

Minimalizacja wahań napięcia źródła energii elektrycznej z uwzględnieniem strat wewnętrznych

Streszczenie. Artykuł dotyczy zagadnienia stabilności napięcia sieci elektrycznej dla przebiegów niesinusoidalnych, okresowych. Przedstawiono uniwersalne rozwiązanie tego problemu w dziedzinie czasu i częstotliwości przy użyciu rachunku operatorowego, z uwzględnieniem strat energii wewnątrz źródła. Ponieważ matematycznie zadanie to jest dość złożone, aby je uprościć, skorzystano z zasady podobieństwa. Operator zastępczy admittancji wewnętrznej źródła jest zastąpiony przez rzeczywisty współczynnik, mający status konduktancji

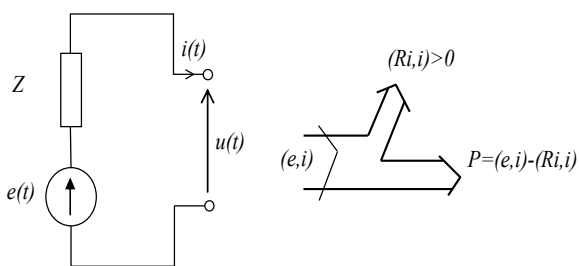
Abstract. The article concerns the issue of voltage power supply stability for non-sinusoidal periodic waveforms. One solution to this problem, in the time and frequency domain using operational calculus and taking into account energy losses within the source, was presented. Since the mathematical task is quite complex, to be simplified made use of the principle of similarity. A substitute operator of source internal admittance is replaced by a real factor, having the status of conductance. (**Minimizing the voltage fluctuations of electric power source including internal losses**)

Słowa kluczowe: teoria mocy i energii, niesinusoidalne prądy i napięcia, stabilność napięcia, optymalizacja, zasada podobieństwa
Keywords: power and energy theory, nonsinusoidal current and voltage, voltage stability, optimization, similarity principle

Wprowadzenie

W przypadku sygnałów sinusoidalnych stabilność napięcia sieci elektrycznej, lub zastępującego ją źródła napięcia, jest determinowana mocą bierną. Jednak przy przebiegach niesinusoidalnych, okresowych, pojęcie mocy biernej traci sens [1,2,3,4,5,6,7,8] i dlatego zagadnienie minimalizacji wahań napięcia trzeba postawić inaczej. Można to zrobić, minimalizując średniokwadratowy wskaźnik wahań napięcia zaciskowego źródła energii, przy zadanej uśrednionej mocy wyprowadzanej ze źródła. Zagadnienie to było rozwiązywane w pracach [9] i [10] dla źródeł impulsowych. W artykule [11] minimalizuje się wahania napięcia sieci nieszytywnej, ale bezstratnej przy przebiegach niesinusoidalnych dziedzinie częstotliwości.

Celem tego artykułu jest rozwiązanie tego zagadnienia uniwersalnie w dziedzinie czasu i częstotliwości, ale z uwzględnieniem strat energii zachodzących wewnątrz źródła. Jest to zadanie matematyczne dość złożone, wymagające zastosowania iteracyjnych procedur numerycznych, dlatego aby je uprościć skorzystano z tzw. zasady podobieństwa [12].



Rys 1. Schemat zastępczy źródła napięcia wraz z wykresem Sankeya bilansu mocy (energii).

Zasada podobieństwa w minimalizacji wahań napięcia źródła

Przyjmuje się model matematyczny źródła napięcia złożony z następujących elementów:

- $e(t)$ – okresowy niesinusoidalny sygnał napięcia źródłowego,
- Z – liniowy, czasowo niezmienniczy (splotowy) operator impedancji wewnętrznej,

- $u(t), i(t)$ – okresowe sygnały napięcia i prądu na zaciskach źródła,
- P – energia uśredniona (moc czynna) wyprowadzana ze źródła,
- (\cdot, \cdot) – symbol iloczynu skalarnego sygnałów,
- $R = \frac{1}{2}(Z + Z^*)$ - dodatnio określony operator stratności źródła, gdzie Z^* jest operatorem sprzężonym dla Z .

Schemat elektryczny źródła pokazano na rysunku 1. Dla przedstawionego modelu źródła stawia się trzy zadania optymalizacyjne:

- zadanie maksimum mocy wyprowadzanej tzw. „ P_{MAX} ”:
 $(e, i) - (Ri, i) \rightarrow MAX$

które równoważnie może być sformułowane w postaci minimum:

$$(1) \quad (Ri, i) - (e, i) \rightarrow MIN$$

- zadanie minimum strat energii wewnątrz źródła oznaczone przez „ ΔP_{MIN} ”:

$$(2) \quad (Ri, i) \rightarrow MIN$$

- zadanie minimum wahań napięcia oznaczone symbolem „ ΔU_{MIN} ”:

$$(3) \quad (\Delta u, \Delta u) \rightarrow MIN$$

gdzie: $\Delta u = e - u = Zi$

Zadania „ ΔP_{MIN} ” i „ ΔU_{MIN} ” mają zachodzić przy spełnieniu wspólnego warunku bilansu energii:

$$(4) \quad (Ri, i) - (e, i) + P = 0$$

gdzie: P – zadana wartość energii uśrednionej lub mocy czynnej wyprowadzonej ze źródła.

Wszystkie zadania minimum dadzą się zapisać w jednolitej formie, z udziałem nieoznaczonego mnożnika Lagrange’a:

$$“\Delta P_{MIN}” : ((1 + \lambda)Ri, i) - (\lambda e, i) \rightarrow MIN$$

$$“\Delta U_{MIN}” : ((ZZ^* + \lambda R)i, i) - (\lambda e, i) \rightarrow MIN$$

Stąd metodą gradientową otrzymuje się równania rozwiązujące:

$$(5) \quad “\Delta P_{MAX}” : \begin{aligned} Ri_d &= \frac{1}{2}e \\ P_{MAX} &= \frac{1}{2}(e, i_d) = \frac{1}{4}(R^{-1}e, e) \end{aligned}$$

gdzie: P_{MAX} – moc maksymalna źródła

$$(6) \quad \begin{aligned} & \text{„}\Delta P_{MIN}\text{”} : \\ & (1 + \lambda)Ri_{\lambda} = \frac{1}{2}\lambda e \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda g} (1 + \lambda g)i_{\lambda} = \lambda gi_d \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{aligned} & \text{„}\Delta U_{MIN}\text{”} : \\ & (ZZ^* + \lambda R)I_{\lambda} = \frac{1}{2}\lambda e \rightarrow (1 + \lambda A)I_{\lambda} = \lambda Ai_d \end{aligned}$$

gdzie $A = RYY^*$; $Y = Z^{-1}$ - operator admitancji wewnętrznej źródła.

Wprowadzony operator zastępczy A ma „status” admitancji. Status konduktancji ma wprowadzony rzeczywisty współczynnik g w równaniu (6).

Rozwiązaniem równania operatorowego (5) jest tzw. prąd dopasowania $i_d(t)$, który bierze udział w dwóch następnych równaniach (6) i (7) już jako sygnał zadany. Z równań tych właśnie otrzymuje się prądy $i_{\lambda}(t)$ oraz $I_{\lambda}(t)$ zależne od parametru λ , za pośrednictwem których tworzy się dwie tzw. funkcje energetyczne :

$$(8) \quad F(\lambda) = (e, I_{\lambda}) - (RI_{\lambda}, I_{\lambda})$$

$$(9) \quad f(\lambda) = (e, i_{\lambda}) - (Ri_{\lambda}, i_{\lambda})$$

Określają one zależność mocy (energii) wydawanej ze źródła od czynnika Lagrange’a λ .

Celowe jest zbadanie ich przebiegu przy $\lambda \in [0, \infty)$.

Obserwując równania (5), (6), (7) wnioskuje się, że:

$$i_{\lambda=0}(t) = 0, \quad I_{\lambda=0}(t) = 0$$

dla wszystkich wartości t co oznacza, że:

$$i_{\lambda=0}(t) = \mathbf{0}, \quad I_{\lambda=0}(t) = \mathbf{0}$$

gdzie $\mathbf{0}$ - jest oznaczeniem sygnału zerowego,

a przy $\lambda \rightarrow \infty$

$$i_{\lambda=\infty}(t) = i_d, \quad I_{\lambda=\infty}(t) = i_d$$

Zatem skrajne wartości funkcji energetycznych (8) i (9) wynoszą:

$$F(0) = f(0) = 0; \quad F(\infty) = f(\infty) = P_{MAX}$$

Dokładniejsze badanie przebiegu funkcji $F(\lambda)$ i $f(\lambda)$ wymaga wyznaczenia ich pochodnych, które określone są iloczynami skalarnymi:

$$(10) \quad F'(\lambda) = 2(R(i_d - I_{\lambda}), I_{\lambda}')$$

$$(11) \quad f'(\lambda) = 2(R(i_d - i_{\lambda}), i_{\lambda}')$$

gdzie: I_{λ}' i i_{λ}' są λ -pochodnymi sygnałów I_{λ} i i_{λ} , tzn.

$$I_{\lambda}'(t) = \frac{dI_{\lambda}(t)}{d\lambda}, \quad i_{\lambda}'(t) = \frac{di_{\lambda}(t)}{d\lambda}$$

i można je otrzymać z równań:

$$(12) \quad (1 + \lambda A)I_{\lambda}' = A(i_d - I_{\lambda})$$

$$(13) \quad (1 + \lambda g)i_{\lambda}' = g(i_d - i_{\lambda})$$

Wynika stąd, że:

$$I_{\lambda=0}' = Ai_d, \quad i_{\lambda=0}' = gi_d$$

czyli

$$(14) \quad F'(0) = 2(Ri_d, Ai_d)$$

$$(15) \quad f'(0) = 2(Ri_d, gi_d)$$

a także:

$$(16) \quad F'(\lambda) = 2(RA^{-1}(1 + \lambda A)I_{\lambda}', I_{\lambda}')$$

$$(17) \quad f'(\lambda) = 2\frac{1 + \lambda g}{g}(Ri_{\lambda}', i_{\lambda}')$$

Wyrażenia (16) i (17) są dodatnio określonymi formami kwadratowymi przy $\lambda > 0$, a więc funkcje energetyczne wtedy są monotonicznie rosnące.

Porównując ze sobą równania (6) i (7) stwierdza się, że są one matematycznie podobne z tym, że operator A jest zastąpiony liczbą g , która zostanie wyznaczona z warunku sklejania energetycznych funkcji podobnych:

$$(18) \quad F'(0) = f'(0)$$

stąd otrzymuje się wartość g :

$$(19) \quad g = \frac{(YY^* e, e)}{(R^{-1}e, e)}$$

którą nazwie się konduktancją normatywną źródła. Zależy ona od impedancji wewnętrznej, ale też od siły elektromotorycznej źródła energii zwłaszcza wtedy, gdy jej przebieg w czasie nie jest sinusoidalny.

Wprowadzenie konduktancji normatywnej znacząco upraszcza, ale też jest źródłem błędów. Są one tym mniejsze, im mniejsza jest wartość λ , a więc im moc P jest mniejsza od mocy maksymalnej źródła.

Wyznaczenie konkretnego egzemplarza prądu źródła

Konkretny egzemplarz prądu źródła, zwany prądem optymalnym otrzymany będzie z połączenia równania operatorowego (7) z równaniem energetycznym

$$(20) \quad f(\lambda) = P$$

przy czym funkcję $f(\lambda)$ otrzyma się za pośrednictwem prądu $i_{\lambda}(t)$ wynikającego z rozwiązania równania „podobnego” (6). Ma on szczególnie prostą postać:

$$i = \Lambda i_d$$

gdzie Λ jest skalarem rzeczywistym

$$\Lambda = \frac{\lambda g}{1 + \lambda g}$$

wówczas równanie (20) przyjmie postać

$$2P_{MAX}\Lambda - P_{MAX}\Lambda^2 = P$$

a po wprowadzeniu tzw. ułamka obciążenia źródła

$$x = \frac{P}{P_{MAX}} :$$

$$\Lambda^2 - 2\Lambda + x = 0$$

Jedynym akceptowalnym rozwiązaniem jest

$$\Lambda = \frac{\lambda g}{1 + \lambda g} = 1 - \sqrt{1 - x}$$

skąd

$$(21) \quad \lambda^{-1} = \frac{g}{x} \sqrt{1 - x} (1 + \sqrt{1 - x})$$

Otrzymana w ten sposób wartość odwrotności λ może być użyta do rozwiązania równania operatorowego (7), które można zapisać w formie:

$$(22) \quad (\lambda^{-1}1 + A)I_{\lambda} = \frac{1}{2}YY^*e$$

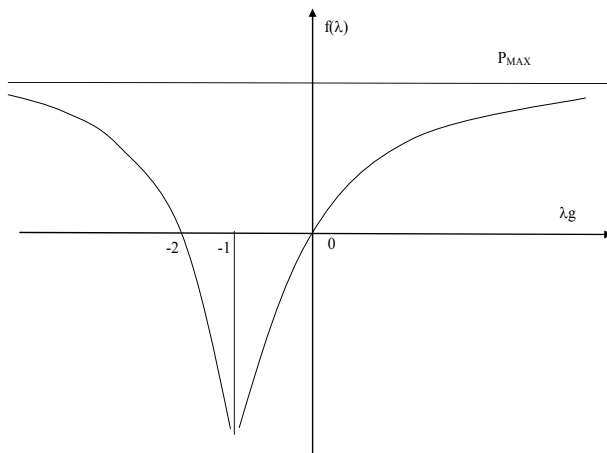
gdzie symbol '1' oznacza operator jednostkowy. Stąd wynika sygnał prądu optymalnego

$$(23) \quad I^{opt} = \frac{1}{2} Y Y^* (\lambda^{-1} 1 + A)^{-1} e$$

Aproksymacja funkcji energetycznej przez wzór (9) uzyskuje też postać:

$$(24) \quad f(\lambda) = \Lambda(e, i_d) - \Lambda^2(R i_d, i_d) = (2\Lambda - \Lambda^2) P_{MAX} \\ = \frac{(2 + \lambda g) \lambda g}{(1 + \lambda g)^2} P_{MAX}$$

Na rysunku 2 przedstawiono wykres funkcji $f(\lambda)$.



Rys. 2. Wykres energetycznej funkcji aproksymującej

Przebieg rozwiązania w dziedzinie częstotliwości

Dziedzina częstotliwości dobrze nadaje się do rozwiązania zagadnień szczególnie wtedy, gdy przebiegi sygnałów niewiele odbiegają od harmonicznym. W przeciwnym razie lepsza będzie dziedzina czasu.

Wprowadzając następujące oznaczenia:

$\{E_n\}$ - ciąg amplitud zespolonych poszczególnych składowych harmonicznym siły elektromotorycznej źródła;

$\{U_n\}, \{I_n\}$ - ciąg amplitud zespolonych składowych harmonicznym sygnałów napięcia i prądu na zaciskach źródła;

$\{Z_n\}$ - ciąg zespolonych impedancji wewnętrznych dla poszczególnych składowych harmonicznym;

$R_n = \frac{1}{2} (Z_n + Z_n^*)$ - ciąg składowych harmonicznym operatora stratności źródła.

otrzymuje się wartość konduktacji normatywnej określonej ogólnym wzorem (19):

$$(25) \quad g = \frac{\sum_n (|Z_n|^{-1} |E_n|)^2}{\sum_m (|R_m|^{-1} |E_m|)^2}$$

wartość λ^{-1} określa niezmienny wzór (21), a poszczególne harmoniczne zespolone prądu optymalnego przyjmują postać:

$$I_n^{opt} = \frac{1}{2} (\lambda^{-1} + R_n |Y_n|)^{-1} |Y_n|^2 E_n$$

gdzie: $Y_n = Z_n^{-1}$

Wnioski

Ograniczenie wahań napięcia sieci zasilającej jest jednym z najważniejszych działań, których celem jest zapewnienie warunków do prawidłowej współpracy wielu odbiorników energii elektrycznej. Każdą sieć zasilającą, zgodnie z twierdzeniem *Thevenina*, można zastąpić skupionym rzeczywistym źródłem napięcia. W niniejszej pracy model źródła składa się z okresowego, ale niesinusoidalnego sygnału siły elektromotorycznej oraz liniowego, czasowo niezmienniczego operatora impedancji wewnętrznej. To właśnie on jest przyczyną wahań sygnału napięcia zaciskowego przy zmianach prądu pobieranego z sieci, a także przy zmianach mocy czynnej. Za miarę wahań napięcia może służyć norma odchyłki sygnału napięcia $u(t)$ od sygnału siły elektromotorycznej $e(t)$: $\|e(t) - u(t)\| = \sqrt{(e - u, e - u)}$ odpowiadająca formie kwadratowej (Zi, i) , a sygnał prądu $i(t)$ powinien być tak dobrany, aby normę tę zminimalizować. Prąd źródła spełniający ten warunek nazywa się prądem optymalnym i w tej pracy jego okresowy ustalony przebieg został wyznaczony. Odrębną kwestią jest proces otrzymania prądu optymalnego w układzie źródło-odbiornik. Odbywa się to poprzez dołączenie tzw. obwodu kompensacyjnego. Najlepszym rozwiązaniem jest czwórnik, który pośredniczy w połączeniu między źródłem a odbiornikiem i złożony jest ze źródeł sterowanych wraz z elementami biernymi.

Autorzy: prof. dr hab. inż. Maciej Siwczyński, dr inż. S. Żaba, Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Instytut Elektrotechniki i Informatyki, Kraków ul. Warszawska 24, E-mails: e-3@pk.edu.pl; szaba@pk.edu.pl

LITERATURA

- [1] Walczak J., Pasko M.: Minimalizacja strat mocy czynnej i symetryzacja przepływu mocy w układach z przebiegami niesinusoidalnymi, *Jakość i Użytkowanie Energii Elektrycznej*, 5 (1999), nr. 1, 55-59
- [2] Pasko M.: Opis właściwości energetycznych, energetyczno jakościowych obwodów elektrycznych z przebiegami niesinusoidalnymi okresowymi. *Przegląd Elektrotechniczny*, 78 (2002), nr 5s, 23-40
- [3] P. Rens: Validation of popular nonsinusoidal power theories for the analysis and management of modern power systems. *North-West University, Potchefstroom Campus*, 2006.
- [4] Czarnecki L.: Currents' Physical Components (CPC) concept: a fundamental for power theory. *Przegląd Elektrotechniczny*, R84 (2008), nr 6, 28-37
- [5] Czarnecki L.: Uwagi do artykułu „Możliwość przedstawienia jednolitej nowej koncepcji mocy biernej prądu niesinusoidalnego w dziedzinie czasu”, *Przegląd Elektrotechniczny*, R85 (2009), nr. 6, 164-166
- [6] Willems J., L.: Reflections on apparent power and power factor in nonsinusoidal and polyphase situations, *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 19, no. 2, (2004), 835-840
- [7] Akagi H, Watanabe E. H., Aredes M.: Instantaneous power theory and applications to power conditioning. *John Wiley & Sons*, (2007), New Jersey
- [8] Yumak K., Usta O.: A Controversial Issue: Power Components in Nonsinusoidal Single-Phase Systems, *7th International Conference on Electrical and Electronics Engineering ELECO*, (2011), 158-162
- [9] Siwczyński M.: O współzależności między mocą bierną a stabilnością napięcia zasilania w przypadku okresowych niesinusoidalnych przebiegów napięcia i prądu. *Przegląd Elektrotechniczny*, 87, (2011), nr 6, 169-173
- [10] Siwczyński M.: Moc bierna w układach zasilanych impulsowo. *Przegląd Elektrotechniczny*, 87, (2011), nr 8, 121-127
- [11] Siwczyński M., Hawron K.: Związek między mocą bierną a wrażliwością napięcia bezstratnego w dziedzinie częstotliwości. *Przegląd Elektrotechniczny*, 90, (2014), nr 11, 2016-219
- [12] Siwczyński M., Jaraczewski M.: Zasada podobieństwa w równaniach optymalizacyjnych teorii mocy i energii. *Przegląd Elektrotechniczny*, 86, (2010), nr 11a, 260-264