

Jednak: “Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitych rzędów”. Riposta na artykuł Ryszarda Sikory pt.: “Pochodne ułamkowe w teorii obwodów elektrycznych Uwagi krytyczne. Przegląd Elektrotechniczny, R.92, Nr 10/2016”

Streszczenie. Artykuł zawiera ripostę na artykuł Ryszarda Sikory pt.: Pochodne ułamkowe w teorii obwodów elektrycznych Uwagi krytyczne. Przegląd Elektrotechniczny, R.92, Nr 10/2016

Abstract. The paper is a riposte to a paper entitled: (Yet: “Fractional Calculus.” Riposte to the paper by Ryszarda Sikory pt.: “Pochodne ułamkowe w teorii obwodów elektrycznych Uwagi krytyczne. Przegląd Elektrotechniczny, R.92, Nr 10/2016”)

Słowa kluczowe: Rachunek różniczkowo - całkowy niecałkowitych rzędów, modelowanie matematyczne
Keywords: Fractional Calculus, mathematical modeling

Wprowadzenie

Nie wolno nie odpowiedzieć na artykuł autorstwa Ryszarda Sikory pod tytułem: “Pochodne ułamkowe w teorii obwodów elektrycznych Uwagi krytyczne”, który ukazał się w Przeglądzie Elektrotechnicznym R.92 Nr 10/2016 na stronach 274 - 276. Autor artykułu nie tylko nie stosuje powszechnie przyjętych w nauce reguł dowodzenia i kontrdowodzenia ograniczając się do gołosłownych stwierdzeń, używając niespotykanego w naukowej dyskusji “wytykania palcem” autorów, których prac poprawność neguje. Autor nie przedstawił żadnych swoich wyników badań dowodzących wyższości opisu dynamiki superkondensatora za pomocą klasycznych równań różniczkowych w stosunku do równań różniczkowych niecałkowitych rzędów, ma za to “uwagi krytyczne” dotyczące zastosowania równań różniczkowych niecałkowitych rzędów w elektrotechnice. Przypominając, że istnieje pełna równoważność wielkości fizycznych i równań w innych dziedzinach fizyki, oznacza to, że Autor bezpodstawnie podważa jednoczenie sensowność zastosowań równań różniczkowych niecałkowitych rzędów w mechanice, hydraulice, pneumatyce i td.

Rachunek różniczkowo-całkowy - przegląd historyczny

Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitych rzędów, tj. dotyczący pochodnych i całek dowolnych rzędów rzeczywistych nie jest nowym narzędziem matematycznym. Za datę powstania rachunku różniczkowego niecałkowitych rzędów uznaje się rok 1695, kiedy markiz Guillaume François Antoine de l'Hospital (uczeń Bernoulliego i Leibniza) napisał list do swojego mistrza Gotfryda Wilhelma Leibniza z zapytaniem co będzie, gdy we wprowadzonej i uznawanej już notacji pochodnej $\frac{d^n y}{dx^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$ wstawi się $n = \frac{1}{2}$. W liście datowanym na 30 września 1695 Leibnitz odpisał “... This is an apparent paradox from which, one day, useful consequences will be drawn. ...” co można przetłumaczyć jako “... Jest to oczywisty paradoks, z którego kiedyś zostaną wyciągnięte użyteczne wnioski ...”. Okazało się, że to prorocze słowa.

Później rachunkiem różniczkowo-całkowym niecałkowitych rzędów zajmowali się w XIX wieku najwięksi matematycy: Leonhard Euler (1738), Pierre Simon de Laplace (1812), Jean Baptiste Joseph Fourier (1822), Niels Henrik Abel (1823), Joseph Liouville (1832), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1876).

1.1 Problem polskiego nazewnictwa

Dziedzina matematyki “Rachunek różniczkowy i całkowy”, która ma krótki odpowiednik w języku angielskim “calculus”, a po francusku to “calcul différentiel et intégral” dotyczy

pochodnych całkowitych rzędów (pierwsza pochodna, druga pochodna i td) i całek wielokrotnych (całka, całka podwójna i td). Dopuszczając rzędy niecałkowite np. 1.3, 2.5, π i td. dla pochodnych i całek mamy do czynienia z rachunkiem różniczkowo-całkowym niecałkowitych czy ułamkowych (czasami, lecz coraz rzadziej frakcyjnych) rzędów [19, 21, 18, 22, 16, 23, 11]. W nazwie rachunku jest pewna pułapka nomenklatury sugerująca, że wymieniony wyżej rachunek dotyczy tylko rzędów ułamkowych. To nieprawda, bo rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitych rzędów zawiera w sobie również rzędy całkowite. Złym zatem określeniem jest też rachunek dowolnych rzędów, bo sugeruje dowolność n -tego rzędu. Na marginesie należy wspomnieć, że dopuszcza się również rzędy zespolone oraz zmienne (zmieniające się w czasie rozwiązania równania różniczkowego). Najpopularniejsze jest w Polsce określenie rachunek różniczkowy niecałkowitych rzędów (RRNR) (choć obejmuje również całkowite).

1.2 Perspektywy zastosowań rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitych rzędów

Wielki pionier rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitych rzędów, nieżyjący już, Katsuyuki Nishimoto [15] stwierdził dwadzieścia lat przed nadejściem nowego wieku, że będzie to rachunek XXI wieku (ang. Fractional Calculus: Calculus of the XXI century). Dwie dekady obecnego wieku potwierdzają jego wielką naukową przepowiednię, gdyż liczba artykułów poświęconych zastosowaniom rachunku różniczkowego niecałkowitych rzędów rośnie wykładniczo.

Równania Maxwella - tło historyczne

James Clerk Maxwell w roku 1861 zebrał cztery równania tworząc tzw. prawa elektrodynamiki.

Amerikanin Lewis Waterman jeszcze nie opracował systemu „zasilania kanalikowego” “wiecznego pióra”, który zapobiegał robieniu kleksów dzięki regulacji dopływu atramentu (1884). Jeszcze Thomas Alva Edison nie opatentował żarówki elektrycznej (1879).

Wynika z tego, że równania Maxwella powstawały przy świetle świecy i pisane były gęsim piórem.

Od tego czasu dokładność pomiaru czasu zmieniła się. Zegary o dokładności $1[s]/[rok]$ z końca XIX wieku przekształciły się do zegarów atomowych o dokładności $\frac{1}{10^6} \frac{1[s]}{[rok]}$. Urządzenia do pomiaru pojemności i indukcyjności to numeryczne resjetry wykorzystujące tzw. karty pomiarowe o coraz większej rozdzielczości.

1.1 Nowe elementy elektrotechniki

W ciągu ostatnich 140 lat pojawiły się całkowicie nowe urządzenia elektrotechniczne, o których nie śnił Maxwell, a których Autor ripostowanej pracy zdaje się nie zauważać. Trzeba tu wymienić:

- Super-kondensator (o równoważnych nazwach: ultra-kondensator, złoty kondensator, kondensator elektrochemiczny czy nawet kondensator ułamkowy (od aparatu matematycznego stosowanego do jego opisu) [28]).
- Rezystor z pamięcią czyli "memrystor" [5, 1].
- Cewka indukcyjna z efektem wypierania prądu (ang. inductance with a skin effect) [7] czy cewki o ułamkowej indukcyjności wzajemnej [26]

Istnieje ogromna literatura dotycząca modelowania matematycznego tych elementów. Najbardziej przydatnym narzędziem matematycznym okazał się właśnie rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitych rzędów [13, 24, 3, 8, 17, 6, 14, 9]. Cytowana tutaj literatura dotycząca nowych elementów, w szczególności super-kondensatora nie rości sobie prawa do kompletności. Jest to zaledwie ułamek licznych prac z tej dziedziny.

Wraz z nowymi elementami dynamicznymi pojawiło się pozornie nowe narzędzie matematyczne: rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitych rzędów. To nie jest już XIX wiek pary, elektryczności i elektrotechniki, to nie jest już XX wiek elektroniki i informatyki, to jest wiek XXI uściślenia opisu podstawowych praw fizyki i rozwoju odpowiadającego im narzędzia matematyki: rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitych rzędów.

Brak adekwatnej literatury

Pierwszym zarzutem dotyczącym pracy jest brak odwołań do fundamentalnej literatury z dziedziny rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitych rzędów, a w szczególności tych pozycji, które dotyczą opisu i jedności mian super-kondensatora. Autor zacytował zaledwie 7 pozycji literatury, w tym dwa swoje podręczniki. Takie wybiórcze cytowanie publikacji jest pierwszym poważnym mankamentem pracy, do której odnosi się niniejsza riposta.

Pochodne i całki niecałkowitych i całkowitych rzędów

Drugim poważnym zarzutem jest nieokreślenie definicji pochodnej niecałkowitego rzędu, do której odnosi się Autor. Definicji całek i pochodnych niecałkowitych rzędów jest wiele. Najważniejszą z nich wydaje się być pochodno-całka Riemanna-Liouville'a.

Definicja 1 Niech $\Omega = [t_0, t]$ gdzie $-\infty < t_0 < t < +\infty$ oznacza skończony przedział na osi liczb rzeczywistych \mathbb{R} . Lewostronna całka Riemanna-Liouville'a rzędu $\nu \in \mathbb{C}, (\Re\{\nu\} > 0)$ funkcji rzeczywistej f jest zdefiniowana następująca całką

$$(1) \quad {}_{t_0}^{RL}I_t^{(\nu)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\nu}} d\tau,$$

gdzie $\Gamma(\nu)$ jest funkcją gamma Eulera. W oznaczeniu całki dolne indeksy t_0, t oznaczają przedział całkowania, Górny indeks RL oznacza całkę Riemanna-Liouville'a, a ν jest rzędem całkowania.

Bardzo podobnie definiuje się całkę prawostronną Riemanna-Liouville'a.

Definicja 2 Dla $t < t_k$ oraz $\Re\{\nu\} > 0$ z przedziału $[t, t_k]$ całka prawostronna Riemanna-Liouville'a ma postać

$$(2) \quad {}_t^{RL}I_{t_k}^{(\nu)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_t^{t_k} \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{1-\nu}} d\tau.$$

Dla $\nu = n \in \mathbb{N}$ powyższe definicje stają się klasycznymi całkami wielokrotnymi

$$(3) \quad \begin{aligned} & {}_{t_0}^{RL}I_t^{(n)} f(t) \\ &= \int_{t_0}^t \cdots \left[\int_{t_0}^{t_{n-2}} \left[\int_{t_0}^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \right] dt_{n-1} \right] \cdots dt_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (\tau-t)^{n-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

W inżynierskich zastosowaniach wykorzystywana jest głównie całka lewostronna, dlatego w dalszej części artykułu tylko ona będzie wykorzystywana. Lewostronną pochodną Riemanna-Liouville'a definiuje się na bazie wyżej wymienionej całki.

Definicja 3 Niech $\Omega = [t_0, t]$ gdzie $-\infty < t_0 < t < +\infty$ oznacza skończony przedział na osi liczb rzeczywistych \mathbb{R} . Lewostronna pochodna Riemanna-Liouville'a rzędu $\nu \in \mathbb{C}, (\Re\{\nu\} > 0)$ funkcji rzeczywistej f jest zdefiniowana następującą pochodną całki

$$(4) \quad \begin{aligned} & {}_{t_0}^{RL}D_t^{(n)} f(t) = \left(\frac{d^n}{dt^n} \right) {}_{t_0}^{RL}D_t^{(n-\nu)} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \left[\int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\nu+1-n}} d\tau \right] \end{aligned}$$

gdzie $n = [\Re\{\nu\}] + 1$, a $[\Re\{\nu\}]$ oznacza część całkowitą części rzeczywistej rzędu ν . Pozostałe indeksy oznaczają to samo co w przypadku całki Riemanna-Liouville'a.

Pozostałe indeksy oznaczają to samo co w przypadku całki Riemanna-Liouville'a.

Do oznaczenia pochodnej niecałkowitego rzędu ν można również użyć klasycznego oznaczenia pochodnej $\frac{d^\nu}{dt^\nu}$ [10], ale wprowadzone w [23] oznaczenie wydaje się być bardziej precyzyjne, bo zawiera jednocześnie dodatkowe informacje w postaci indeksów.

W szczególności, dla $\nu = n \in \mathbb{N}_0$

$$(5) \quad {}_{t_0}^{RL}D_t^{(0)} f(t) = f(t),$$

$$(6) \quad {}_{t_0}^{RL}D_t^{(n)} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dla funkcji f , dla których istnieje jednostronna transformata Laplace'a $F(s)$ oraz istnieją skończone granice

$$(7) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{d^i}{dt^i} \left[{}_0^{RL}I_t^{(n-\nu)} f(t) \right] \right] = c \neq 0,$$

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow \inf} \left[\frac{d^i}{dt^i} \left[{}_0^{RL}I_t^{(n-\nu)} f(t) \right] \right] = 0,$$

$$(8) \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n-1,$$

transformata pochodnej niecałkowitych rzędów (określonych dla $t_0 = 0$) wynosi

$$(9) \quad \mathcal{L}\{ {}^{RL}D_t^{(\nu)} f(t) \} = s^\nu F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} \left[\frac{d^i}{dt^i} \left[{}^{RL}I_t^{(n-\nu)} f(t) \right] \right]_{t=0^+}.$$

W szczególności dla zerowych warunków początkowych transformata Laplace'a równa się

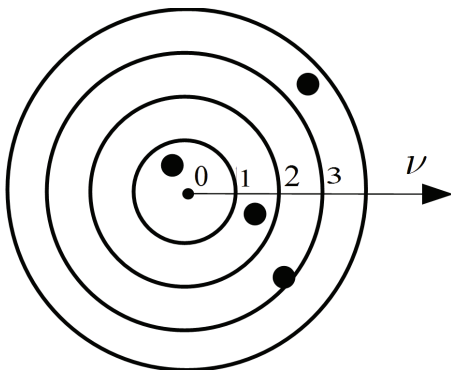
$$(10) \quad \mathcal{L}\{ {}^{RL}D_t^{(\nu)} f(t) \} = s^\nu F(s).$$

Transformata całki niecałkowitego rzędu ma postać

$$(11) \quad \mathcal{L}\{ {}^{RL}I_t^{(\nu)} f(t) \} = \frac{F(s)}{s^\nu}.$$

Równania różniczkowe ułamkowych i całkowych rzędów

Wyobraźmy sobie eksperyment polegający na strzelaniu do tarczy strzelniczej. Typowy rozkład $n = \nu = 4$ trafień pokazany jest na rys. 1



Rys. 1. Typowy rozkład trafień na tarczy strzelniczej.

Takiemu rozkładowi trafień odpowiada równanie różniczkowe o rzędach równych odległości trafienia od środka tarczy, czyli

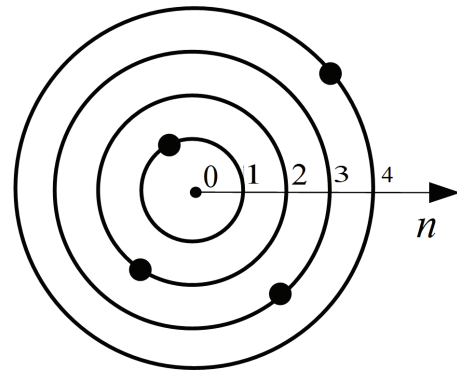
$$(12) \quad F \left[{}^{RL}D_t^{(\nu_n)} y(t), {}^{RL}D_t^{(\nu_{n-1})} y(t), \dots, {}^{RL}D_t^{(\nu_1)} y(t), y(t), t, u(t) \right] = 0,$$

gdzie $\nu_i \in \mathbf{R}_+$ oraz $\nu_n > \nu_{n-1} > \dots > \nu_1 > 0$ a F jest funkcja ogólnie nieliniową kolejnych pochodnych funkcji $y(t)$ oraz znanej funkcji $u(t)$.

Wyobraźmy sobie teraz eksperyment polegający na strzelaniu do tarczy strzelniczej, w którym wolno tylko trafiać w okręgi o kolejnych promieniach $1, 2 \dots$. Nietrafienie eliminuje zawodnika. Taki rozkład trafień pokazany jest na rys. 2. Odpowiada mu klasyczne równanie różniczkowe tzw. n-tego rzędu.

$$(13) \quad F \left[\frac{d^n y(t)}{dt^n}, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t), t \right] = 0$$

Bez sprawdzania wyników jakichkolwiek zawodów strzeleckich, w tym zawodów Nowożytnych Olimpiad można stwierdzić, że nigdy nie było takiego rozkładu trafień na tarczy strzelniczej w strzelaniu z łuku czy broni palnej jaki pokazany został na rys. 2. Modelowanie elementów dynamicznych pokazuje, że tak samo jest z rzędami równań różniczkowych opisujących rzeczywiste układy dynamiczne.



Rys. 2. Niespotykany rozkład trafień na tarczy strzelniczej.

Autor artykułu będącego celem niniejszej riposty nie przedstawił dowodu, że dynamiczne obwody (układy) elektryczne muszą być opisane tylko równaniami różniczkowymi całkowitych rzędów zgodnymi z XIX-wiecznymi prawami Maxwella. Poprawność tezy przeciwnej ilustruje rys. 1. Czytelnicy intuicyjnie osądzą zatem, jakie równania różniczkowe dokładniej opisują zjawiska fizyczne. Nie jest to jednak formalny dowód.

1.2 Dydaktyczny przykład obliczeniowy

Trzecim bardzo poważnym zarzutem do pracy poddanej ripoście jest brak dowodu na nieprzydatność rachunku różniczkowo-całkowego w opisie elementów elektrotechnicznych. Oto prosty przykład pokazujący właśnie twierdzenie przeciwne.

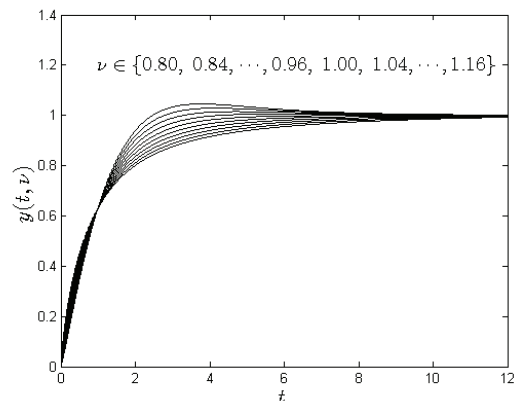
Weźmy pod uwagę dwa proste liniowe, stacjonarne równania różniczkowe. Klasyczne, tzw. pierwszego rzędu

$$(14) \quad \frac{dy_1(t)}{dt} + y_1(t) = \mathbf{1}(t),$$

gdzie $\mathbf{1}(t)$ jest funkcją skoku jednostkowego oraz "atakowane" przez Autora równanie różniczkowe niecałkowitych rzędów, dla rzędów z przedziału $\nu \in (0, 2]$

$$(15) \quad {}^{RL}D_t^{(\nu)} y_\nu(t) + y_\nu(t) = \mathbf{1}(t).$$

Dolne indeksy rozwiązań oznaczają rzędy. Numeryczne rozwiązanie równania liniowego stacjonarnego pierwszego rzędu (14), przy zerowym warunku początkowym i oraz rozwiązania równania (15) dla rzędów ze zbioru $\nu \in \{0.80, 0.85, \dots, 1.2\}$ pokazane zostały na Rys. 3.



Rys. 3. Numeryczne rozwiązania równań różniczkowych (14) oraz (15).

Z przedstawionych przebiegów wynika bardzo ważny, wręcz fundamentalny inżynierski wniosek o ciągłości rozwiązań równań różniczkowych całkowych i niecałkowych rzędów. Rozwiązanie $y_1(t)$ równania (14) zawarte jest w zbiorze rozwiązań równania (15). Co więcej

$$(16) \quad \lim_{\nu \rightarrow 1^\pm} y_\nu(t) = y_1(t)$$

Oznacza to, że tzw. klasyczny rachunek różniczkowo-całkowy [12] i rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowych rzędów stanowią jedną zgodną rodzinę, którą próbuje "skłócić" Autor pracy poddanej ripociście.

To odpowiedź na zarzut Autora o nieprzydatności zastosowań równań różniczkowych niecałkowych rzędów w elektrotechnice. Równanie różniczkowe niższych niecałkowych rzędów opisze dokładniej (stanowi lepszy model matematyczny) wielu zjawisk fizycznych np. sprzężeń między-przewodowych elektrostatycznych czy indukcyjnych nawet "tzw. klasycznych" obwodów elektrycznych [2].

Modelowanie układów dynamicznych za pomocą równań różniczkowych niecałkowych rzędów

Autor twierdzi "Otóż równania (43), (44) (45) i (46) występujące w pracy [1] (według numeracji Autora) poniżej zapisane jako równania (17) - (20)

$$(17) \quad i_c(t) = \frac{d^\alpha q(t)}{dt^\alpha},$$

$$(18) \quad i_c(t) = C \frac{d^\alpha u_c(t)}{dt^\alpha}, \text{ wg. (4), } i_c(t) = C_{t_0}^{RL} D_t^{(\alpha)} u_c(t),$$

$$(19) \quad u_L(t) = \frac{d^\alpha \Phi(t)}{dt^\alpha},$$

$$(20) \quad u_L(t) = L \frac{d^\alpha i_L(t)}{dt^\alpha},$$

są po prostu błędne (wytluszczenie moje). Przy tym autor wbrew powszechnie stosowanym zasadom nie podał co oznaczają wielkości użyte we wzorach (17) - (20). Czym jest α , jaki ma zakres wartości. Matematycy, mechanicy nie znając oznaczeń uznają je za prawidłowo napisane równania różniczkowe dowolnych rzędów. Na jakiej podstawie autor autorytatywnie stwierdza, że są błędne? Brakuje dowodu. Niepoparte niczym stwierdzenie jest kolejnym argumentem wskazującym ma poważne wady artykułu poddanego ripociście.

I dalej autor stwierdza (cytat): "Poprawnie zapisane powyższe równania mają następującą postać:

$$(21) \quad i_c(t) = \frac{dq(t)}{dt},$$

$$(22) \quad i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt},$$

$$(23) \quad u_L(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt},$$

Tablica 1. Odpowiedniki wielkości elektrycznych i cieczowych

Układ	Elektryczny	Cieczowy
Potencjał	[V]	Ciśnienie $\left[\frac{N}{m^2}\right]$
Przepływ	[A]	Przepływ $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
Rezystancja	[Ω]	$\frac{\text{Różnica poziomów}}{\text{Przepływ}} \left[\frac{m}{\frac{m^3}{s}}\right]$
Pojemność	[F]	Pole powierzchni $[m^2]$
Indukcyjność	[H]	Bezwładność $\left[\frac{N}{\frac{m^2}{s^2}}\right]$

$$(24) \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}.$$

Oczywiście obiektywni czytelnicy zgodzą się z tym stwierdzeniem. I jak we wzorze (22) wstawimy $u_c(t) = \mathbf{1}(t)$ to

$$(25) \quad i_c(t) = C \frac{d\mathbf{1}(t)}{dt} = C\delta(t),$$

gdzie $\delta(t)$ oznacza jednostkowy impuls Diraca. Jest to również równość poprawna. Zatem wbrew twierdzeniom autora, wszystkie równania (17) - (24) są prawidłowe.

Problem pojawia się, kiedy zada się pytanie. Jakie rzeczywiste układy opisują równania (17) - (24)? W przypadku modelowania kondensatora równanie (22), wbrew twierdzeniu Autora, nie jest prawdziwe, bo nie istnieje kondensator opisany równaniem (22).

Równania (22) oraz (18) można zapisać w postaci równoważnej

$$(26) \quad u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_c(\tau) d\tau + u_c(t_0),$$

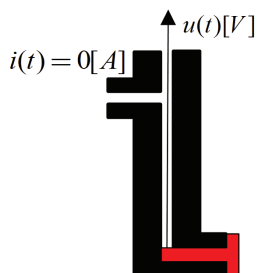
$$(27) \quad u_c(t) = \frac{1}{C_s} {}^{RL}I_{t_0}^{(\nu)} i_c(t) + u_c(t_0),$$

gdzie C oraz C_s oznaczają odpowiednio pojemności klasycznego i super-kondensatora, $i_c(t)$ to prąd jako funkcja czasu, a $u_c(t)$ to napięcie. W tej postaci otrzymuje się znacznie lepszy model rzeczywistych elementów elektrycznych jakim jest kondensator oraz super-kondensator.

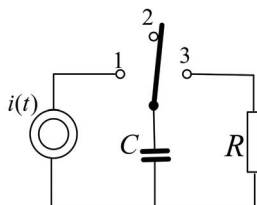
System elektryczny ma równoważnik w postaci systemu hydraulicznego z odpowiednimi wielkościami przedstawionymi na rys. 4 gdzie na czarno przedstawione są nieprzepuszczalne ściany zbiornika o stałym przekroju. Czerwonym kolorem oznaczony jest "korek" (nieuszczelny, co odpowiada upływności kondensatora). Równoważność wielkości elektrycznych i cieczowych podana jest w Tabeli 1 [27].

Na rysunku 6 pokazany został zbiornik wypełniony substancją porowatą. Tym razem napelnianie zbiornika będzie podobne do ładowania super-kondensatora. Proporcje pojemności klasycznego kondensatora i superkondensatora nie są zachowane.

Obecnie równania różniczkowe niecałkowych rzędów coraz częściej stosuje się do opisu obwodów elektrycznych nie tylko z elementami z tzw. "pamięcią" [4]. Te równania znacznie dokładniej opisują również obwody "klasyczne" [29].



Rys. 4. Pusty zbiornik o nieprzepuszczalnych ścianach i stałym przekroju.



Rys. 5. Analogia elektryczna obiektu hydraulicznego z rysunku 4.

Problem zgodności jednostek czyli problem “Jajka Kolumba”

Podstawowym zarzutem stawianym przez Autora jest niezgodność jednostek w opisie nowych elementów elektrotechniki reprezentowanych przez superkondensator. Autor nie odnosi się tutaj do niezgodności jednostek w opisie cewki indukcyjnej z efektem wypierania prądu i memrystora. Problem zgodności jednostek w opisie superkondensatora rozwiązany został już na wiele sposobów [25, 4, 30].

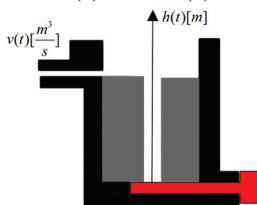
Najprostrzym rozwiązaniem problemu niezgodności jednostek w przypadku nowych elementów dynamicznych jest metodologia zastosowana przez Krzysztofa Kolumba w postawieniu jajka. Rozwiązanie jest bardzo proste i znane jako “Jajko Kolumba”. W elektrotechnice znane jest pojęcie czwórnika. To pojęcie, rozszerzone na dowolne układy dynamiczne daje relacje np. $[V] \rightarrow [rad/s]$ w układach elektromechanicznych (silnik elektryczny z napięciowym sygnałem wejściowym i wyjściowym w postaci prędkości obrotowej) lub $[rad] \rightarrow [^{\circ}K]$ w systemach grzewczych (z sygnałem wejściowym w postaci kąta obrotu zaworu regulującego przepływ czynnika grzewczego i sygnałem wyjściowym w postaci temperatury ogrzewanego obiektu).

Współczynniki gwarantują zgodność jednostek sygnału wejściowego i wyjściowego.

Przykład paradoksu Leibniza

W fundamentalnej pracy [20] w podrozdziale 7.3 zatytułowanym “Stany nieustalowe w liniach długich”, w punkcie 4 “Włączanie dowolnego napięcia do linii nieskończenie długiej bez upływności i indukcyjności ($G = 0$, $L = 0$) na stronie 613 rozpatrywany jest przypadek szczególny, w którym przykłada się napięcie w postaci skoku o wartości U_1

$$(28) \quad u_1(t) = U_1 \mathbf{1}(t).$$



Rys. 6. Pusty zbiornik o nieprzepuszczalnych ścianach, częściowo wypełniony substancją porowatą. Analogia układu elektrycznego z superkondensatorem.

Wtedy transformaty Laplace’a napięcia i prądu opisują wzory

$$(29) \quad \bar{u}(x, s) = \frac{U_1}{s} e^{-\alpha x \sqrt{s}}, \quad (7 - 214) \text{ w pracy [20]}$$

$$(30) \quad \bar{i}(x, s) = \frac{U_1 \alpha}{R} e^{-\alpha x \sqrt{s}}, \quad (7 - 214) \text{ w pracy [20]}$$

gdzie R oraz C to odpowiednio opór oraz pojemność na jednostkę długości linii, $\alpha = \sqrt{RC}$, x - odległość od początku linii ($x > 0$, $t > 0$). Po przekształceniach otrzymuje się prąd

$$(31) \quad i_1(t) = \frac{U_1 \alpha}{R \sqrt{\pi t}}. \quad (7 - 218) \text{ w pracy [20]}$$

Korzysta się teraz ze znanej transformaty Laplace’a

$$(32) \quad \mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}.$$

W szczególności, dla $\alpha = -\frac{1}{2}$ z powyższego wzoru otrzymuje się

$$(33) \quad \mathcal{L}\{t^{-0.5}\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}.$$

Oblicza się teraz transformaty Laplace’a napięcia i prądu

$$(34) \quad \mathcal{L}\{u_1(t)\} = \bar{u}_1(s) = \frac{U_1}{s},$$

$$(35) \quad \mathcal{L}\{i_1(t)\} = \bar{i}_1(s) = \frac{U_1 \sqrt{RC}}{R \sqrt{\pi}} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{U_1 \sqrt{C}}{\sqrt{R} s^{\frac{1}{2}}}.$$

Eliminując z powyższych równań wielkość U_1 otrzymuje się

$$(36) \quad \bar{i}_1(s) = \sqrt{\frac{C}{R}} s^{\frac{1}{2}} \bar{u}_1(s).$$

Stosując odwrotną transformatę Laplace’a do obu stron powyższego równania otrzymuje się

$$(37) \quad i_1(t) = \sqrt{\frac{C}{R}} {}^R L_0 D_t^{(\alpha)} u_1(t)$$

czyli równanie (18). Czy autor, znając niewątpliwie fundamentalną monografię [20], opublikowaną 44 lata temu, zgłaszał błędy w niej zawarte? Teraz Autor kwestionuje celowość stosowania ułamkowego równania różniczkowego **właśnie** dającego rozwiązanie ze strony 613 pracy [20].

To jest przykład paradoksu Leibniza.

Podsumowanie

Publikację artykułu pt.: “Pochodne ułamkowe w teorii obwodów elektrycznych Uwagi krytyczne” ISSN 0033-2097, R. 92 NR 10/2106 Przeglądu Elektrotechnicznego uważam za szkodliwą, bo ośmiesza Polską Naukę. Tego typu dyskusje przetoczyły się przez polski świat naukowy 20 lat temu z aroganckimi stwierdzeniami recenzentów “po co tworzyć niepotrzebne byty”. Uwcześni recenzenci nie napisali żadnej pracy z dziedziny rachunku różniczkowo-całkowego nicałkowitych rzędów, a mimo tego uważali się za ekspertów władnych odrzucenia wniosków o naukowe granty.

Zatrzymali finansowanie na lata, lecz nie zdołali zatrzymać badań w tej dziedzinie w Polsce.

Teraz to zamierzczą przeszłość, a pracę: "Pochodne ułamkowe w teorii obwodów elektrycznych Uwagi krytyczne", *Przegląd Elektrotechniczny* R.92 Nr 10/2016, str. 274 - 276 należy zaliczyć do kategorii głosów - "upiorów przeszłości".

W ciągu ostatnich 20 lat Komitet Badań Naukowych czy później Narodowe Centrum Nauki sfinansowały wiele grantów poświęconych tej tematyce. Zostało obronionych wiele prac doktorskich i habilitacyjnych na ten temat. Napisano wiele cenionych na świecie polsko- i anglojęzycznych monografii. Polska jest uznawana jako bardzo mocne centrum badań i zastosowań rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitych rzędów (obok wielkich pionierów Francji, USA, Japonii, Rosji, Portugalii czy Hiszpanii) a artykuł poddany riposćie bez żadnych merytorycznych argumentów gołosłownie podkopuje tę z trudem wywalczoną pozycję.

Historia nauki zna takie wsteczne reakcje. Byli "wielcy" naukowcy, którzy twierdzili, że Ziemia jest płaska, że nie istnieją bakterie, że atom jest niepodzielny. Oznacza to, że nie mamy do czynienia z nowym zachowaniem, ale tak szacowne czasopismo naukowo-techniczne jak *Przegląd Elektrotechniczny*, znając niewątpliwie te historie, nie powinno drukować hamujących postęp naukowy artykułów.

Praca Ryszarda Sikory nie zatrzyma tworzenia nowych materiałów, dynamicznych elementów elektrotechnicznych oraz stosowania do ich opisu adekwatnego rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitych rzędów, czyli jednak przyszłością jest rachunek różniczkowo niecałkowitych rzędów.

Anglojęzyczni naukowcy niniejszą ripostę wyraziliby jednym zdaniem. To "making a whole in the water". Francuzi też mają swój odpowiednik. To "chercher midi à quatorze heures".

Autor: Piotr Ostalczyk, *Instytut Informatyki Stosowanej, Politechnika Łódzka, ul. Stefanowskiego 18/22, 90-924 Łódź, email: postalcz@p.lodz.pl*

LITERATURA

- [1] Aguilar Gómez J.F.: Behaviour characteristics of a capacitor, memcapacitor, and a memristor from the response obtained of RC and RL electrical circuits described by fractional differential equations, *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, 2016, vol. 24, pp. 1421 - 1433.
- [2] Cvetičanin S/M., Zorica D. and Rapaic M.R.: Generalized time-fractional telegrapher's equation in transmission line modeling, *Nonlinear Dynamics*, 2017, DOI 10.1007/s11071-016-3322-z
- [3] Dzieliński A., Sarwas G. and Sierociuk D.: Comparison and validation of integer and fractional order ultracapacitor models, *Advances in Difference Equations*, 2011, 2011:11, SpringerOpen. <http://advancesindifferenceequations.com/content/2011/1/11>.
- [4] Ertik H., Çalik A.E., Şirin H., Şen M. and Öder B.: Investigation of electrical RC circuit within the framework of fractional calculus, *Revista Mexicana de Fisica*, vol. 61, 2015, pp. 58 - 63.
- [5] Fouda M.E and Radwan A.G.: Fractional-order memristor Response under DC and Periodic Signals, *Circuits Syst. Signal Processing*, vol. 34, 2015, pp. 961 - 970. DOI 10.1007/s00034-014-9886-2.
- [6] Freeborn T.J. and Maundy B.: Fractional-order models of supercapacitors, batteries and fuel cells: a survey, *Mater Renew. Sustain Energy*, page 4 - 9, DOI 10.1007/s40243-015-0052-y.
- [7] Jalloul A., Jelassi K., Melchior R. and Trigeassou J-C.: Fractional modelling of rotor skin effect in induction machines, *Proceedings of the FDA'10. The 4th IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications*. Badajoz, Spain October 18-20 (Eds: I.Podlubny, B.M. Vinagre Jara, YQ. Chen, V.Feliu Battle, I. Tejado Balsera). ISBN 9788055304878.
- [8] Jesus I.S. and Machado J.T.M.: Application of Integer and Fractional Models in Electrochemical Systems. *Mathematical Problems in Engineering* Hindawi Publishing Corporation, vol. 2102, ID 248175, 17 pages, DOI: 10.1155/2012/248175.
- [9] Jakubowska A. and Walczak J.: Analysis of the Transient State in a Series Circuit of the Class $RL_{\beta}C_{\alpha}$. *Circuits Syst. Signal Process* vol.35, pp. 1831 - 1853, DOI 10.1007/s00034-016-0270-2.
- [10] Kaczorek T.: Standard and positive electrical circuits with zero transfer matrices, *Poznan University of Technology Academic Journals*, 85, pp. zz-yy, 2016.
- [11] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.: *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies 204, Elsevier, 2006.
- [12] Kuratowski K.: *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*, Państwowe Wydawnictwo naukowe, Warszawa, 1970.
- [13] Martynyuk V., Makaryshkin D. and Boyko J.: Frequency domain analysis for electrochemical supercapacitors. *Proceedings of the 15 IMEKO TC-4 International Symposium*, 19 21 September 2007, Iasi, Romania.
- [14] Martynyuk V. and Ortigueira M.: Fractional model of an electrochemical capacitor. *Signal Processing*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.sigpro.201402.021>, pp.355 - 360.
- [15] Nishimoto K.: *Integration and Differentiation of Arbitrary Order*. tom I - IV, 1984, 1989, 1991, 1996, Descartes Press, Koriyama.
- [16] Miller K., Ross B.: *An introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, 1993, New York.
- [17] Mitkowski W. and Skrush P.: FRactional-order models of the supercapacitors in the form of RC ladder networks, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, /Technical Sciences*, vol.61, No.3, str. 581 - 587. DOI: 10.2478/bpasts-2013-0059.
- [18] Samko S., Kilbas A., Marichev O.: *Fractional Integrals and derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach, London, 1993.
- [19] Oldham K.B., Spanier J.: *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [20] Osowski J.: *Zarys rachunku operatorowego. Teoria i zastosowania w elektrotechnice*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1972.
- [21] Oustaloup A.: *Systèmes Asservis Linéaires d'Ordre Fractionnaire*, Masson, Paris 1984.
- [22] Oustaloup A.: *La dérivation non entière - théorie, synthèses at applications*, Hermes, Paris, 1995.
- [23] Podlubny I.: *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.
- [24] Sarwas G.: Modelowanie superkondensatorów przy użyciu rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu, *Prace Instytutu Elektrotechniki*, 2008, Zeszyt 239, str.17 - 28.
- [25] Sierociuk D., Sarwas G. and Twardy M.: Resonance phenomena in circuits with ultracapacitors, *Proceedings of the 12th International Conference Environment and Electrical Engineering (EEEIC)*, 2013, DOI. 10.1109/EEEIC.2013.6549616
- [26] Soltan A., Radwan A.G. and Soliman A.M.: Fractional-order mutual inductance: analysis and design, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 2016, Vol. 44, pp. 85 - 97.
- [27] Takahashi Y., Rabins M.J. oraz Auslander D.M.: *Sterowanie i systemy dynamiczne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1976.
- [28] Tripathy M.C. and Behera S.: Modelling and Analysis of Fractional Capacitors, *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2015, vol. 2, Issue 10, pp. 29 - 32, ISSN: 2394-3661.
- [29] Włodarczyk M. and Zawadzki A.: Obwody RLC w aspekcie pochodnych niecałkowitych rzędów dodatnich, *Elektryka*, 2011, Zeszyt 1 (217), Rok LVII, str. 75 - 88.
- [30] Włodarczyk M.: Some remarks on physical units of fractional order elements, *Mędzynarodowa Konferencja z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, XXXIX IC-SPETO 18 - 21.05.2016*, 2016.