

Modelowanie systemów dynamicznych z wykorzystaniem transmitancji hybrydowych niecałkowitego rzędu

Streszczenie. W pracy zaproponowano nowe modele transmitancyjne niecałkowitego rzędu w postaci transmitancji hybrydowych, zawierających zarówno część całkowitego, jak i niecałkowitego rzędu. Rozważono modele z opóźnieniem i bez opóźnienia. Jako przykłady rozważono doświadczalny obiekt cieplny oraz silnik indukcyjny prądu przemiennego, sterowany częstotliwościowo. Wyniki eksperymentów potwierdziły przydatność proponowanych modeli do opisu rozważanych systemów dynamicznych.

Abstract. IN the paper new, transfer function, non integer order models are proposed. The considered models have a form of hybrid transfer functions containing both integer order and non integer order parts. Models with and without delay were discussed. As examples an experimental heat plant and AC motor were tested. Results of experiments show that the proposed hybrid models are useful tool to modeling of dynamic systems. **(Modeling of dynamic systems with the use of non integer order, hybrid transfer functions)**

Słowa kluczowe: systemy dynamiczne, systemy niecałkowitego rzędu, transmitancja niecałkowitego rzędu
Keywords: Dynamic systems, non integer order systems, non integer order transfer function

Uwagi wstępne

Jednym z głównych obszarów zastosowań rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu w automatyce jest modelowanie systemów dynamicznych o dynamice trudnej do opisu z użyciem innych metod. Modele niecałkowitego rzędu były analizowane i prezentowane przez wielu Autorów, przykładowo: [16], [5], [2], [4], [9], [18]. Analiza problemu dyfuzji z użyciem podejścia ułamkowego i półgrup Fellera jest prezentowana przykładowo w pracy: [17].

W niniejszej pracy zaprezentowano proponowane przez autora modele dynamiki systemów w postaci transmitancji hybrydowych. W pierwszej sekcji omówiono podstawowe pojęcia związane z rachunkiem różniczkowym niecałkowitego rzędu, Następnie przypomniano podstawowe aproksymacje ciągle stosowane w rachunku ułamkowym oraz aproksymację Pade'go, stosowaną do modelowania elementów opóźniających. W dalszej części omówiono proponowane modele niecałkowitego rzędu w postaci transmitancji hybrydowych bez opóźnienia i z opóźnieniem. Na końcu omówiono wyniki eksperymentalne dla doświadczalnego obiektu cieplnego oraz silnika indukcyjnego prądu przemiennego.

Podstawowe pojęcia i definicje

Na początku podane zostaną podstawowe definicje i pojęcia niezbędne do przedstawienia pozostałej części pracy. Rozpoczniemy od zdefiniowania pojęcia funkcji Gamma Eulera (zob np. [7]):

Definicja 1 funkcja Gamma

$$(1) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Następnie zdefiniowane zostanie pojęcie funkcji Mittag-Lefflera, która jest uogólnieniem funkcji wykładniczej $e^{\lambda t}$ na układy niecałkowitego rzędu i odgrywa kluczową rolę w rozwiązaniu równania stanu niecałkowitego rzędu. Jest ona zdefiniowana następująco:

Definicja 2 Jednoparametrowa funkcja Mittag-Lefflera

$$(2) \quad E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}$$

Z kolei dwuparametrowa funkcja Mittag-Lefflera jest zdefiniowana następująco:

Definicja 3 Dwuparametrowa funkcja Mittag-Lefflera

$$(3) \quad E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}$$

Zauważmy, że dla $\beta = 1$ funkcja dwuparametrowa (3) redukuje się do funkcji jednoparametrowej (2). Operator różniczkowo-całki niecałkowitego rzędu może być opisany kilkoma definicjami, podanymi przez: Grünvalda i Letnikova (definicja GL), Riemanna i Liouville'a (definicja RL) oraz Caputo (definicja C). Wszystkie te definicje są podane poniżej. Przy założeniu, że warunki początkowe są zerowe, definicje Riemanna i Liouville'a oraz Caputo są równoważne (zob np. [1], [16]).

Definicja 4 Definicja Grünvalda-Letnikova operatora różniczkowo-całki niecałkowitego rzędu ([2],[14])

$$(4) \quad {}_0^GL D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh)$$

W (4) $\binom{\alpha}{j}$ jest uogólnieniem symbolu Newtona na liczby rzeczywiste:

$$(5) \quad \binom{\alpha}{j} = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!}, & j > 0 \end{cases}$$

Definicja 5 Definicja Riemanna - Liouville'a operatora różniczkowo-całki niecałkowitego rzędu

$$(6) \quad {}_0^{RL} D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)} \frac{d^N}{dt^N} \int_0^{\infty} (t-\tau)^{N-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

gdzie $N - 1 < \alpha < N$ oznacza niecałkowity rząd operacji, a Γ jest funkcja Gamma opisaną przez (1).

Definicja Caputo, najczęściej stosowana obecnie jest zapisana następująco:

Definicja 6 Definicja Caputo operatora różniczkowo-całki

niecałkowitego rzędu

$$(7) \quad {}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f^{(N)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-N}} d\tau$$

W przypadku definicji RL lub C można zdefiniować transformatę Laplace'a (zob np [6]) i jest ona uogólnieniem transformaty Laplace'a dla pochodnej i całki rzędu całkowitego:

Definicja 7 Transformata Laplace'a dla operatora Riemann - Liouville'a

$$\mathcal{L}({}_0^{RL} D_t^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s), \quad \alpha < 0$$

$$(8) \quad \mathcal{L}({}_0^{RL} D_t^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{\alpha-k-1} f(0),$$

$$\alpha > 0, \quad n-1 < \alpha \leq n \in \mathbb{N}$$

Definicja 8 Transformata Laplace'a dla operatora Caputo

$$\mathcal{L}({}_0^C D_t^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s), \quad \alpha < 0$$

$$(9) \quad \mathcal{L}({}_0^C D_t^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} D_t^k f(0),$$

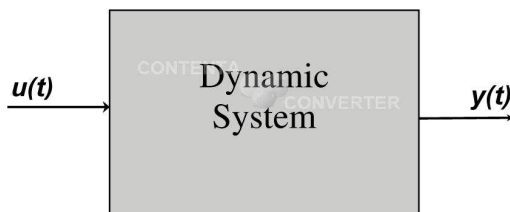
$$\alpha > 0, \quad n-1 < \alpha \leq n \in \mathbb{N}$$

Można podać również definicję odwrotnej transformaty Laplace'a (zob np. [7] s.299):

$$(10) \quad \mathcal{L}^{-1}[s^\alpha F(s)] = {}_0 D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+)$$

$$n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Następnie rozważmy system dynamiczny niecałkowitego rzędu, którego wejściem jest funkcja czasu $u(t)$, a wyjściem jest funkcja czasu $y(t)$, pokazany w uproszczeniu na rysunku 1.



Rys. 1. System dynamiczny

Załóżmy, że zależność pomiędzy wyjściem i wejściem systemu opisana jest liniowym równaniem różniczkowym niecałkowitego rzędu o postaci (11):

$$(11) \quad a_n D^{\alpha_n} y(t) + \dots + a_1 D^{\alpha_1} y(t) + a_0 y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + \dots + b_1 D^{\beta_1} u(t) + b_0 u(t)$$

gdzie $\alpha_0 \dots \alpha_n$ oraz $\beta_0 \dots \beta_m$ oznaczają niecałkowite rzędy równania, $a_0 \dots a_n$ oraz $b_0 \dots b_m$ są współczynnikami, $\beta_m < \alpha_n$, D^{\dots} jest operatorem różniczkowania niecałkowitego rzędu opisanym przez (9) lub (8) i wszystkie warunki początkowe na sygnały $u(t)$ oraz $y(t)$ są zerowe.

Po przyjęciu powyższych założeń transmitancja operatorowa niecałkowitego rzędu dla obiektu opisanego przez (11) jest zdefiniowana analogicznie, jak w przypadku systemów dynamicznych całkowitego rzędu. Jest to stosunek transformat Laplace'a sygnałów: wyjściowego i wejściowego:

Definicja 9 Transmitancja operatorowa niecałkowitego rzędu

$$(12) \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0}{a_n s^{\alpha_n} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0}$$

Transmitancja (12) może być modelowana w środowisku MATLAB wyłącznie z użyciem skończenie wymiarowych aproksymacji całkowitego rzędu. Przykłady dwóch typowych aproksymacji używanych do tego celu są podane w następnej sekcji.

Aproksymacje ciągłe transmitancji niecałkowitego rzędu

Aproksymacje całkowitego rzędu podstawowych elementów ułamkowych były prezentowane w wielu pracach, np [2], W tym miejscu zostaną przypomniane dwie typowe, zbliżone do siebie aproksymacje, zaproponowane przez Charefa (zob. [3]), oraz Oustaloupa (zob [15],[8]). Idea obu tych metod jest bardzo zbliżona do siebie i polega na przybliżeniu charakterystyki Bodego modułu transmitancji ułamkowej poprzez charakterystykę elementu aproksymującego.

Aproksymacja Charefa

Aproksymacja Charefa jest stosowana do przybliżenia transmitancji podstawowego elementu inercyjnego ułamkowego rzędu o postaci:

$$(13) \quad G(s) = \frac{1}{(Ts+1)^{\alpha_1}}$$

gdzie T jest stałą czasową, $0 < \alpha_1 < 1$ jest ułamkowym rzędem obiektu. Aproksymacja skończenie wymiarowa elementu (13) zaproponowana przez Charefa ma następującą postać:

$$(14) \quad G(s) = \frac{\prod_{i=0}^{N_{Ch}} (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^{N_{Ch}} (1 + \frac{s}{p_i})}$$

gdzie z_i oraz p_i są zerami i biegunami aproksymacji, N_{Ch} jest rzędem aproksymacji. Zera i bieguny aproksymacji są zdefiniowane następująco:

$$(15) \quad p = \frac{1}{T}$$

$$(16) \quad p_0 = p\sqrt{b}$$

$$(17) \quad p_i = p_0(ab)^i \quad i = 1 \dots N$$

$$(18) \quad z_i = ap_0(ab)^i \quad i = 1 \dots N$$

gdzie:

$$(19) \quad a = 10^{\frac{\Delta}{10(1-\alpha_1)}}$$

$$(20) \quad b = 10^{\frac{\Delta}{10\alpha_1}}$$

W (19) i (20) Δ jest maksymalnym błędem aproksymacji, wyrażonym w [dB]. Dobór wielkości tego parametru niezależnie od modelowanego obiektu może być wykonany doświadczalnie z użyciem podejścia omówionego w pracy [11].

Aproksymacja Oustaloupa (ORA)

Aproksymacja ORA (zob [15], [8]) jest dedykowana do zapisu elementarnej transmitancji niecałkowitego rzędu o postaci (21).

$$(21) \quad G(s) = s^{\alpha_2}$$

Transmitancja aproksymująca ma postać zbliżoną do aproksymacji Charefa (14):

$$(22) \quad G_{ORA} = \frac{\prod_{n=1}^{N_{ORA}} (1 + \frac{s}{\mu_n})}{\prod_{n=1}^{N_{ORA}} (1 + \frac{s}{\nu_n})}$$

W równaniu (22) N_{ORA} oznacza rząd aproksymacji, μ i ν są zerami i biegunami transmitancji aproksymującej, zdefiniowanymi następująco:

$$(23) \quad \mu_1 = \omega_l \sqrt{\eta}$$

$$(24) \quad \nu_n = \mu_n \gamma \quad n = 1 \dots N$$

$$(25) \quad \mu_{n+1} = \nu_n \eta \quad n = 1 \dots N - 1$$

gdzie:

$$(26) \quad \gamma = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\left(\frac{\alpha_2}{N}\right)}$$

$$(27) \quad \eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\left(\frac{1-\alpha_2}{N}\right)}$$

W (26) i (27) ω_l oraz ω_h oznaczają zakres pulsacji, dla jakiej aproksymacja ma być zastosowana. W praktycznej sytuacji zakres pulsacji powinien być jak największy, gdyż gwarantuje to dobrą dokładność aproksymacji (zob [11]).

Proponowane modele w postaci transmitancji hybrydowej

Wyniki wcześniejszych prac autora (zob np.[13], [10]) wskazują, że model o dobrej dokładności i niezbyt wysokiego rzędu może być otrzymany jako połączenie modelu całkowitego rzędu z modelem ułamkowym. Można tu zaproponować następujące modele:

$$(28) \quad G_1(s) = \frac{1}{(T_{\alpha_1} s^{\alpha_1} + 1)(T_{n_1} s + 1)^{n_1}}$$

gdzie: T_{α_1} i T_{n_1} są stałymi czasowymi części ułamkowej i całkowitej, $0 < \alpha_1 < 1$ oraz $n_1 \in \mathbb{Z}$ są rzędami części ułamkowej i całkowitej. Element ułamkowego rzędu s^{α_1} w transmitancji (28) może być opisany z użyciem aproksymacji ORA (zob. np.[15]).

Drugi model hybrydowy model proponowany przez autora ma postać następująca:

$$(29) \quad G_2(s) = \frac{1}{(T_{\alpha_2} s + 1)^{\alpha_2} (T_{n_2} s + 1)^{n_2}}$$

gdzie: T_{α_2} i T_{n_2} są również stałymi czasowymi części ułamkowej i całkowitej, $0 < \alpha_2 < 1$ i n_2 oznaczają rzędy tych części. Element inercyjny ułamkowego rzędu $\frac{1}{(T_{\alpha_2} s + 1)^{\alpha_2}}$ w (29) jest aproksymowany z wykorzystaniem aproksymacji

Charefa (14).

W przypadku rozważanego obiektu można też zaproponować model niecałkowitego rzędu z opóźnieniem, opisany następującą transmitancją operatorową:

$$(30) \quad G_3(s) = \frac{e^{-\tau s}}{T_{\alpha_3} s^{\alpha_3} + 1}$$

W równaniu (30) T_{α_3} jest stałą czasową, τ jest czasem martwym modelu.

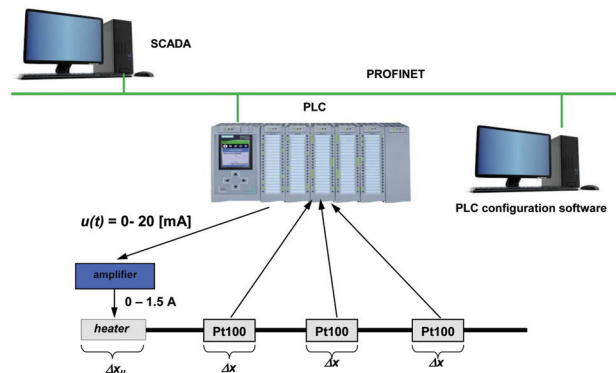
Odpowiedź skokowa każdej z powyższych transmitancji jest opisana następująco:

$$(31) \quad y_i(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} G_i(s)\right\}, \quad i = 1, 2, 3$$

Przykłady

Model hybrydowy obiektu cieplnego

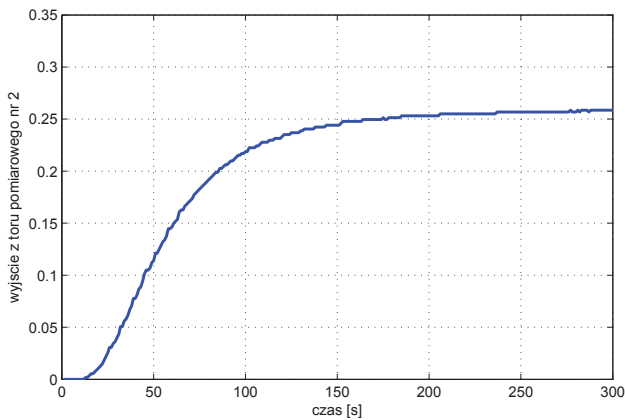
Jako pierwszy przykład rozważmy eksperymentalny obiekt cieplny pokazany na rysunku 2. Jego główną częścią jest miedziany pręt długości 260[mm]. W celu uproszczenia dalszych rozważań zakładamy, że jego długość wynosi 1.0 i długości pozostałych elementów (grzałka i czujniki temperatury Pt100) będą odnoszone do długości jednostkowej. Pręt jest ogrzewany grzałką długości $\Delta x_0 = 0.14$ zlokalizowaną na jednym z końców. Temperatura pręta jest odczytywana z wykorzystaniem czujników Pt100 o długości Δx zamocowanych w punktach: 0.29, 0.50 and 0.73 długości pręta. Sygnałem wejściowym jest znormalizowany analogowy sygnał prądowy z zakresu 0 – 20[mA], podawany z wyjścia analogowego sterownika PLC. Sygnał ten jest następnie wzmacniany do zakresu 0 – 1.5[A] i podawany na grzałkę. Sygnały z czujników Pt100 są odczytywane bezpośrednio przez wejścia analogowe sterownika PLC. Dane ze sterownika są odczytywane przez aplikację SCADA, połączoną ze sterownikiem za pośrednictwem sieci PROFINET. W dalszej części rozdziału zakładamy, że rozważamy tylko wyjście nr 2 z obiektu. Odpowiedź skokowa układu na tym wyjściu pokazana jest na rysunku 3.



Rys. 2. System eksperymentalny z obiektem cieplnym

Opisany powyżej obiekt może być opisany wieloma modelami matematycznymi całkowitego rzędu, zarówno w przestrzeni stanu, jak też w postaci transmitancji operatorowej (zob np [13]). Wyniki wcześniejszych badań wskazują, że wszystkie rozważane wcześniej modele całkowitego rzędu mogą być uogólnione do modeli rzędu niecałkowitego.

Eksperymenty wykonano z wykorzystaniem układu doświadczalnego pokazanego na rysunku 2. Odpowiedź skokowa była testowana w przedziale czasu $T_f = 300[s]$ z



Rys. 3. odpowiedź skokowa na wyjściu nr 2 obiektu cieplnego okresem próbkowania równym $T_s = 1[s]$, parametry wszystkich rozważanych modeli były wyznaczane poprzez minimalizację typowego wskaźnika średniokwadratowego (MSE):

$$(32) \quad MSE = \frac{1}{K_s} \sum_{k=1}^{K_s} (e^+(k))^2$$

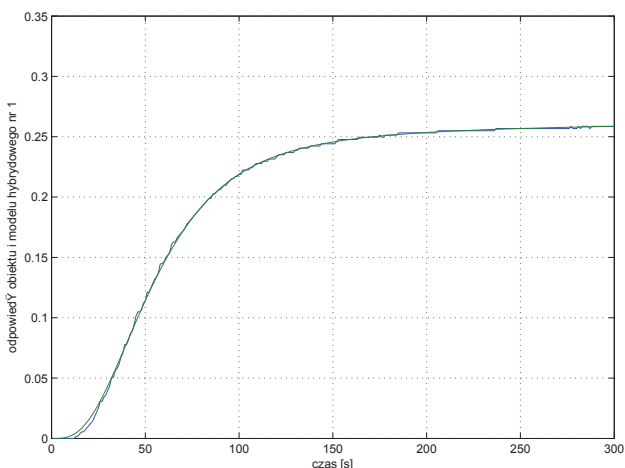
W (32) K_s oznacza ilość zebranych próbek, a $e^+(k)$ oznacza różnicę pomiędzy wartością sygnału zmierzonego $y(t)$ i wyliczonego z użyciem modelu $y_m(t)$ w k tej chwili czasu:

$$(33) \quad e^+(k) = y(kT_s) - y_m(kT_s)$$

Identyfikacja parametrów dla wszystkich omówionych powyżej modeli została przeprowadzona poprzez minimalizację funkcji kosztu (32). Wyniki są podane w tabelach: 1, 2, 3 oraz pokazane na rysunkach: 4, 5, 6. W przypadku

Tabela 1. Parametry modelu hybrydowego (28) dla obiektu cieplnego

Parametr	n_1	α_1	T_{α_1}	T_{n_1}	MSE	N_{ORA}	P
Value	3	0.8560	15.2613	12.1504	1.9984e-06	8	5



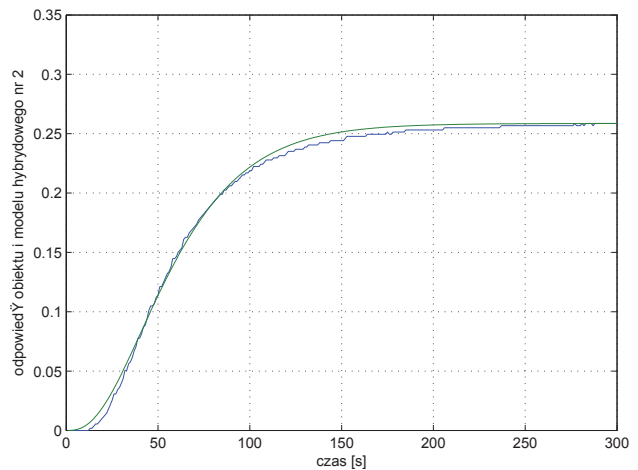
Rys. 4. Odpowiedzi skokowe: obiektu cieplnego i modelu hybrydowego (28)

Tabela 2. Parametry modelu hybrydowego (29) dla obiektu cieplnego

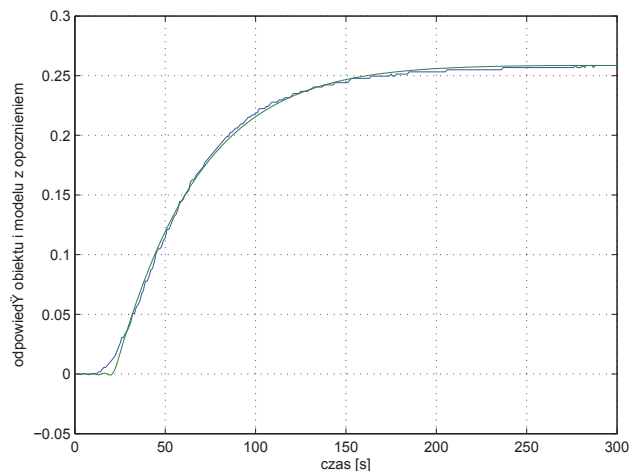
Parametr	n_2	α_2	T_{α_2}	T_{n_2}	MSE	N_{CH}	Δ
Wartość	3	0.0494	0.0012	20.3329	1.3426e-05	8	0.1

Tabela 3. Parametry modelu hybrydowego z opóźnieniem (30) dla obiektu cieplnego

Parametr	α_3	T_{α_3}	τ	MSE	N_{ORA}	MP
Wartość	1.0307	50.4737	21.5191	8.4810e-06	8	10



Rys. 5. Odpowiedzi skokowe: obiektu cieplnego i modelu hybrydowego (29)

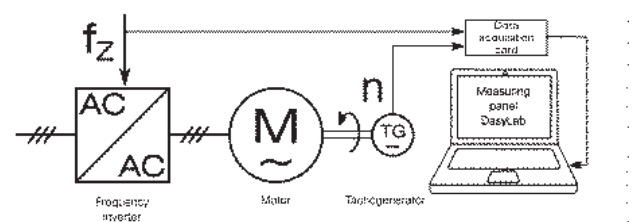


Rys. 6. Odpowiedzi skokowe: obiektu cieplnego i modelu z opóźnieniem (30)

rozważanego obiektu cieplnego najdokładniejszym modelem w sensie funkcji kosztu (32) jest model bez opóźnienia, opisany przez transmitancję (28).

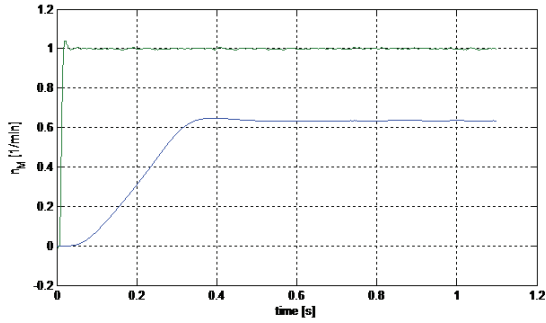
Model hybrydowy sterowania prędkością obrotową silnika indukcyjnego

Jako drugi przykład rozważmy system sterowania prędkością obrotową silnika elektrycznego, pokazany na rysunku 7. Jego główną częścią jest 3 fazowy silnik elektryczny prądu przemiennego 3SG90L-4, 1,5kW, 230/400V, 1440 /min, którego prędkość obrotowa jest sterowana za pośrednictwem falownika Schneider Electric Telemecanique Altivar 28. Prędkość obrotowa wału silnika mierzona jest z użyciem tachoprądnicy, której sygnał wyjściowy jest zbierany przez środowisko DasyLab za pośrednictwem karty przemysłowej Advantech PCL818HD. Prędkość obrotowa wału silnika przy



Rys. 7. Układ doświadczalny z silnikiem asynchronicznym skokowej zmianie częstotliwości sygnału zasilającego z 20

[Hz] na 50 [Hz] pokazana jest na rysunku 8. Opisyany powyżej

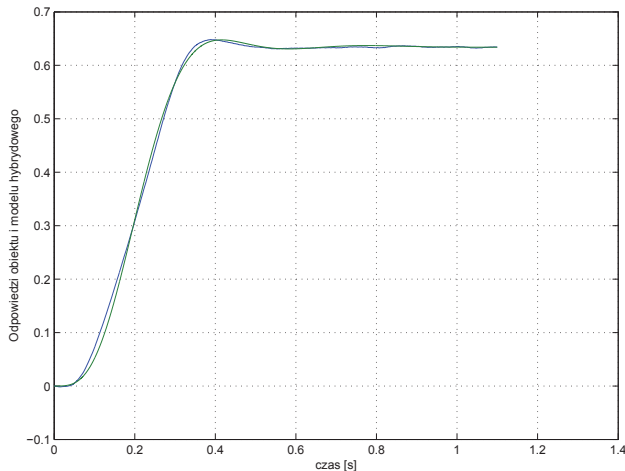


Rys. 8. Prędkość obrotowa silnika w funkcji częstotliwości sygnału zasilającego

model sterowania prędkością został opisany z wykorzystaniem transmitancji hybrydowej (28). Metodyka identyfikacji parametrów tej transmitancji dla rozważanego przykładu bazuje również na wykorzystaniu funkcji kosztu (32) i została dokładnie omówiona w pracy [10]. Parametry modelu (28) dla rozważanego silnika elektrycznego są podane w tabeli 4, porównanie odpowiedzi skokowych: obiektu i modelu (28) pokazane są na rysunku 9. Z kolei model z opóźnieniem (30) dla rozważanego silnika elektrycznego został zaprezentowany w tabeli 3 oraz na rysunku 10.

Tabela 4. Parametry modelu hybrydowego (28) dla silnika elektrycznego

Parametr	α_1	T_{α_1}	T_{n_1}	N_{ORA}	n_1	MSE
Wartość	1.729	0.0068	0.0656	2	3	1.1679e-05



Rys. 9. Odpowiedzi skokowe: silnika i modelu hybrydowego (28)

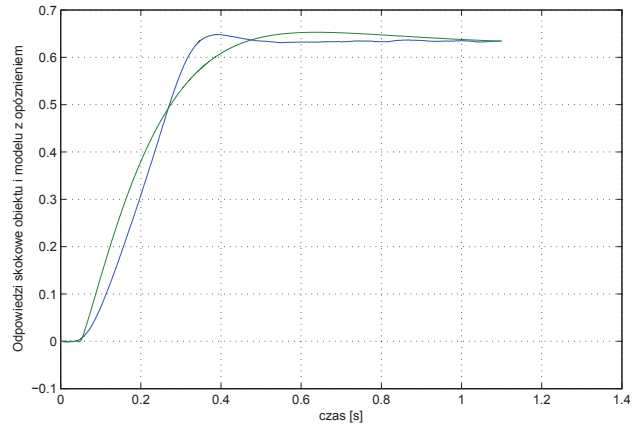
Tabela 5. Parametry modelu hybrydowego z opóźnieniem (30) dla silnika elektrycznego

Parametr	α_1	T_{α_3}	τ	N_{ORA}	N_P	MSE
Wartość	1.667	0.1154	0.052	8	10	2.9505e-04

Na podstawie analizy wyników doświadczalnych dla rozważanego modelu sterowania prędkością silnika można stwierdzić, że model hybrydowy nie zawierający opóźnienia jest znacznie dokładniejszy od modelu z opóźnieniem, podobnie, jak w wypadku procesu cieplnego rozważanego w poprzednim przykładzie.

Uwagi końcowe

Jako podsumowanie niniejszej pracy można stwierdzić, że wszystkie proponowane modele niecałkowitego rzędu poprawnie i z dobrą dokładnością opisują rozważane systemy dynamiczne. Należy też zauważyć, że w przypadku stosowania modeli niecałkowitego rzędu dodanie do modelu



Rys. 10. Odpowiedzi skokowe: silnika i modelu hybrydowego z opóźnieniem (30)

członu opóźniającego nie poprawia w znaczący sposób jego dokładności.

Istotnym problemem który jest aktualnie badany przez autora jest możliwość wystąpienia kompensacji biegunów i zer aproksymacji niecałkowitego rzędu oraz części całkowitego rzędu, które to zjawisko może wystąpić przy szczególnych wartościach parametrów modelu i aproksymacji. Jego wystąpienie może spowodować znaczne pogorszenie dokładności modelu. Podobny problem w przypadku modelowania transmitancji niecałkowitego rzędu z biegunami i zerami był oraz aproksymacji Charefa był rozważany w pracy [12].

W ramach dalszych badań planuje się także zastosowanie prezentowanych modeli do konstrukcji specjalnych algorytmów sterowania niecałkowitego rzędu, np. regulatora reducyjnego lub predyktora Smitha niecałkowitego rzędu.

Praca została zrealizowana w ramach działalności statutowej AGH, umowa nr 11.11.120.815.

Author: dr hab inż. Krzysztof Oprzędkiewicz, AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej, Katedra Automatyki i Inżynierii Biomedycznej, al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, Polska email: kop@agh.edu.pl,

LITERATURA

- [1] A. Bhrawy, M. Zaky, D. Baleanu, and M. Abdelkawy. A novel spectral approximation for two-dimensional fractional sub-diffusion problems. *Romanian Journal of Physics*, 60(3):344–359, 2015.
- [2] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, and I. Petráš. Fractional order systems: Modeling and control applications. In L. O. Chua, editor, *Series on Nonlinear Science*, pages 1–178. University of California, Berkeley, 2010.
- [3] A. Charef, H. Sun, Y. Tsao, and B. Onaral. Fractional system as represented by singularity function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(9):1465–1470, 1992.
- [4] S. Das. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Control*. Springer, Berlin, 2010.
- [5] A. Dzieliński, D. Sierociuk, and G. Sarwas. Some applications of fractional order calculus. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, 58(4):583–592, 2010.
- [6] T. Kaczorek. *Selected Problems of Fractional Systems Theory*. Springer, Berlin, 2011.
- [7] T. Kaczorek and K. Rogowski. *Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*. Białystok University of Technology, Białystok, 2014.
- [8] F. Merrikh-Bayat. Rules for selecting the parameters of oustaloup recursive approximation for the simulation of linear feedback systems containing $pi^{alpha} d^mu$ controller. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 17(1):1852–1861, 2012.
- [9] A. Obraczka. *Control of heat processes with the use of non-integer models*. PhD thesis, AGH University, Krakow, Poland, 2014.
- [10] K. Oprzędkiewicz and T. Kołacz. A non integer order model of

- frequency speed control in ac motor. In M. K. Roman Szewczyk, Cezary Zieliński, editor, *Advances in Intelligent Systems and Computing vol. 440*, page 287–298. Springer, Switzerland, 2016.
- [11] K. Oprzędkiewicz, W. Mitkowski, and E. Gawin. An estimation of accuracy of oustaloup approximation. In M. K. Roman Szewczyk, Cezary Zieliński, editor, *Advances in Intelligent Systems and Computing vol. 440*, pages 299–307. Springer, Switzerland, 2016.
- [12] K. Oprzędkiewicz. Approximation method for a fractional order transfer function with zero and pole. *Archives of Control Sciences*, 24(4):409–425, 2014.
- [13] K. Oprzędkiewicz, W. Mitkowski, and E. Gawin. Application of fractional order transfer functions to modeling of high – order systems. In *MMAR 2015 : 20th international conference on Methods and Models in Automation and Robotics : 24–27 August 2015, Międzyzdroje, Poland : program, abstracts, proceedings*, 2015. (CD-ROM).
- [14] P. Ostalczyk. Equivalent descriptions of a discrete-time fractional-order linear system and its stability domains. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 22(3):533–538, 2012.
- [15] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, and F. Nanot. Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory Applications*, 47(1):25–39, 2000.
- [16] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [17] E. Popescu. On the fractional cauchy problem associated with a feller semigroup. *Mathematical Reports*, 12(2):181–188, 2010.
- [18] D. Sierociuk, T. Skovranek, M. Macias, I. Podlubny, I. Petras, A. Dzieliniski, and P. Ziubinski. Diffusion process modeling by using fractional-order models. *Applied Mathematics and Computation*, 257(1):2–11, 2015.