

Analiza wpływu zmiennej rezystywności elektrycznej na pole termiczne szynoprzewodu cylindrycznego metodą funkcji Greena

Streszczenie. W pracy zbadano wpływ zmiennej rezystywności elektrycznej na nieustalone pole termiczne szynoprzewodu cylindrycznego. Analizę przeprowadzono metodą funkcji Greena. Na tej podstawie wyznaczono długotrwałe prądy dopuszczalne, krzywe rozgrzewu oraz termiczne stałe czasowe modeli układu ze zmiennym i stałym oporem właściwym. Wyniki pozytywnie zweryfikowano metodą elementów skończonych za pomocą modułu matematycznego modelowania programu Comsol Multiphysics.

Abstract. The influence of the variable electric resistivity on the transient thermal field of a cylindrical bus bar has been analysed in this paper. The Green's function was used for this purpose. On this basis, the steady state current rating, the heating curves and the thermal time constants of the model of the system with variable and state resistivity were determined. Results were verified with the finite elements method. A mathematical modeling module of the Comsol Multiphysics software was applied for this purpose. (Analysis of the variable electric resistivity influence on the thermal field of a cylindrical bus bar with the use of the Green's function).

Słowa kluczowe: szynoprzewód cylindryczny, funkcja Greena, krzywa rozgrzewu, termiczna stała czasowa
Keywords: cylindrical bus bar, Green's function, heating curve, thermal time constant

Wstęp

Rezystywność elektryczna materiałów przewodzących prąd jest istotnie zależna od ich temperatury. Przyjmuje się, że w zakresie do 200°C rezystywność metali $\rho(T)$ wyraża się wzorem [1]

$$(1) \quad \rho(T) = \rho(T_0)[1 + \varepsilon(T - T_0)], \text{ gdzie}$$

$\rho(T_0)$ - rezystywność materiału w temperaturze otoczenia T_0 , ε - temperaturowy współczynnik rezystywności, T - temperatura. Z (1) wynika, że np. dla miedzi czterokrotny wzrost temperatury od 20°C do 80°C powoduje zmianę rezystywności o ok. 24%.

Od strony matematycznej uwzględnienie (1) spowoduje, że w równaniu przewodnictwa cieplnego (2) pojawi się dodatkowy składnik (czwarty wyraz po lewej stronie). Utrudnia to uzyskanie rozwiązania.

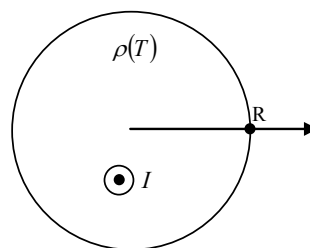
Równania przewodnictwa cieplnego [2], [3], [13] mogą być rozwiązywane numerycznie lub analitycznie. Chociaż rozwiązania analityczne są stosunkowo rzadko prezentowane w literaturze przedmiotu, to posiadają szereg zalet. Najważniejszą jest wynik w postaci wzoru. M. in. ułatwia to: interpretację fizyczną rozwiązania, dyskusję wpływu poszczególnych parametrów oraz testowanie rozwiązań numerycznych. Z wymienionych powodów autorzy pracy wybrali metodę analityczną. Analityczne podejście przedstawiono również w [4]. Stosowano tam metodę przekształcenia Laplace'a. Transformatę odwrotną uzyskano przy pomocy twierdzenia o residuach, co w tym zagadnieniu było dosyć trudne. Z kolei w [5] zastosowano metodę linearyzacji optymalnej. Polega ona na zastąpieniu równania przewodnictwa cieplnego równaniem liniowym z optymalnymi parametrami. Te ostatnie były wyznaczane na drodze minimalizacji odpowiednio zdefiniowanych funkcjonalów. W rezultacie w [5] otrzymano rozwiązania przybliżone uwzględniające m. in. zmianę rezystywności od temperatury. Zwykle jednak w przypadku obliczeń analitycznych przyjmuje się stałe wartości rezystywności np. w [6], [7].

W niniejszej pracy autorzy wykorzystali całkowicie inną metodę, opartą na funkcji Greena. Podstawową jej zaletą jest całkowita postać rozwiązania [8], [9], [10]. Pozwala to m. in. uwzględnić źródła ciepła dowolnie uzależnione od czasu i współrzędnych geometrycznych. Oprócz przestrzenno-czasowych krzywych rozgrzewu w niniejszej

pracy wyznaczono również termiczne stałe czasowe oraz dopuszczalny prąd długotrwały.

Przedmiotem rozważań jest cylindryczny przewód szynowy osłonięty od bezpośredniego promieniowania słonecznego. Jego przekrój poprzeczny pokazano na rys. 1. Założono, że długość układu jest znacznie większa od średnicy. Rezystywność elektryczna materiału przewodu zmienia się według zależności (1). Wpływ temperatury na pozostałe parametry termofizyczne (λ - przewodność cieplną, c - ciepło właściwe) jest znacznie mniejszy niż w przypadku rezystywności. Np. dla miedzi odpowiednie współczynniki wpływu są ok. dziesięć razy mniejsze [11]. Z tego powodu założono stałe wartości λ oraz c .

Analizowany w pracy szynoprzewód ma szerokie zastosowanie w energetyce, m. in. w stacjach rozdzielczych do przesyłu dużych mocy jak również w układach łączeniowych generatorów i transformatorów [12].



Rys. 1. Przekrój poprzeczny szynoprzewodu cylindrycznego

Zagadnienie brzegowo-początkowe pola termicznego szynoprzewodu

Uwzględniając w bilansie energetycznym zależność (1) oraz założenia podane w końcowej części poprzedniego rozdziału, otrzymano następujące równanie względem przyrostu temperatury $v(r,t) = T(r,t) - T_0$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 v(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(r,t)}{\partial r} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial v(r,t)}{\partial t} + mv(r,t) = -\frac{g_0}{\lambda}$$

dla $0 \leq r \leq R, t > 0$, gdzie:

$$m = \frac{\rho(T_0)\varepsilon^2}{\pi^2 R^4 \lambda} (1 + \gamma_s), \quad \chi = \frac{\lambda}{c\mu} - \text{dyfuzyjność,}$$

$g_0 = \frac{\rho(T_0)I^2}{\pi^2 R^4} (1 + y_s)$ - wydajność przestrzennych źródeł ciepła w zakresie częstotliwości przemysłowych, r - współrzędna radialna, R - promień szynoprzewodu, I - wartość skuteczna prądu, t - czas, μ - gęstość, y_s - współczynnik naskórkowości [1].

Zewnętrzna powierzchnia przewodu dla ($r=R$) oddaje ciepło za pośrednictwem konwekcji naturalnej oraz promieniowania. Wspomnianą wymianę opisuje brzegowy warunek Hankela [2], [3], [13]

$$(3) \quad \left. \frac{\partial v(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\alpha}{\lambda} [v(R,t)],$$

gdzie: α - całkowity współczynnik przejmowania ciepła.

Przed włączeniem zasilania układ znajdował się w temperaturze otoczenia T_0 . Z definicji przyrostu podanej nad wzorem (2) wynika warunek początkowy

$$(4) \quad v(r,0) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq r \leq R.$$

W celu usunięcia czwartego składnika występującego po lewej stronie (2), wprowadzono nową funkcję $w(r,t)$ [8]

$$(5) \quad v(r,t) = w(r,t)e^{m\chi t}$$

Po podstawieniu (5) do równań (2)-(4) otrzymano:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r,t)}{\partial r} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial w(r,t)}{\partial t} = -\frac{g_0}{\lambda} e^{-m\chi t}$$

dla $0 \leq r \leq R, t > 0,$

$$(7) \quad \left. \frac{\partial w(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\alpha}{\lambda} [w(R,t)],$$

$$(8) \quad w(r,0) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq r \leq R.$$

Jak widać, w (6) występuje zależne od czasu źródło ciepła, zaś postać (7)-(8) jest analogiczna do (3) i (4).

Funkcja Grena

Zagadnienie brzegowo-początkowe dla funkcji Greena $G = G(r,t,\xi,\eta)$ [8], [9] zdefiniowano jak niżej

$$(9) \quad \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{1}{\chi} \delta(r-\xi)(t-\eta)$$

dla $0 \leq r \leq R, t \geq \eta,$

$$(10) \quad \left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\alpha}{\lambda} [G]_{r=R},$$

$$(11) \quad G = 0 \quad \text{dla} \quad t < \eta \quad \text{- warunek przyczynowości,}$$

(12) $G(r,t,\xi,\eta) = G(\xi,-\eta,r,t)$ - warunek wzajemności funkcji Greena, gdzie prawa strona (9) jest iloczynem przesuniętych impulsów Diraca (w przestrzeni o ξ , w czasie o η). W interpretacji fizycznej funkcja Grena jest polem termicznym generowanym przez wyżej zdefiniowany impuls cieplny.

Funkcja Greena G jest jądrem operatora całkowitego odwrotnego względem operatora $\nabla^2(\dots) - \frac{1}{\chi} \frac{\partial(\dots)}{\partial t}$. Po uwzględnieniu warunków brzegowych (7), (10) oraz początkowych (8), (11) ostatecznie otrzymano [8], [9]

$$(13) \quad w(r,t) = \frac{\chi}{\lambda} \int_0^t \int_0^R g_0 e^{-m\chi\eta} G(r,t,\xi,\eta) \xi d\xi d\eta.$$

W celu wyznaczenia funkcji Greena wprowadza się jednorodne zagadnienie pomocnicze [8] względem funkcji $\Psi(r,t)$

$$(14) \quad \frac{\partial^2 \Psi(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial r} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} = 0$$

dla $0 \leq r \leq R, t > 0,$

$$(15) \quad \left. \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\alpha}{\lambda} [\Psi(R,t)],$$

$$(16) \quad \Psi(r,0) = F(r) \quad \text{dla} \quad 0 \leq r \leq R,$$

gdzie $F(r)$ jest dowolnym rozkładem warunku początkowego.

Zagadnienie (14)-(16) rozwiązano dwiema metodami: rozdzielania zmiennych [3], [13] i funkcji Greena [8], [9], [10] zdefiniowanej za pomocą (9)-(12). Po odpowiednim porównaniu rozwiązań oraz zamianie $t \rightarrow t-\eta$ otrzymano poszukiwaną funkcję Greena

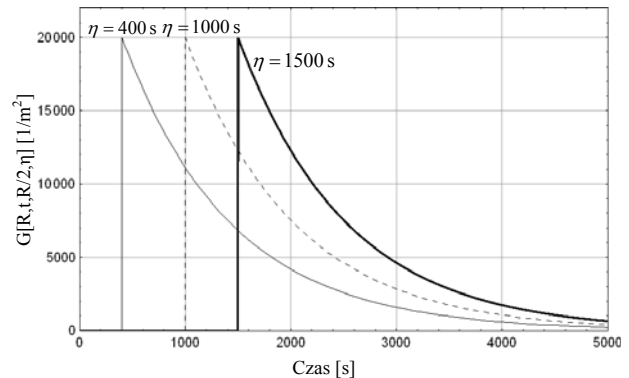
$$(17) \quad G(r,t,\xi,\eta) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\gamma_n^2}{R^2} \chi(t-\eta)}}{J_0^2(\gamma_n) + J_1^2(\gamma_n)} J_0\left(\gamma_n \frac{\xi}{R}\right) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{R}\right)$$

dla $0 \leq r \leq R, t \geq \eta,$

gdzie γ_n jest określone za pomocą równania wartości własnych

$$(18) \quad J_1(\gamma_n) - \frac{\alpha R}{\lambda \gamma_n} J_0(\gamma_n) = 0,$$

zaś $J_p(\dots)$ są funkcjami Bessela pierwszego rodzaju rzędu p . Na rys. 2 przykładowo zilustrowano przebiegi funkcji Greena (17) w punkcie $r=R$ dla przypadku generacji impulsu termicznego w punkcie $\xi=R/2$ przy różnych czasach η jego opóźnienia. Rys. 2 sporządzono wykorzystując dane wykazane w zestawieniu (21).



Rys. 2. Wykresy funkcji Greena $G = G(r=R,t,\xi=R/2,\eta)$ przy różnych czasach opóźnienia η

Przestrzenno czasowe krzywe rozgrzewu, stałe czasowe i dopuszczalne prądy długotrwałe cylindrycznego szynoprzewodu o zmiennej rezystywności

Funkcję Greena (17) podstawiono do (13) i scałkowano. Następnie otrzymany wynik podstawiono do (5). Wykorzystano również definicję przyrostu podaną przed wzorem (2). Ostatecznie przestrzenno-czasowy rozkład temperatury przy zmiennej rezystywności wyraża się zależnością

(19)

$$T(r,t) = T_0 + \frac{2g_0 R^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\gamma_n) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{R}\right)}{\gamma_n (\gamma_n^2 - mR^2) [J_0^2(\gamma_n) + J_1^2(\gamma_n)]} \left[1 - e^{-\chi \left(\frac{\gamma_n^2 - m}{R^2}\right) t} \right]$$

dla $0 \leq r \leq R, t > 0$.

Z kolei stacjonarny rozkład otrzymano z (19) przy $t \rightarrow \infty$

(20)

$$T_s(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} T(r,t) = T_0 + \frac{2g_0 R^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\gamma_n) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{R}\right)}{\gamma_n (\gamma_n^2 - mR^2) [J_0^2(\gamma_n) + J_1^2(\gamma_n)]}$$

dla $0 \leq r \leq R$.

Wzór (20) jest niezbędny do wyznaczenia dopuszczalnego prądu długotrwałego.

Rozkłady (19), (20) oraz inne parametry układu obliczono za pomocą programu napisanego w środowisku Mathematica 10.3 [14]. Jako przykład wybrano cylindryczny miedziany szynoprzewód dla którego przyjęto następujące dane:

$$(21) \quad R=0.01m, \lambda=360 \text{ W/(mK)}, c=400 \text{ J/(kgK)}, \mu=8700 \text{ kg/m}^3, \alpha=17 \text{ W/(m}^2\text{K)}, \rho(T_0=20^\circ\text{C})=1.7241 \cdot 10^{-8} \Omega m, \varepsilon=39.31 \cdot 10^{-4} 1/K, y_s=0.0176, T_0=20^\circ\text{C}, \text{ gdzie}$$

współczynnik naskórkowości y_s wyznaczono na podstawie [1], zaś współczynnik przyjmowania ciepła α obliczono za pomocą normy IEC [1].

Jednym z ważniejszych parametrów toru prądowego jest długotrwała obciążalność prądowa I_{cr} . Przy obciążeniu układu takim prądem, temperatura na powierzchni szynoprzewodu ($r=R$) powinna być równa maksymalnej temperaturze długotrwałe dopuszczalnej T_{MAX} .

$$(22) \quad T_{MAX} = T_s(r=R, I=I_{cr})$$

gdzie ze względów bezpieczeństwa termicznego przyjęto $T_{MAX}=80^\circ\text{C}$. Następnie prąd dopuszczalnie długotrwały obliczono iteracyjnie wykorzystując: (22), (21), (20) oraz pętlę While w programie Mathematica 10.3. W rezultacie dla analizowanego szynoprzewodu otrzymano $I_{cr}=963.6 \text{ A}$. Dla takiego obciążenia wyznaczono na podstawie (19) i (21) krzywą rozgrzewu powierzchni szynoprzewodu (dla $r=R$). Przebieg ten przedstawiono na rys. 3 za pomocą grubszej linii $\rho(T)$. Z powodu dużej wartości cieplnej przewodności miedzi (λ), krzywe w innych punktach układu (tzn. dla $r \neq R$) są bardzo zbliżone do pokazanej.

Innym ważnym parametrem dynamiki pola termicznego jest cieplna stała czasowa $\tau(r)$. Za jej pomocą aproksymuje się każdy punkt układu elementem inercyjnym pierwszego rzędu, co wyraża się zależnością

$$(23) \quad T(r,t) = T_s(r) \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau(r)}} \right] + T(r,t=0) e^{-\frac{t}{\tau(r)}}.$$

Z (23) wynika [15], [16]

$$(24) \quad \tau(r) = \int_0^{\infty} \frac{T(r,t) - T_s(r)}{T(r,t=0) - T_s(r)} dt.$$

Podstawienie (19)-(20) do (24) prowadzi do wyznaczenia poszukiwanej stałej czasowej

$$(25) \quad \tau(r) = \frac{R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(r)}{\gamma_n^2 - mR^2}}{\chi \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r)} \text{ dla } 0 \leq r \leq R \text{ gdzie}$$

$$(26) \quad A_n(r) = \frac{J_1(\gamma_n) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{R}\right)}{\gamma_n (\gamma_n^2 - mR^2) [J_0^2(\gamma_n) + J_1^2(\gamma_n)]}.$$

Obliczona na podstawie (21),(25),(26) stała czasowa wynosi $\tau(r) \approx 1291.4s$ przy zmiennej rezystywności. Duża wartość cieplnej przewodności szynoprzewodu ponownie sprawia, że stała czasowa praktycznie nie zależy od położenia r .

W celach porównawczych ponownie wyznaczono te same charakterystyki i parametry lecz przy stałej (uśrednionej) rezystywności w zakresie zmian temperatury od 20°C do 80°C (tzn. dla $\rho(T_{av}=50^\circ\text{C})=1.927 \cdot 10^{-8} \Omega m$). W takim przypadku należy wyzerować temperaturowy współczynnik oporu właściwego ($\varepsilon=0$). Z zależności zamieszczonych poniżej wzoru (2) wynika wówczas

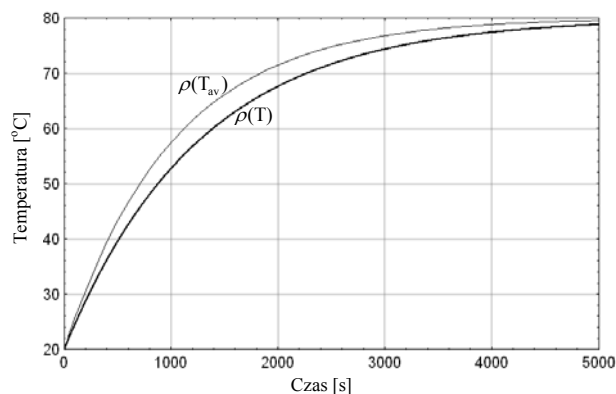
$$(27) \quad m=0 \text{ i } g_0 = \frac{\rho(T_{av}) I^2 (1+y_s)}{\pi^2 R^4}.$$

Powyższe podstawiono do (19), (20), (22), (24), (25), (26). Pozostałe parametry zestawu danych (21) nie uległy zmianie. Postępując analogicznie jak dla przypadku zmiennej rezystywności otrzymano inny prąd dopuszczalnie długotrwały $I^{(av)}=1013.1 \text{ A}$ oraz zmienioną stałą czasową $\tau_{av}(r)=1023.6s$. Na rys. 3 przedstawiono odpowiednią krzywą rozgrzewu za pomocą cieńszej linii $\rho(T_{av})$. Z kolei na rys. 4 zamieszczono badane przebiegi przy zmiennej $\rho(T)$ i uśrednionej rezystywności $\rho(T_{av})$ lecz przy jednakowym obciążeniu prądem $I_{cr}^{(av)}=1013.1 \text{ A}$.

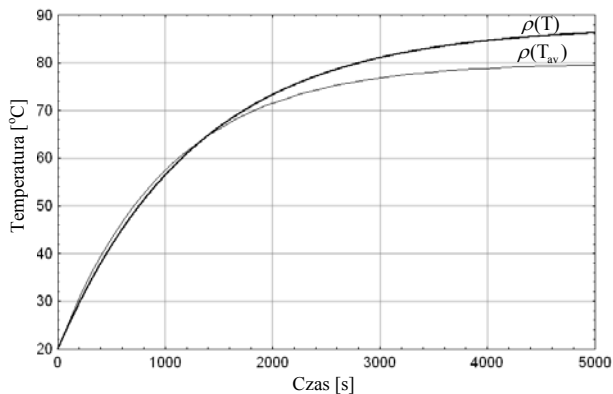
Dokonano również weryfikacji przedstawionej metody. W tym celu otrzymane wyniki porównano z obliczeniami wykonanymi metodą elementów skończonych [17]. Mianowicie brzegowo-początkowe zagadnienie (2)-(4) rozwiązano ponownie za pomocą modułu matematycznego modelowania skalarnych równań różniczkowych cząstkowych w programie Comsol Multiphysics [18]. Następnie obliczono względne różnice rozkładów według wzoru

$$(28) \quad 100\% \frac{T(r,t) - T_{FE}(r,t)}{T(r,t)}, \text{ gdzie}$$

$T(r,t)$ - rozkład temperatury uzyskany metodą Greena, $T_{FE}(r,t)$ - rozkład temperatury obliczony metodą elementów skończonych.



Rys. 3 Krzywe rozgrzewu w szynoprzewodzie dla $r=R$ przy zmiennej rezystywności $\rho(T)$ i obciążeniu prądem $I_{cr}=963.6 \text{ A}$ oraz przy uśrednionej rezystywności $\rho(T_{av}=50^\circ\text{C})$ i prądzie obciążenia $I_{cr}^{(av)}=1013.1 \text{ A}$

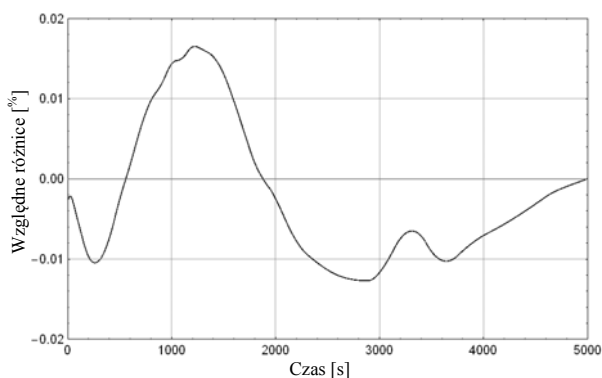


rys. 4 Krzywe rozgrzewu w szynoprzewodzie dla $r=\kappa$ przy zmiennej rezystywności $\rho(T)$ oraz uśrednionej $\rho(T_{av}=50^{\circ}C)$ przy obciążeniu układu prądem $I_{cr}^{(av)}=1013.1A$

Na rys. 5 zilustrowano zależność (28) przy uwzględnieniu zmiennej rezystywności szynoprzewodu. Wnioski wynikające z rys. 3,4,5 zamieszczono w następnym rozdziale.

Uwagi końcowe

- A) Dopuszczalny prąd długotrwały przy uwzględnieniu zmiennej rezystywności jest niemal o 5% mniejszy niż w przypadku jej uśrednienia. Z tego powodu przy jednakowym obciążeniu model ze zmiennym oporem właściwym nagrzewa się do większej temperatury niż układ uśredniony. W stanie ustalonym różnica wynosi ok. $6.8^{\circ}C$ (rys. 4 dla $t=5000s$).
- B) Przy jednakowej temperaturze dopuszczalnej (rys. 3) uwzględnienie (1) powoduje, że krzywa rozgrzewu $\rho(T)$ narasta wolniej niż przy założeniu stałej (uśrednionej) rezystywności (krzywa $\rho(T_{av})$). Powyższy wniosek potwierdza także nierówność $\tau(r) > \tau_{av}(r)$. Szacunkowe czasy trwania stanów nieustalonych w modelach ze zmiennym i stałym oporem właściwym odpowiednio wynoszą $4\tau(r) \approx 5165.6s$ oraz $4\tau_{av}(r) \approx 4094.4s$. Wartości zbliżone do podanych można również odczytać na rys. 3.



Rys. 5 Względne różnice krzywych rozgrzewu wyznaczonych metodą elementów skończonych i Greena dla $r=R$ przy zmiennej rezystywności szynoprzewodu

C) Względne różnice (28) krzywych rozgrzewu (obliczonych metodą elementów skończonych i Greena) są bardzo małe i nie przekraczają 0.017% (rys. 5). Zatem rozwiązanie przedstawione przez autorów należy uznać za poprawne.

OŚWIADCZENIE

Niniejszy artykuł przygotowano w ramach projektu S/WE/1/13 realizowanego w Katedrze Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii Politechniki Białostockiej.

Autorzy: prof. dr hab. inż. J. Gołębiowski¹, dr. inż. M. Zaręba², Politechnika Białostocka, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii, ul. Wiejska 45 D, 15-351 Białystok, e-mail: ¹ j.golebiowski@pb.edu.pl, ² m.zareba@pb.edu.pl

LITERATURA

- [1] Anders G. J., Rating of electric power cables: ampacity computations for transmission, distribution, and industrial applications, *McGraw-Hill Professional*, Nowy Jork (1997).
- [2] Baehr M. D., Stephan K., Heat and mass transfer, *Springer-Verlag*, Berlin, Heidelberg (2006).
- [3] Latif M. J., Heat conduction, *Springer-Verlag*, Berlin, Heidelberg (2009).
- [4] Hoffer O., Instationäre Temperaturverteilung in Einem Runddraht, *Archiv für Elektrotechnik*, 60 (1978), 319-325.
- [5] Jordan A., Benmouna M., Optimal linearization method, *Wydawnictwa Politechniki Białostockiej*, Białystok (1989).
- [6] Kački E., Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki, WNT, Warszawa (1992).
- [7] Gołębiowski J., Zaręba M., Plano-parallel models of the electrical systems with non-uniform heat exchange on a perimeter. Part II. Transient temperature field, *Przegląd Elektrotechniczny*, 91 (2015), nr. 10, 273-277.
- [8] Cole K. D., Haji-Sheikh A., Beck J. V., Litkouhi B., Heat conduction using Green's functions, *CRC Press* (2011).
- [9] Duffy D. G., Green's function with applications, *CRC Press* (2015).
- [10] Greenberg M. D., Applications of Green's function in science and engineering, *Dover Publications*, USA (2015).
- [11] Ashcroft N. W., Mermin N. D., Solid State Physics, *Holt-Saunders International Editions*, Japan (1981).
- [12] Faiz J., Ehya H., Takbash A. M., Shojaee S., Hamidian M., Ghorbani A., Recent progress in bus-ducts design, *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical Engineering* 35 (2016), 117-136.
- [13] Hering M., Termokinetyka dla elektryków, WNT, Warszawa (1980).
- [14] Grzymkowski R., Kapusta A., Kumoszek T., Słota D., *Mathematica 6*, *Wydawnictwa Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego*, Gliwice (2008).
- [15] Lipiński W., Analiza dynamiki pola elektromagnetycznego w środowiskach przewodzących, *Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej*, Szczecin (1976).
- [16] Brykalski A., Badanie dynamiki procesów elektromagnetycznych i cieplnych w urządzeniach elektrycznych numerycznymi metodami analizy pól. *Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej*, Szczecin (1987).
- [17] Brenner S., Scott R. L., The mathematical theory of finite element methods, *Springer*, Berlin (2008).
- [18] COMSOL Multiphysics. Documentation for COMSOL Release 4.3, (2013).