

Modelowanie transformatorów z regulacją skośną przekładni w obliczeniach zwarciovych

Abstract. The phase shifting transformers or quadrature boosters introduce to the network model the anisotropic branches i.e. branches with directional properties. As the result, the admittance nodal matrix describing the network becomes asymmetric. In order to compute the inversion of this matrix, that is impedance nodal matrix being the basis for short circuit calculations, the procedures assigned to large sparse complex and asymmetric matrices must be used. However, in the real power systems the number of phase shifting transformers is very small with comparison to the number of all network elements. Therefore such method is computationally inefficient. In this paper it is shown, that the model of the phase shifting transformer may be divided into isotropic part and anisotropic part. The isotropic part may be included to the network model and relevant admittance matrix may be inverted by procedures assigned to symmetric matrices. The anisotropic part may be further taken into account by modification of the impedance matrix done with the use of formulas derived in this paper. These formulas has been derived strictly on the mathematical way. **Modelling of phase shifting transformers in short circuit calculations**

Streszczenie. Transformatory z regulacją skośną lub poprzeczną przekładni wprowadzają do modelu sieci gałęzie anizotropowe tj. gałęzie o właściwościach kierunkowych. Wskutek tego admitancyjna macierz węzłowa opisująca sieć staje się niesymetryczna. Inwersję tej macierzy, czyli macierz impedancyjną będącą podstawą obliczeń zwarciovych, można wyznaczyć za pomocą procedur odwracania dużych macierzy zespolonych niesymetrycznych o strukturze rzadkiej. W rzeczywistych systemach elektroenergetycznych liczba transformatorów z regulacją skośną lub poprzeczną przekładni jest jednak znikoma, w porównaniu do ogólnej liczby elementów sieci i takie postępowanie nie jest racjonalne pod względem obliczeniowym. W artykule wykazano, że w modelu transformatora z regulacją skośną można wydzielić gałęzie izotropowe i gałąź anizotropową. Część izotropową można włączyć do modelu sieci i obliczać impedancyjną macierz węzłową za pomocą procedur odwracania macierzy symetrycznych. Część anizotropową można uwzględnić modyfikując elementy macierzy impedancyjnej za pomocą wzorów wyprowadzonych w tym artykule. Wzory zostały wyprowadzone na drodze matematycznej

Key words: power system, short circuit calculations, phase shifting transformers

Słowa kluczowe: system elektroenergetyczny, obliczenia zwarciove, transformatory z regulacją skośną przekładni

Sformułowanie problemu

Transformatory umożliwiające regulację przekładni w trakcie ich pracy (tj. pod obciążeniem) można podzielić na trzy typy [1]: (a) z regulacją wzdłużną przekładni, (b) z regulacją poprzeczną przekładni, (c) z regulacją skośną przekładni tj. regulacją poprzeczną i wzdłużną. Regulacja wzdłużna służy do regulacji napięć lub mocy biernej w sieci przesyłowej. Regulacja poprzeczna służy regulacji rozpyływu mocy czynnej (np. ograniczenie przepływu przez polską sieć przesyłową energii wytwarzanej przez niemieckie farmy wiatrowe). Regulacja skośna może realizować równocześnie oba cele tj. regulację napięć lub mocy biernej oraz regulację rozpyływu mocy czynnej.

W obliczeniach zwarciovych transformatory modeluje się za pomocą czwórników π , których gałęzie poprzeczne i wzdłużna zależą od parametrów transformatora i jego aktualnie nastawionej przekładni. W przypadku transformatorów z regulacją wzdłużną gałąź wzdłużna takiego czwórnika jest izotropowa tj. nie ma właściwości kierunkowych. Natomiast w przypadku transformatorów z regulacją poprzeczną lub skośną gałąź wzdłużna czwórnika jest anizotropowa tj. ma właściwości kierunkowe (admitancja od węzła początkowego do węzła końcowego nie jest równa admitancji od węzła końcowego do węzła początkowego) [2,3].

Włączenie do modelu sieci czwórnika z gałęzią anizotropową prowadzi do asymetrii admitancyjnej macierzy węzłowej opisującej tę sieć.

Obliczenia zwarciove są wykonywane w oparciu o in-

wersję admitancyjnej macierzy węzłowej tj. w oparciu o impedancyjną macierz węzłową. Transformatorów z regulacją poprzeczną lub skośną przekładni w sieci przesyłowej jest bardzo mało (najwyżej kilka) w porównaniu do ogólnej liczby gałęzi sieci (tysiące). Powstaje więc sytuacja, że z powodu znikomej liczby elementów anizotropowych macierz admitancyjna staje się niesymetryczna, a w konsekwencji do obliczenia macierzy impedancyjnej, trzeba zastosować procedury zapamiętywania i obliczania inwersji dużych niesymetrycznych macierzy zespolonych o strukturze rzadkiej [4]. W tym artykule zaproponowano inne rozwiązanie problemu pozwalające uniknąć obliczania inwersji macierzy niesymetrycznej. Proponowane postępowanie jest następujące:

- w macierzy admitancyjnej uwzględnia się tylko te elementy czwórników (modele transformatorów), które nie wprowadzają asymetrii tj. gałęzie poprzeczne oraz izotropowe gałęzie wzdłużne,
- oblicza się inwersję symetrycznej admitancyjnej macierzy węzłowej, czyli symetryczną impedancyjną macierz węzłową,
- modyfikuje się elementy impedancyjnej macierzy węzłowej (niezbędne do dalszych obliczeń zwarciovych) o wpływ wcześniej nie uwzględnionych elementów anizotropowych.

Pod względem zajętości pamięci komputera, czasu obliczeń oraz struktury oprogramowania proponowana metoda jest efektywniejsza od metody polegającej na bezpośrednim zastosowaniu procedur do obliczania inwersji

macierzy niesymetrycznych. Ponadto zaletą proponowanej metody jest fakt, że modele transformatorów z regulacją poprzeczną lub skośną mogą być wprowadzone do programów zwarciovych bazujących na macierzach symetrycznych bez potrzeby kłopotliwej wymiany procedur obliczeniowych ingerujących głęboko w strukturę sprawdzonego i używanego od szeregu lat oprogramowania. Właśnie ten fakt był głównie motywacją do poszukiwania rozwiązania omawianego w tym artykule.

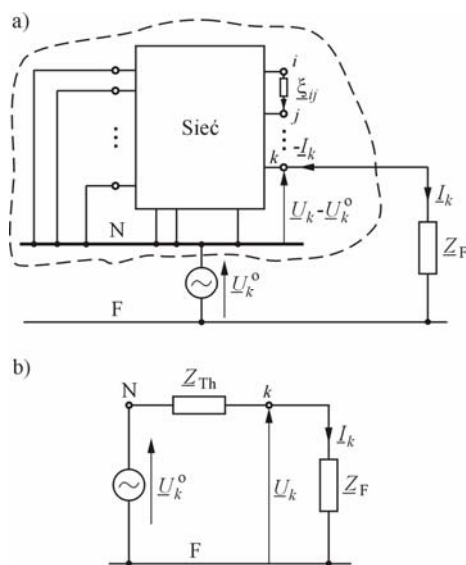
Możliwość modyfikowania impedancyjnej macierzy węzłowej po dołączeniu nowej gałęzi do sieci została po raz pierwszy wykorzystana przez C.H. El-Abiad'a, który korzystając tylko z praw elektrotechniki zaproponował metodę tworzenia macierzy impedancyjnej przez dołączanie kolejnych gałęzi [5,6]. Niestety rozważania C.H. El-Abiad'a i uzyskane przez niego wzory są słuszne jedynie dla gałęzi izotropowych i macierzy symetrycznych. Nie mogą więc znaleźć zastosowania w przypadku gałęzi anizotropowych i macierzy niesymetrycznych.

Wzory na modyfikowanie elementów macierzy impedancyjnej wyprowadzone przez autorów tego artykułu zostały wyprowadzone na drodze matematycznej w oparciu o wzór dotyczący inwersji sumy macierzy [7,8].

Obliczenia zwarciove

Podstawą obliczeń zwarciovych jest model sieci pokazany na Rys. 1. Model ten otrzymuje się za pomocą metody superpozycji w następujący sposób [2]. Zakłada się, że zwarcie przez impedancję Z_F występuje w dowolnym węźle k . Do gałęzi stanowiącej zwarcie wprowadza się dwa przeciwnie skierowane źródła napięcia o wartości U_k^0 odpowiadającej napięciu w węźle zwarcia przed wystąpieniem zwarcia. Tak zmodyfikowany model sieci zastępuje się sumą dwóch modeli:

- (a) modelu dla stanu przed zwarciem,
- (b) modelu uzupełniającego będącego różnicą modeli stanu zwarcia i stanu przed wystąpieniem zwarcia.



Rys. 1. Schematy używane do obliczeń zwarciovych (a) model uzupełniający (b) schemat zastępczy Thevenina

Rys. 1a ilustruje model stanu uzupełniającego. W modelu tym źródła napięcia (siły elektromotoryczne generatorów) są zwarte do węzła odniesienia N (lewa strona schematu). W pozostałych węzłach sieci napięcia względem węzła odniesienia mają odpowiednio wartości $(U_k - U_k^0)$, $(U_i - U_i^0)$, $(U_j - U_j^0)$ itd., gdzie górny

indeks 0 odnosi się do stanu przed wystąpieniem zwarcia.

Jedynym źródłem jest napięcie U_k^0 . W części schematu otoczonej linią przerywaną występuje tylko sieć pasywna. Po zastąpieniu tej części jedną impedancją widzianą z węzła zwarcia otrzymuje się prosty schemat zastępczy jak na Rys. 1b. Schemat ten jest zgodny z twierdzeniem Thevenin'a. W oparciu o ten schemat zastępczy można obliczyć prąd zwarcia i napięcie w miejscu zwarcia za pomocą następujących wzorów:

$$(1) \quad I_k = \frac{U_k^0}{Z_{Th} + Z_F}$$

$$(2) \quad U_k = U_k^0 - Z_{Th} I_k$$

Cześć schematu z Rys. 1a otoczona linią przerywaną może być opisana następującym równaniem potencjałów węzłowych:

$$(3a) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -I_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & Y_{ii} & Y_{ij} & Y_{ik} & \dots \\ \dots & Y_{ji} & Y_{jj} & Y_{jk} & \dots \\ \dots & Y_{ki} & Y_{kj} & Y_{kk} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ U_i - U_i^0 \\ U_j - U_j^0 \\ U_k - U_k^0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Prąd węzłowy jest różny od zera tylko w węźle k i jest równy $-I_k$ tj. ujemnej wartości prądu zwarcia. W pozostałych węzłach prądy węzłowe są równe zeru. W równaniu (2) niewiadome wartości napięć U_i , U_j itd. występują po prawej stronie równania. Z tego względu w dalszych obliczeniach korzysta się z następującego równania

$$(3b) \quad \begin{bmatrix} \vdots \\ U_i - U_i^0 \\ U_j - U_j^0 \\ U_k - U_k^0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & Z_{ii} & Z_{ij} & Z_{ik} & \dots \\ \dots & Z_{ji} & Z_{jj} & Z_{jk} & \dots \\ \dots & Z_{ki} & Z_{kj} & Z_{kk} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -I_k \\ \vdots \end{bmatrix}$$

w którym macierz impedancyjna jest równa inwersji macierzy admitancyjnej z równania (2), czyli $Z = Y^{-1}$. Z równania tego otrzymuje się:

$$(4) \quad U_k = U_k^0 - Z_{kk} I_k$$

Z porównania równań (2) (4) wynika, że $Z_{Th} = Z_{kk}$.

Oznacza to, że impedancyjna macierz węzłowa dla modelu z Rys. 1a ma bardzo cenną właściwość polegającą na tym, że elementy diagonalne tej macierzy są równe impedancjom Thevenin'a odpowiednich węzłów badanej sieci. Znajomość tej macierzy pozwala więc w prosty sposób, za pomocą wzoru (1), obliczać prądy zwarcia we wszystkich węzłach sieci. Ponadto korzystając z równania (3b) można obliczyć napięcie w dowolnym węźle w stanie zawarcia w wybranym węźle:

$$(5) \quad U_i = U_i^0 - Z_{ik} I_k$$

$$(6) \quad U_j = U_j^0 - Z_{jk} I_k$$

Zgodnie z prawem Ohm'a prąd płynący gałęzią o impedancji Z_{ij} można obliczyć z następującego wzoru:

$$(7) \quad I_{i-j} = \frac{U_i - U_j}{Z_{ij}} = \frac{U_i^0 - U_j^0}{Z_{ij}} - \frac{Z_{ik} - Z_{jk}}{Z_{ij}} I_k$$

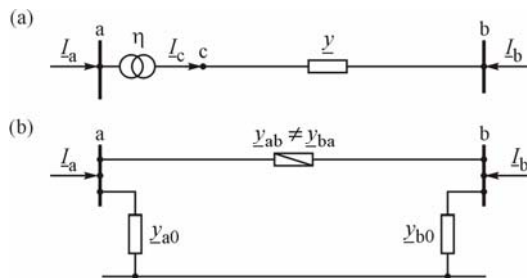
Pierwszy składnik odpowiada prądowi jaki płynął gałęzią przed wystąpieniem zwarcia. Tak więc można napisać:

$$(8) \quad \underline{I}_{i-j} = \underline{I}_{i-j}^0 - \frac{\underline{Z}_{ik} - \underline{Z}_{jk}}{\underline{Z}_{ij}} \underline{I}_k$$

gdzie \underline{Z}_{ij} jest impedancją gałęzi, zaś \underline{Z}_{ik} , \underline{Z}_{jk} są elementami macierzy impedancyjnej węzłowej.

Model transformatora z regulacją skośną

Jeśli w obliczeniach zwarciovych nie bierze się pod uwagę zwarc wewnątrznych w transformatorze i analizuje tylko zwarcia w sieci, transformatory z regulacją skośną przekładni mogą być modelowane za pomocą idealnej przekładni zespolonej $\underline{\eta}$ oraz zastępczej admittancji \underline{y} widzianej z zacisków transformatora [9,10,11]. Model taki ilustruje Rys. 2.

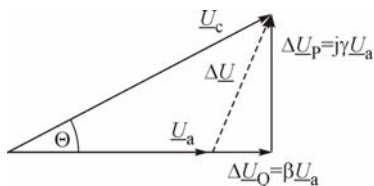


Rys. 2. Schematy zastępcze transformatora w regulacją skośną (a) schemat z idealną przekładnią zespoloną, (b) schemat zastępczy admittancyjny

Oczywiście zastępcza admittancja widziana z zacisków transformatora zależy od aktualnie nastawionej wartości jego przekładni. Przykładowo raport [9] podaje, że dla transformatora z regulacją poprzeczną przekładni reaktancja zastępcza widziana z jego zacisków da się wyrazić następującym wzorem:

$$(9) \quad X = X(\theta) = X_{\min} + [X_{\max} - X_{\min}] \left(\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \theta_{\max}} \right)^2$$

gdzie $X_{\min} = X(\theta = 0)$ oraz $X_{\max} = X(\theta = \theta_{\max})$ są odpowiednio reaktancją zastępczą dla zerowej wartości i maksymalnej wartości kąta przesunięcia fazowego θ .



Rys. 3. Ilustracja definicji przekładni wzdłużnej i poprzecznej

Sposób zdefiniowania przekładni zespolonej $\underline{\eta}$ ilustruje wykres fazorowy pokazany na Rys. 3. Przy założeniu, że transformator szeregowy jest zasilany za pomocą transformatora wzbudzenia z węzła początkowego linii przesyłowej, można zapisać następujące zależności:

$$(10) \quad \Delta U_P = \gamma U_a; \quad \Delta U_Q = \beta U_a$$

gdzie γ oraz β są użytecznymi parametrami ściśle związanymi z przekładnią zespoloną transformatora. Przekładnia ta jest zdefiniowana w następujący sposób:

$$(11) \quad \underline{\eta} = \frac{\underline{U}_c}{\underline{U}_a} = \frac{(\underline{U}_a + \beta \underline{U}_a) + j\gamma \underline{U}_a}{\underline{U}_a} = (1 + \beta) + j\gamma$$

$$(12) \quad \gamma / (1 + \beta) = \tan \theta$$

gdzie kąt θ jest przesunięciem fazowym, $(1 + \beta)$ jest

przekładnią wzdłużną, γ jest przekładnią poprzeczną.

Prawa część schematu z rys. 2a odpowiadająca admittancji \underline{Y} może być opisana następującym równaniem węzłowym:

$$(13) \quad \begin{bmatrix} \underline{I}_c \\ \underline{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} & -\underline{y} \\ -\underline{y} & \underline{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_c \\ \underline{U}_b \end{bmatrix}$$

Zgodnie z definicją przekładni zespolonej dla schematu z rys. 2a można napisać: $\underline{I}_c = \underline{I}_a / \underline{\eta}^*$ oraz $\underline{U}_c = \underline{\eta} \underline{U}_a$. Podstawiając te zależności do równania (13) po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$(14) \quad \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\eta} \underline{\eta}^* \underline{y} & -\underline{\eta}^* \underline{y} \\ -\underline{\eta} \underline{y} & \underline{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \end{bmatrix}$$

Admittancyjnej macierzy węzłowej z równania (14) można przyporządkować czwórnik typu π (Rys. 2b) o następujących parametrach:

$$(15a) \quad \underline{y}_{ab} = \underline{\eta}^* \underline{y}; \quad \underline{y}_{ba} = \underline{\eta} \underline{y};$$

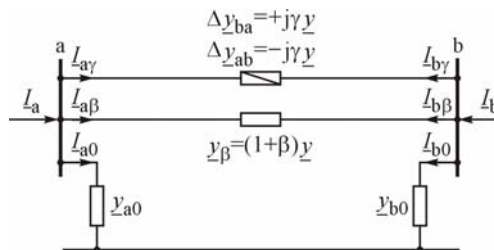
$$(15b) \quad \underline{y}_{a0} = \underline{\eta}^* (\underline{\eta} - 1) \underline{y}; \quad \underline{y}_{b0} = (1 - \underline{\eta}) \underline{y}$$

Warto tu zauważyć, że w ogólnym przypadku przy przekładni zespolonej $\underline{\eta}$ zachodzi $\underline{y}_{ab} \neq \underline{y}_{ba}$, to znaczy gałąź wzdłużna czwórnik jest anizotropowa tj. ma admittancję zależną od kierunku. Po podstawieniu do wzorów (15) wartości $\underline{\eta}$ oraz $\underline{\eta}^*$ wynikających z (12) otrzymuje się:

$$(16a) \quad \underline{y}_{ab} = \underline{\eta}^* \underline{y} = (1 + \beta) \underline{y} - j\gamma \underline{y} = \underline{y}_\beta - \Delta \underline{y}$$

$$(16b) \quad \underline{y}_{ba} = \underline{\eta} \underline{y} = (1 + \beta) \underline{y} + j\gamma \underline{y} = \underline{y}_\beta + \Delta \underline{y}$$

gdzie: $\underline{y}_\beta = (1 + \beta) \underline{y}$ oraz $\Delta \underline{y} = j\gamma \underline{y}$.



Rys. 4. Schemat zastępczy użyty do rozwiązania problemu

Na podstawie wzorów (16ab) schemat pokazany na Rys. 2b można przedstawić jak na rys. 4. W schemacie tym dolna gałąź wzdłużna i gałęzie poprzeczne są izotropowe tj. nie mają właściwości kierunkowych. Gałąź górna zależna od przekładni poprzecznej jest anizotropowa.

Rozwiązanie problemu

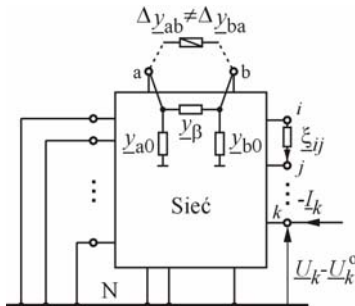
Zgodnie z założeniami proponowanej metody, do modelu sieci włącza się tylko izotropową część modelu transformatora z regulacją skośną. Ilustruje to Rys. 5. Gałęzi anizotropowej nie włącza się do modelu przed obliczeniem macierzy impedancyjnej (linia kropkowa na Rys. 5). Gałąź ta będzie uwzględniona w ramach korekty macierzy impedancyjnej.

Wzory na korektę macierzy impedancyjnej zostaną wyprowadzone w oparciu o wzór na inwersję sumy macierzy postaci $(\underline{A} + \Delta \underline{A})$, gdzie \underline{A} jest macierzą odwracalną, zaś $\Delta \underline{A}$ jest macierzą korekcyjną. Z założenia macierz korekcyjna $\Delta \underline{A} = \underline{u} \cdot \underline{v}^T$, gdzie \underline{u} , \underline{v} są macierzami kolumnowymi. Przy takim założeniu zachodzi [7,8]:

$$(17) \quad (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}}$$

Oczywiście wyrażenie $(1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u})$ znajdujące się w tym wzorze w mianowniku jest skalarzem.

By móc skorzystać z wzoru (17) należy wykazać, że zmiana macierzy admitycyjnej odpowiadająca włączeniu gałęzi anizotropowej $\Delta y_{ab} \neq \Delta y_{ba}$ da się wyrazić za pomocą iloczynu macierzy kolumnowej i wierszowej.



Rys. 5. Model sieci z elementem anizotropowym do obliczenia macierzy impedancyjnej

Dla ustalenia uwagi przyjmuje się, że admitycyjna macierz węzłowa ma następującą postać:

$$(18) \quad \underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \underline{Y}_{ii} & \underline{Y}_{ij} & \underline{Y}_{ik} & \underline{Y}_{ia} & \underline{Y}_{ib} \\ \cdots & \underline{Y}_{ji} & \underline{Y}_{jj} & \underline{Y}_{jk} & \underline{Y}_{ja} & \underline{Y}_{jb} \\ \cdots & \underline{Y}_{ki} & \underline{Y}_{kj} & \underline{Y}_{kk} & \underline{Y}_{ka} & \underline{Y}_{kb} \\ \cdots & \underline{Y}_{ai} & \underline{Y}_{aj} & \underline{Y}_{ak} & \underline{Y}_{aa} & \underline{Y}_{ab} \\ \cdots & \underline{Y}_{bi} & \underline{Y}_{bj} & \underline{Y}_{bk} & \underline{Y}_{ba} & \underline{Y}_{bb} \end{bmatrix}$$

Z wzorów (16ab) oraz schematów przedstawionych na Rys. 4 i Rys. 5 wynika, że włączając gałąź anizotropową w modelu sieci, w macierzy admitycyjnej węzłowej należy wprowadzić następujące korekty:

$$(19a) \quad \underline{Y}_{aa_nowe} = \underline{Y}_{aa} + \Delta y_{ab} = \underline{Y}_{aa} - \Delta y$$

$$(19b) \quad \underline{Y}_{ab_nowe} = \underline{Y}_{ab} - \Delta y_{ab} = \underline{Y}_{aa} + \Delta y$$

$$(19c) \quad \underline{Y}_{bb_nowe} = \underline{Y}_{bb} + \Delta y_{ba} = \underline{Y}_{aa} + \Delta y$$

$$(19d) \quad \underline{Y}_{ba_nowe} = \underline{Y}_{ba} - \Delta y_{ba} = \underline{Y}_{aa} - \Delta y$$

Oznacza to, że nowa admitycyjna macierz węzłowa po włączeniu gałęzi anizotropowej dana jest wzorem $\underline{\mathbf{Y}}_{nowe} = \underline{\mathbf{Y}} + \Delta\underline{\mathbf{Y}}$, przy czym:

$$(20) \quad \Delta\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & -\Delta y & +\Delta y \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & -\Delta y & +\Delta y \end{bmatrix}$$

Jak łatwo sprawdzić macierz ta może być wyrażona jako

$$(21) \quad \Delta\underline{\mathbf{Y}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta y \\ \Delta y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

co jest zgodne z założeniem przyjętym we wzorze (17). Oznacza to, że zmodyfikowana macierz impedancyjna $\underline{\mathbf{Z}}_{nowe} = \underline{\mathbf{Y}}_{nowe}^{-1}$ może być obliczona za pomocą następującego wzoru:

$$(22) \quad \underline{\mathbf{Z}}_{nowe} = (\underline{\mathbf{Y}} + \Delta\underline{\mathbf{Y}})^{-1} = \underline{\mathbf{Z}} - \frac{\underline{\mathbf{Z}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T \underline{\mathbf{Z}}}{1 + \mathbf{v}^T \underline{\mathbf{Z}}\mathbf{u}}$$

gdzie macierze \mathbf{u} , \mathbf{v} są jak w równaniu (21). Wykonanie działań zgodne z tym wzorem wymaga w sensie edycyjnym powierzchni o szerokości większej od pojedynczej kolumny. Z tego względu stosowne przekształcenia matematyczne przedstawiono na końcu artykułu w załączniku.

Z równania (26) zawartego w załączniku wynika, że elementy (i, j) oraz (j, i) macierzy $\underline{\mathbf{Z}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T \underline{\mathbf{Z}}$ są wyrażone następującymi wzorami:

$$(23a) \quad \Delta y (\underline{Z}_{ia} + \underline{Z}_{ib})(\underline{Z}_{bj} - \underline{Z}_{aj}) \quad \text{dla } (i, j)$$

$$(23b) \quad \Delta y (\underline{Z}_{ja} + \underline{Z}_{jb})(\underline{Z}_{bi} - \underline{Z}_{ai}) \quad \text{dla } (j, i)$$

Biorąc to pod uwagę oraz uwzględniając wzór (24), na podstawie (22) można napisać, że wskutek dołączenia anizotropowej gałęzi korekcyjnej elementy macierzy impedancyjnej modyfikowane są za pomocą następujących wzorów:

$$(24a) \quad Z_{ij(nowe)} = Z_{ij} - \frac{\Delta y (\underline{Z}_{ia} + \underline{Z}_{ib})(\underline{Z}_{bj} - \underline{Z}_{aj})}{1 + \Delta y (\underline{Z}_{bb} - \underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{ba} - \underline{Z}_{ab})}$$

dla $i = 1, \dots, n$ oraz $j \geq i$ (górną część macierzy)

$$(24b) \quad Z_{ji(nowe)} = Z_{ji} - \frac{\Delta y (\underline{Z}_{ja} + \underline{Z}_{jb})(\underline{Z}_{bi} - \underline{Z}_{ai})}{1 + \Delta y (\underline{Z}_{bb} - \underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{ba} - \underline{Z}_{ab})}$$

dla $i = 1, \dots, n$ oraz $j < i$ (dolną część macierzy)

Jak widać $Z_{ij(nowe)} \neq Z_{ji(nowe)}$, czyli po dołączeniu korekcyjnej gałęzi anizotropowej impedancyjna macierz węzłowa staje się asymetryczna.

Wzory (24ab) dotyczą uwzględnienia jednej gałęzi anizotropowej. Przy wyprowadzaniu tych wzorów nie poczyniono założenia odnośnie symetrii macierzy modyfikowanych. Tak więc po uwzględnieniu jednej gałęzi anizotropowej za pomocą tych samych wzorów można modyfikować dalej macierz impedancyjną uwzględniając kolejne gałęzie anizotropowe występujące w modelach pozostałych transformatorów z regulacją skośną przekładni.

Włączenie gałęzi izotropowej

W przypadku, gdy sieć zawiera tylko gałęzie izotropowe, macierze admitycyjna $\underline{\mathbf{Y}}$ oraz impedancyjna $\underline{\mathbf{Z}} = \underline{\mathbf{Y}}^{-1}$ są symetryczne. Włączenie do takiej sieci dodatkowej gałęzi izotropowej o impedancji $\underline{z} = 1/\underline{y}$ powoduje korektę macierzy admitycyjnej $\Delta\underline{\mathbf{Y}}$, która da się wyrazić w następujący sposób:

$$(25) \quad \Delta\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & +\underline{y} & -\underline{y} \\ \cdots & -\underline{y} & +\underline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ +\underline{y} \\ -\underline{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & +1 & -1 \end{bmatrix},$$

czyli jako iloczyn macierzy kolumnowej i wierszowej. W takim przypadku wzór (22) prowadzi do następującej modyfikacji macierzy impedancyjnej:

$$(26) \quad Z_{ij(nowe)} = Z_{ij} - \frac{(\underline{Z}_{ia} - \underline{Z}_{ib})(\underline{Z}_{aj} - \underline{Z}_{bj})}{\underline{z} + (\underline{Z}_{aa} - 2\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bb})}$$

Wzór ten jest identyczny z wzorem, jaki dla sieci izotropowych uzyskał C.H. El-Abiad'a korzystając tylko z

praw elektrotechniki [5,6]. Należy tu jednak podkreślić, że dotychczas w literaturze nie był znany dowód matematyczny tego wzoru. Nie były też znane wzory (24ab) dotyczące włączania do sieci gałęzi anizotropowych.

Wnioski

Modele transformatorów z regulacją poprzeczną lub skośną przekładni wprowadzają do modelu sieci elektroenergetycznej gałęzie anizotropowe tj. gałęzie o właściwościach kierunkowych. Dla takich modeli obliczenia zwarciove mogą być wykonywane z wykorzystaniem procedur obliczania inwersji dużych zespolonych macierzy niesymetrycznych o strukturze rzadkiej. Pociąga to za sobą konieczność wprowadzenia sporych zmian w strukturze

znanych i wypróbowanych algorytmów oraz związanego z nimi oprogramowania do obliczeń zwarciowych. Ponieważ jednak liczba transformatorów tego typu jest znikoma w porównaniu do ogólnej liczby elementów sieci, warto zastosować metodę modyfikacji zaproponowaną w prezentowanym artykule. Metoda ta polega na uwzględnianiu anizotropii za pomocą gałęzi korekcyjnych. Dzięki temu macierz impedancyjną oblicza się za pomocą procedur stosowanych dla macierzy symetrycznych. Uzyskaną macierz impedancyjną (lub jej fragment niezbędny do dalszych obliczeń) modyfikuje się za pomocą wzorów wyprowadzonych w artykule.

Załącznik: Działania macierzowe wykonane zgodnie ze wzorem (22)

$$(Z1) \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta y \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad \text{czyli} \quad \mathbf{Zu} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \underline{Z}_{ii} & \underline{Z}_{ij} & \underline{Z}_{ik} & \underline{Z}_{ia} & \underline{Z}_{ib} \\ \cdots & \underline{Z}_{ji} & \underline{Z}_{jj} & \underline{Z}_{jk} & \underline{Z}_{ja} & \underline{Z}_{jb} \\ \cdots & \underline{Z}_{ki} & \underline{Z}_{kj} & \underline{Z}_{kk} & \underline{Z}_{ka} & \underline{Z}_{kb} \\ \cdots & \underline{Z}_{ai} & \underline{Z}_{aj} & \underline{Z}_{ak} & \underline{Z}_{aa} & \underline{Z}_{ab} \\ \cdots & \underline{Z}_{bi} & \underline{Z}_{bj} & \underline{Z}_{bk} & \underline{Z}_{ba} & \underline{Z}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta y \\ \Delta y \end{bmatrix} = \Delta y \begin{bmatrix} \vdots \\ (\underline{Z}_{ia} + \underline{Z}_{ib}) \\ (\underline{Z}_{ja} + \underline{Z}_{jb}) \\ (\underline{Z}_{ka} + \underline{Z}_{kb}) \\ (\underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{ab}) \\ (\underline{Z}_{ba} + \underline{Z}_{bb}) \end{bmatrix}$$

$$(Z2) \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} \quad \text{czyli} \quad \mathbf{v}^T \mathbf{Z} = \left[\cdots \mid (\underline{Z}_{bi} - \underline{Z}_{ai}) \mid (\underline{Z}_{bj} - \underline{Z}_{aj}) \mid (\underline{Z}_{bk} - \underline{Z}_{ak}) \mid (\underline{Z}_{ba} - \underline{Z}_{aa}) \mid (\underline{Z}_{bb} - \underline{Z}_{ab}) \right]$$

$$(Z4) \quad 1 + \mathbf{v}^T \mathbf{Zu} = 1 + \Delta y (\underline{Z}_{ba} - \underline{Z}_{aa}) + \Delta y (\underline{Z}_{bb} - \underline{Z}_{ab}) = 1 + \Delta y (\underline{Z}_{bb} - \underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{ba} - \underline{Z}_{ab})$$

$$(Z5) \quad \mathbf{Zu} \cdot \mathbf{v}^T \mathbf{Z} = \Delta y \begin{bmatrix} \vdots \\ (\underline{Z}_{ia} + \underline{Z}_{ib}) \\ (\underline{Z}_{ja} + \underline{Z}_{jb}) \\ (\underline{Z}_{ka} + \underline{Z}_{kb}) \\ (\underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{ab}) \\ (\underline{Z}_{ba} + \underline{Z}_{bb}) \end{bmatrix} \cdot \left[\cdots \mid (\underline{Z}_{bi} - \underline{Z}_{ai}) \mid (\underline{Z}_{bj} - \underline{Z}_{aj}) \mid (\underline{Z}_{bk} - \underline{Z}_{ak}) \mid (\underline{Z}_{ba} - \underline{Z}_{aa}) \mid (\underline{Z}_{bb} - \underline{Z}_{ab}) \right]$$

$$(Z6) \quad \mathbf{Zu} \cdot \mathbf{v}^T \mathbf{Z} = \Delta y \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & (\underline{Z}_{ia} + \underline{Z}_{ib})(\underline{Z}_{bi} - \underline{Z}_{ai}) & (\underline{Z}_{ia} + \underline{Z}_{ib})(\underline{Z}_{bj} - \underline{Z}_{aj}) & (\underline{Z}_{ia} + \underline{Z}_{ib})(\underline{Z}_{bk} - \underline{Z}_{ak}) & (\underline{Z}_{ia} + \underline{Z}_{ib})(\underline{Z}_{ba} - \underline{Z}_{aa}) & (\underline{Z}_{ia} + \underline{Z}_{ib})(\underline{Z}_{bb} - \underline{Z}_{ab}) \\ \cdots & (\underline{Z}_{ja} + \underline{Z}_{jb})(\underline{Z}_{bi} - \underline{Z}_{ai}) & (\underline{Z}_{ja} + \underline{Z}_{jb})(\underline{Z}_{bj} - \underline{Z}_{aj}) & (\underline{Z}_{ja} + \underline{Z}_{jb})(\underline{Z}_{bk} - \underline{Z}_{ak}) & (\underline{Z}_{ja} + \underline{Z}_{jb})(\underline{Z}_{ba} - \underline{Z}_{aa}) & (\underline{Z}_{ja} + \underline{Z}_{jb})(\underline{Z}_{bb} - \underline{Z}_{ab}) \\ \cdots & (\underline{Z}_{ka} + \underline{Z}_{kb})(\underline{Z}_{bi} - \underline{Z}_{ai}) & (\underline{Z}_{ka} + \underline{Z}_{kb})(\underline{Z}_{bj} - \underline{Z}_{aj}) & (\underline{Z}_{ka} + \underline{Z}_{kb})(\underline{Z}_{bk} - \underline{Z}_{ak}) & (\underline{Z}_{ka} + \underline{Z}_{kb})(\underline{Z}_{ba} - \underline{Z}_{aa}) & (\underline{Z}_{ka} + \underline{Z}_{kb})(\underline{Z}_{bb} - \underline{Z}_{ab}) \\ \cdots & (\underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{ab})(\underline{Z}_{bi} - \underline{Z}_{ai}) & (\underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{ab})(\underline{Z}_{bj} - \underline{Z}_{aj}) & (\underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{ab})(\underline{Z}_{bk} - \underline{Z}_{ak}) & (\underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{ab})(\underline{Z}_{ba} - \underline{Z}_{aa}) & (\underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{ab})(\underline{Z}_{bb} - \underline{Z}_{ab}) \\ \cdots & (\underline{Z}_{ba} + \underline{Z}_{bb})(\underline{Z}_{bi} - \underline{Z}_{ai}) & (\underline{Z}_{ba} + \underline{Z}_{bb})(\underline{Z}_{bj} - \underline{Z}_{aj}) & (\underline{Z}_{ba} + \underline{Z}_{bb})(\underline{Z}_{bk} - \underline{Z}_{ak}) & (\underline{Z}_{ba} + \underline{Z}_{bb})(\underline{Z}_{ba} - \underline{Z}_{aa}) & (\underline{Z}_{ba} + \underline{Z}_{bb})(\underline{Z}_{bb} - \underline{Z}_{ab}) \end{bmatrix}$$

Autorzy:

prof. dr hab. inż. Piotr Kacejko, Politechnika Lubelska,

e-mail: p.kacejko@pollub.pl

prof. dr hab. inż. Jan Machowski, Politechnika Warszawska,

e-mail: jan.machowski@ien.pw.edu.pl

LITERATURA

1. Machowski J.: "Regulacja i stabilność systemu elektroenergetycznego" Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2007
2. Kacejko P, Machowski J.: Zwarcia w systemach elektroenergetycznych, wyd. II WNT, Warszawa 2009
3. Machowski J., Bialek J., Bumby J.: Power System Dynamics. Stability and Control. John Wiley & Sons, Chichester 2008
4. T. A. Davis: "Direct methods for sparse linear systems" Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006
5. El-Abiad C.H.: "Digital calculation off-line to ground short-circuit by matrix method". AIEE Transactions. 1960. Vol. 79

<http://www.cs.cornell.edu/~bindel/class/cs6210-f09/hw1.pdf>

6. Paul. M. Anderson: "Analysis of faulted power systems" IEEE Press Power System Engineering Series, 1973, IEEE Order Number PC5616
7. H. V. Henderson, S. R. Searle: "On deriving the inverse of a sum of matrices" Paper No. BU-647-M in the Biometrics Unit Series, January 1980.
8. Bindel, Fall 2009 Matrix Computations (CS 6210), Lecture 12. Sherman-Morrison-Woodbury
9. "Phase Shift Transformers Modelling" ENTSO-E v2.4.14, 28 May 2014, www.entsoe.eu
10. "Transformer modelling guide" AESO (Alberta Electric System Operator) <https://www.aeso.ca/assets/linkfiles/>
11. "Phase-shifting Transformer Modelling in PSS®E" Siemens Energy, Inc., Power Technology, Issue 111, Carlos Grande-Moran, carlos.grande@siemens.com