzenie modelu rzeczywistej struktury lub zdefiniowanie materiału jednorodnego, opisanego parametrami zastępczymi. Wskazane podejście może być stosowane przy ocenie zjawisk termicznych w ramach całego układu, gdzie

szczegółowe odwzorowanie pojedynczego elementu nie jest możliwe i prowadzi do tworzenia złożonego modelu numerycznego. Makroskopowy opis układu bazuje na uproszczeniu modelu warstwy przewodzącej lub zdefiniowaniu zastępczej reprezentacji w postaci impedancji termicznej elementu $z_t(t)$ i następnie całego układu $z_c(t)$.

Przejdźcie do modelu makroskopowego wiąże się z ujednorodnieniem opisu przy uwzględnieniu wypadkowych właściwości, które mogą prowadzić do uzyskania materiału o właściwościach anizotropowych i złożonej charakterystyce zmian wielkości fizycznych w funkcji wymuszenia [4, 5].

Charakteryzacja cieplnych właściwości dynamicznych

Proponowaną strukturę elementów z rys. 2a, uzyskano w wyniku modyfikacji geometrii elementu składowego, zbudowanego z dobrego przewodnika ciepła o stałej grubości warstwy materiału $\Delta_{w,z} = 0,04$ mm, osadzonego na warstwie izolatora (tabela 1). Geometria elementu i w konsekwencji jego właściwości termiczne są kształtowane przez:

- szerokość styku d_c między sąsiednimi elementami;
- szerokość wewnętrznego wycięcia d_w , co przekładało się na zmianę powierzchni, z której ciepło może być oddawane do otoczenia oraz prowadzi do zmiany szerokości d_p ścieżki przewodzącej ciepło

$$(3) \quad d_p = \frac{\Delta_{e,\psi} - d_w}{2} \pm \delta_{e,\psi},$$

gdzie: $\Delta_{e,\psi}$ - szerokość zewnętrzna elementu Ω_e , $\delta_{e,\psi}$ - odchyłka w rozmieszczeniu obszaru wycięcia w elemencie Ω_e , wynikająca m.in. z powodów technologicznych. Otrzymana struktura, osadzona na laminacie FR-4 stanowiącym podłoże bazowe Ω_b (o wymiarach $\Delta_{e,z}=0,8$ mm, $\Delta_{e,\psi}=\Delta_{e,z}=3,33$ mm), wykazuje odmienne właściwości statyczne i dynamiczne w zależności od zadanej wartości parametrów d_w i d_c .

Tabela 1. Parametry materiałowe rozpatrywanych materiałów

Parametr	Warstwa przewodnika: miedź	Warstwa bazowa: laminat FR-4
ρ [kg/m ³]	8900	1910
k [W/(m·K)]	395	0,3
c_p [J/kg·K]	380	600

Badania właściwości dynamicznych z użyciem metody elementów skończonych przeprowadzono przy następujących założeniach:

- warunki początkowe - temperatura początkowa $T_0=20^\circ\text{C}$;
- warunki brzegowe - izolacja termiczna wszystkich powierzchni elementu (brak wymiany ciepła z otoczeniem);
- wymuszenie - źródło ciepła o zadanej wartości temperatury $T_t(t)=50^\circ\text{C} \cdot 1(t)$ na powierzchni Γ_t (rys. 2).

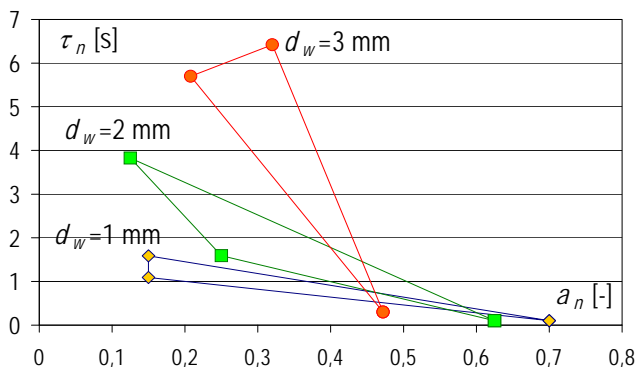
Obliczone przebiegi zmienności temperatury elementu w funkcji czasu, mierzonej na powierzchni przeciwległej do Γ_t (rys. 2a), aproksymowano modelem (2). W ten sposób przy znanych współczynnikach a_n i λ_n otrzymano parametry poszukiwanej zastępczej impedancji termicznej układu.

Parametry modeli zastępczych elementów o kilku przykładowych geometriach zebrano w tabeli 2. Obserwuje się ponad czterokrotne wydłużenie stałych czasowych po redukcji szerokości styku d_c od wartości 3,33 mm do wartości 0,13 mm. Współczynniki skalujące pozostają jednak podobnego rzędu wielkości. Z kolei zmiana szerokości wycięcia wewnętrznego umożliwia płynniejsze i bardziej efektywne kształtowanie właściwości

dynamicznych (rys. 3). Zmiana d_w w zakresie od 1 mm do 3 mm rzutuje na wydłużenie czasu propagacji energii cieplnej, obserwowanej jako zwiększenie się czasów relaksacji τ_n od 1,5 s do 6,5 s.

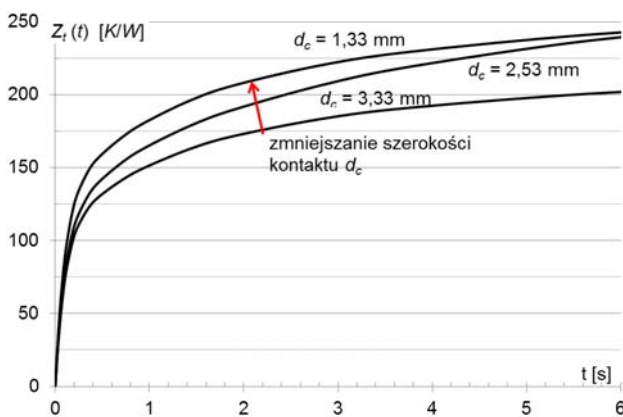
Tabela 2. Parametry modelu zastępczego (3) przy zmianie szerokości styku (d_c) elementów

d_c [mm]	współczynniki [-]			stałe czasowe [s]			Błąd δ^2
	a_1	a_2	a_3	τ_1	τ_2	τ_3	
0,13	0,80	0,05	0,15	18,0	23,0	21,0	1,649
1,33	0,45	0,40	0,15	4,06	0,10	0,60	1,055
2,53	0,48	0,28	0,24	0,10	4,46	0,89	1,029
3,33	0,48	0,28	0,24	0,10	4,06	0,89	0,957



Rys. 3. Porównanie parametrów (a_n , τ_n) modeli zastępczych przy zmianie szerokości obszaru izolatora d_w

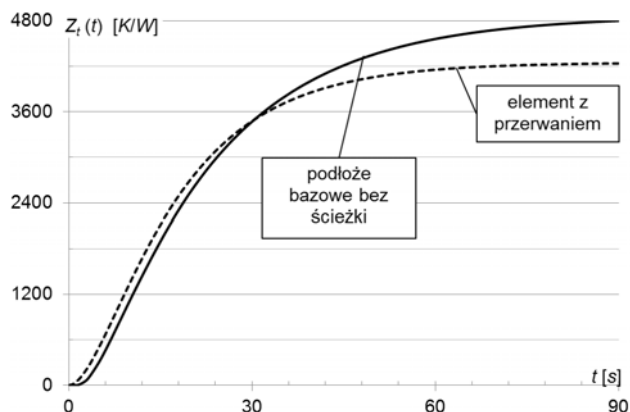
Kontakt pomiędzy sąsiednimi elementami jest maksymalny przy $d_c=3,33$ mm. Redukcja długości kontaktu w szerokim jego zakresie, praktycznie nie wpływa na dynamikę procesu nagrzewnia, lecz rzutuje na wartość modułu zastępczej przewodności cieplnej (rys. 4). Najszerzy zakres zmian rezystancji termicznej, w której obrębie możliwe jest płynne kształtowanie charakterystyki czasowej impedancji (przy niemal niezmiennym czasie relaksacji) występuje dla $d_c \in \langle 2,53 \text{ mm} ; 3,33 \text{ mm} \rangle$.



Rys. 4. Przebieg impedancji termicznej $z_t(t)$ przy różnej szerokości styku elementów ($d_w = \text{const} = 2,5$ mm)

Rozpatrując element, w którym występuje przerwanie ścieżki (rys. 2b) należy liczyć się ze zmniejszeniem prędkości propagacji energii w elemencie. Znaczną część strumienia ciepłego przewodzona jest wówczas przez podłoże stanowiące izolator. Prowadzi to do blisko 10-krotnego wydłużenia czasu narastania temperatury (zmiany wartości impedancji termicznej). Z drugiej strony czas ten jest krótszy w porównaniu do elementu pozbawionego ścieżki przewodzącej (rys. 5) oraz następuje zmniejszenie

rezystancji termicznej materiału o takiej konstrukcji, w stanie ustalonym.



Rys. 5. Przebieg impedancji termicznej $z_t(t)$ przy przerwaniu ścieżki przewodzącej i w elemencie bez ścieżki

Analiza właściwości układu niejednorodnego

Badaniom poddano także układ w postaci płasko-równoległej struktury (rys. 6) złożonej z 36-ciu periodycznie rozłożonych elementów Ω_e . Wymuszenie przepływu ciepła następuje przez dołączenie do płytki dwóch płasko-równoległych elementów o szerokości $d_s=4$ mm. Utworzony moduł składa się z trzech części o grubości $\Delta_{e,z}$:

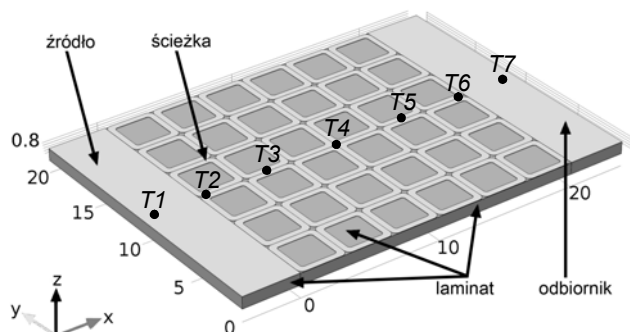
- płasko-równoległego obszaru skupionego źródła ciepła;
- obszaru konwekcyjnie chłodzonego odbiornika;
- periodycznego układu elementów Ω_e w środkowej części (przewodzących ciepło od źródła do odbiornika).

Wymiana energii na granicy układ-otoczenie zachodzi na skutek zjawiska konwekcji i radiacji, stąd na powierzchni układu zastosowano warunek Henkela – Robina

$$(4) \quad k \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T - T_a) = 0,$$

przy czym α to współczynnik wymiany ciepła, $T_a = \text{const}$ - temperatura otoczenia (20°C). Współczynnik wymiany ciepła dla poszczególnych powierzchni wyznaczano lokalnie, zależnie od geometrii oraz orientacji powierzchni, przy założeniu chłodzenia w nieruchomym powietrzu.

Rozpatrywaną strukturę periodyczną poddano wymuszeniu $Q_s(t)$ opisanemu skokiem jednostkowym $p(t)=0,5 \cdot 1(t)$ [W], przyjmując, że rozkład gęstości mocy w obszarze źródła jest równomierny.



Rys. 6. Widok układu Ω_M złożonego z 36 elementów Ω_e z 7 punktami pomiarowymi (wymiarzy podane w milimetrach)

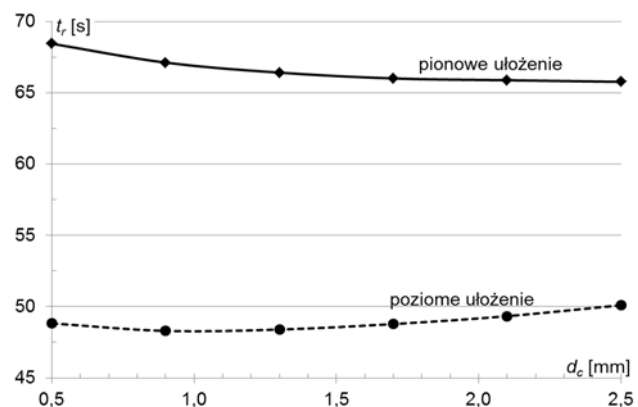
Analiza układu przeprowadzona została w oparciu o określenie wpływu geometrii elementów, na wartość temperatury i czasu narastania w centralnym obszarze układu. W toku badań modyfikowano geometrię układu Ω_M

przez zmianę geometrii elementów Ω_e . Prace podzielono na dwa etapy. W pierwszym zmiana wartości szerokości styku d_c pogarszała przekazywanie ciepła od źródła do odbiornika, co zmniejszało zastępczą przewodność cieplną, lecz nie wpływało znacząco na czas narastania temperatury. Etap drugi polegał na modyfikacji średnicy wycięcia wewnętrznego d_w . W obu przypadkach orientacja układu (pozioma lub pionowa) rzutowała na warunki chłodzenia konwekcyjnego.

Wpływ geometrii na właściwości dynamiczne układu

Geometria układu pomimo swojej powtarzalności, wyróżnia się niejednakowymi parametrami termicznymi, wpływającymi nie tylko na rozkład temperatury w stanie ustalonym, lecz także na dynamikę jej zmian.

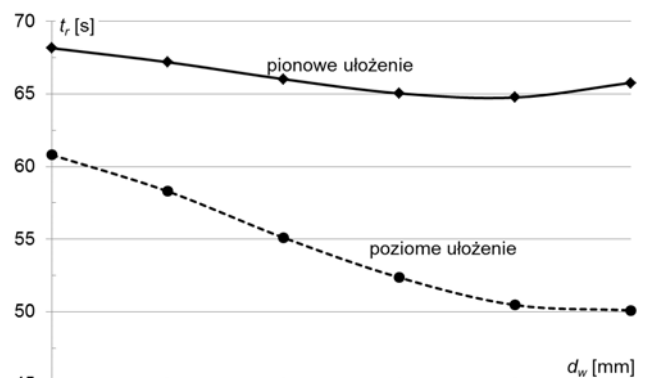
Stan nieustalony scharakteryzować można nie tylko poprzez kształt krzywych nagrzewania, lecz także przez t_r - czas narastania temperatury od wartości początkowej $T_{\theta}=T_a$ do końcowej (ustalonej). W tym celu obliczono wspomniany czas dla ułożenia poziomego oraz pionowego układu i przedstawiono go na rys. 7 w funkcji szerokości d_c . Dla podanych szerokości styku zewnętrznej, różnica w czasie narastania jest nieznaczna, wynosząca około 4 sekund. Jednak orientacja układu w przestrzeni wpływa wydatnie na uzyskiwane wyniki. Ze względu na zmianę warunków chłodzenia, czas narastania w obserwowanych punktach układu zależy od orientacji całego układu w przestrzeni (położenie pionowe lub poziome) oraz geometrii elementu Ω_e . Czasy przy ułożeniu pionowym są o ok. 30% większe od obserwowanych dla poziomo montowanej płytki. Sposób montażu tego rodzaju struktur, bezpośrednio przekłada się na rozkład pola temperatury oraz jej chwilowe wartości w trakcie procesu nagrzewania lub stygnięcia.



Rys. 7. Wypadkowy czas narastania w centrum układu (rys. 6, punkt T4) dla ułożenia poziomego i pionowego ($d_w=2,5$ mm)

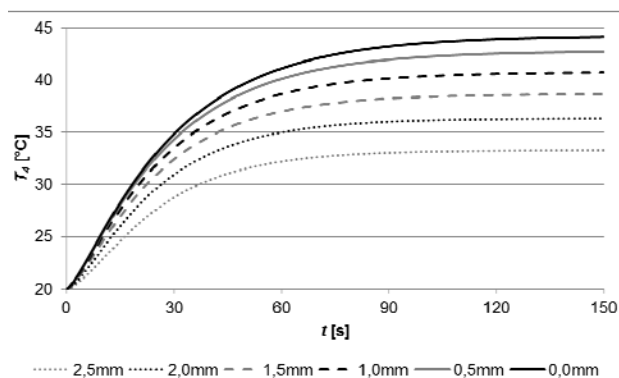
W drugiej części założono stałą wartość d_c zaś modyfikacji poddawano średnicę wewnętrznego wycięcia d_w . Rzutowało to na szerokość ścieżki tworzącej komórki, zwiększając też powierzchnię oddającą ciepło do otoczenia. Modyfikując geometrię wewnętrzną obserwuje się znaczący wpływ na czas nagrzewania, gdzie regulując wycięcie w zakresie od jego braku aż do średnicy 2 mm, możliwe jest niemal liniowe skracanie czasu narastania temperatury (rys. 8). W przedziale tym wartość t_r zmienia się w zakresie ok. 20%. Po ustawieniu układu w pozycji pionowej charakterystyka czasowa pozostała podobna - zmianie uległy jedynie wartości dla poszczególnych d_w . Obserwuje się też efekt wzrostu czasu narastania dla znacznych szerokości wewnętrznego wycięcia. Można go wykorzystać do uzyskania identycznych właściwości czasowych, jak tych posiadanych przez jednolitą strukturę (potwierdzają to

wartości t_r dla $d_w=0,5$ mm i $d_w=2,5$ mm, różniące się w czasie narastania zaledwie o 1,5 sekundy, lecz aż o ponad 50% w masie miedzi użytej do budowy elementów).



Rys. 8. Wypadkowy czas narastania w centrum układu dla ułożenia poziomego i pionowego ($d_c=2,53$ mm)

Regulacja czasu narastania w danym punkcie układu, wiąże się z jednoczesną regulacją temperatury w tym miejscu. W centralnej części sieci elementów temperatura w stanie nieustalonym kształtuje się w sposób pokazany na rys. 9. Możliwe jest uzyskanie szerokiej gamy charakterystyk nagrzewania o żądanej dynamice zmian temperatury (poprzez właściwy dobór d_w) oraz jednocześnie otrzymanie wymaganych wartości chwilowych temperatury, poprzez, np. zwiększenie/zmniejszenie wydajności źródła.



Rys. 9. Krzywe nagrzewania w punkcie centralnym sieci elementów dla różnych wartości d_w , przy ułożeniu poziomym ($d_c=2,53$ mm)

Podsumowanie

Przedmiotem prowadzonych prac są materiały o strukturze laminarnej z periodyczną warstwą przewodzącą ciepło. Analizie poddano termiczny stan nieustalony, zarówno pojedynczych elementów budujących strukturę, jak i przykładowego układu zbudowanego z proponowanych komórek.

Za pomocą metody elementów skończonych wyznaczono przebiegi czasowe (przy wymuszeniu stałym) impedancji termicznej przykładowych komórek, a następnie aproksymowano modelem wykładniczym niecałkowitego rzędu. Dla różnych geometrii komórki obliczono parametry zastosowanego modelu zastępczego. Zaobserwowano wyraźny wpływ redukcji szerokości ścieżki przewodzącej, na zwiększenie się stałych czasowych oraz efektywnej rezystancji termicznej. Drugi parametr można także modyfikować przez zmianę długości styku między sąsiednimi elementami.

Konwekcyjnie chłodzony układ, utworzony z okresowo rozłożonych 36-ciu elementów, poddany został analizie w stanie nieustalonym. Scharakteryzowano wpływ parametrów geometrycznych elementów, na czas narastania temperatury oraz jej przebieg w poszczególnych punktach układu. Potwierdzono jednoczesny wpływ szerokości ścieżki przewodzącej na czas narastania temperatury i jej wartość, wynikającą z przepływu określonego strumienia ciepłego przez układ. Rozpatrzono i poddano analizie ilościowej wpływ orientacji przestrzennej układu na jej właściwości cieplne. Rozpatrywany materiał o strukturze okresowej może posiadać identyczne właściwości jak materiał jednolity. Przy zastosowaniu materiału porowatego z dobraną strukturą i wielkością elementów uzyskuje się redukcję masy wykorzystywanego materiału przy równoczesnej poprawie innych cech użytkowych (np. elastyczność struktury, częściowa odporność na lokalne uszkodzenia warstwy przewodzącej).

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy S/WE/1/2013 i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

Autorzy: dr hab. inż. Bogusław Butryło, mgr inż. Adam Steckiewicz, Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny, ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok, E-mail: b.butrylo@pb.edu.pl; a.steckiewicz@doktoranci.pb.edu.pl

LITERATURA

- [1] Korzeniewska E., Jakubas A., Pomiar rezystancji powierzchniowej warstw cienkich o dowolnych kształtach wytworzonych na podłożach elastycznych, *Przegląd Elektrotechniczny*, 90 (2014), nr. 12, 233-236
- [2] Blanc M., Touratier M., A constrained discrete layer model for heat conduction in laminated composites, *Computers and Structures*, 83 (2005), 1705-1718
- [3] Tian J., Lu T. J., Hodson H. P., Queheillalt D. T., Wadley H. N. G., Cross flow heat exchange of textile cellular metal core sandwich panels, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50 (2007), 2521-2536
- [4] Pal R., Electromagnetic, mechanical, and transport properties of composite materials, *CRC Press*, (2014)
- [5] Siedlecka U., Woźniak C., Quasi-linear heat conduction in the periodically layered medium. *Mathematical Modeling and Analysis in Continuum Mechanics and Microstructured Media*, Wydawnictwa Politechniki Śląskiej (2010) 91-98
- [6] Gerenrot D., Berlyand L., Phillips J., Random network model for heat transfer in high contrast composite materials, *IEEE Transactions on Advanced Packaging*, 26 (2003), n. 4, 410-416
- [7] Sommacal L., et al., Havriliak-Negami function for thermal system identification. *American Control Conference*, Seattle, (2008), 1316-1321
- [8] Gołębiowski J., Matematyczne modelowanie wybranych zagadnień teorii pola temperaturowego, *Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej*, (1996)
- [9] Bisewski D., Górecki K., Zarębski J., Zależność parametrów modelu przejściowej impedancji termicznej tranzystora MOS mocy od konstrukcji układu chłodzenia. *Przegląd Elektrotechniczny*, 91 (2015), nr. 4, 139-143
- [10] Guenin B., Simplified transient model for IC packages, *Electronic Cooling*, 8 (2002), n. 3, 13-15