

## Nieobciążone estymatory parametrów rozkładu potęgowego

**Streszczenie.** W pracy sprawdzono właściwości estymatorów parametrów rozkładu potęgowego. Wychodząc z nierówności Rao-Cramera wyznaczono wariancję najefektywniejszego estymatora parametru kształtu. Zaproponowano nową postać nieobciążonego estymatora parametru skali.

**Abstract.** The paper examines the qualities of estimators of power distribution parameters. Starting from the Rao-Cramer inequality, the variance of the most efficient estimator of the shape parameter is determined. And a new form of the unbiased estimator of the scale parameter is proposed. (Unbiased estimators of power distribution parameters).

**Słowa kluczowe:** niezawodność, rozkład potęgowy, estymacja parametrów, estymator nieobciążony

**Keywords:** reliability, power distribution, parameter estimation, unbiased estimator

### Wstęp

W probabilistycznych modelach niezawodnościowych elementów i systemów, m.in., jest wykorzystywany rozkład potęgowy [1,2,3,4]

Funkcja gęstości rozkładu potęgowego wyraża się wzorem:

$$(1) \quad f(t) = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^{a-1}$$

gdzie:  $a$  – parametr kształtu,  $b$  – parametr skali.

Podstawową charakterystyką rozkładu trwałości elementu jest funkcja ryzyka (intensywność uszkodzeń):

$$(2) \quad \lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

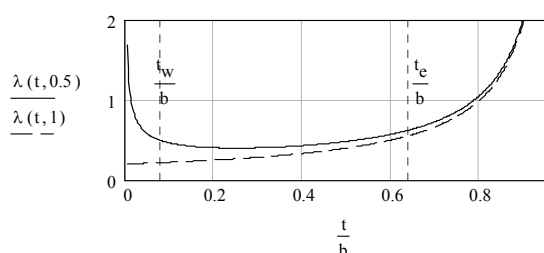
gdzie  $f(t)$ - określa wzór (1)

$$F(t) = \left(\frac{t}{b}\right)^a - \text{dystybuanta rozkładu potęgowego.}$$

Ze wzorów (1) i (2), uzyskuje się [1]:

$$(3) \quad \lambda(t) = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} \left[1 - \left(\frac{t}{b}\right)^a\right]^{-1}$$

Na rysunku 1 przedstawiono przebieg funkcji intensywności uszkodzeń (funkcji ryzyka) wyznaczony na podstawie wzoru (3).



Rys. 1. Przebieg funkcji intensywności uszkodzeń dla rozkładu potęgowego. Linia ciągła odpowiada parametrowi kształtu  $a=0,5$ ; linię przerywaną wykonano dla  $a=1,0$

Teoretyczny przebieg funkcji intensywności uszkodzeń rozkładu potęgowego dla parametru  $a=0,5$  wykazuje dużą zgodność z empirycznym rozkładem funkcji ryzyka. Na rysunku 1 można wyróżnić trzy okresy [4]. Odcinek czasowy  $[0; t_w]$  odpowiada okresowi wstępnej eksploatacji, w którym eliminuje się obiekty z dużymi wadami produkcyjnymi. Odcinek czasowy  $[t_w; t_e]$  odpowiada

okresowi właściwej (normalnej) eksploatacji. Ostatni przedział czasowy  $t > t_e$  to okres starzenia się obiektów. Z rozpatrzonego przykładu wynika zaleta rozkładu potęgowego, która polega na tym, że przy nieskomplikowanej postaci gęstości rozkładu (wzór (1)) możliwe jest dopasowanie do zróżnicowanych charakterystyk niezawodnościowych obiektu.

### Estymacja parametru kształtu

W celu oceny jakości wyznaczonych estymatorów, zostały wykonane symulacje komputerowe z wykorzystaniem generatora liczb losowych o rozkładzie potęgowym [5]:

$$(4) \quad t = b \cdot r^{\frac{1}{a}}$$

gdzie  $r \in (0;1)$  zmienna losowa o rozkładzie równomiernym,  $t$  – zmienna losowa o rozkładzie potęgowym.

Przyjmuje się, że próbka liczy  $N$  elementów - w dalszej części zostanie rozpatrzone  $N \in [5;20]$ . Obserwacje zostają uporządkowane w kolejności rosnącej:

$$(5) \quad t_{(1)} < t_{(2)} < \dots < t_{(N)}$$

Wykonując estymację metodą największej wiarygodności (MNW), wyznacza się logarytm funkcji wiarygodności:

$$(6) \quad \ln L(a, b) = n \ln a - n a \ln b + (a-1) \sum_{i=1}^N \ln t_{(i)}$$

Z warunku koniecznego istnienia ekstremum:

$$(7) \quad \frac{\partial [\ln L(a, b)]}{\partial a} = 0$$

wyznacza się postać estymatora parametru kształtu [1,2,3,6]:

$$(8) \quad \hat{a}_0 = \left[ \ln t_{(N)} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln t_{(i)} \right]^{-1}$$

Do oceny jakości estymatora będzie stosowane względne obciążenie estymatora  $ba$ :

$$(9) \quad ba = \frac{E(\hat{a}) - a}{a}$$

gdzie -  $E(\hat{a})$  wartość przeciętna oszacowania parametru  $a$  - wartość dokładna parametru kształtu (nastawy generatora).

Obliczenia wykonano dla następujących wartości parametru  $a$  oraz parametru  $b$ :

$$(10) \quad a=1/3 ; a=1/2 ; a=1 ; a=2 ; a=3 ; b=10$$

W ramach symulacji komputerowych wykonano  $K=100000$  powtórzeń, na podstawie których wyznaczono obciążenie estymatora  $[E(\hat{a})-a]$  oraz jego wariancję.

Estymator  $\hat{a}_0$  jest obciążony, ponieważ (przykładowo) dla  $N=5$  oraz  $a=1/3$  względne obciążenie wynosi  $ba_0=0,667$ .

Mając na uwadze duże wartości obciążenia estymatora uzyskanego MNW, w pracy [5], wykorzystując sieci neuronowe oraz metodę bootstrapową, wyznaczono współczynniki korygujące wzór (8). Uzyskano następującą postać estymatora parametru kształtu:

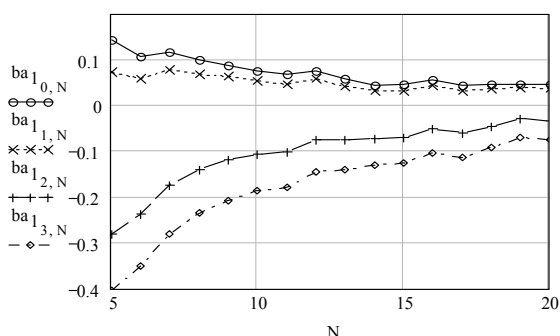
$$(11) \quad \hat{a}_1 = d_N \cdot \left[ \ln(c_{Nt(N)}) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln t(i) \right]^{-1}$$

gdzie współczynniki  $c_N$  oraz  $d_N$  określa tabela 1.

Tabela 1. Wartości współczynników korygujących estymatory parametrów rozkładu potęgowego [5]

N	5	6	7	8	9	10	11	12
$c_N$	1,235	1,900	1,541	1,125	1,109	1,096	1,092	1,081
$d_N$	0,796	0,820	0,862	0,874	0,889	0,897	0,907	0,926
N	13	14	15	16	17	18	19	20
$c_N$	1,072	1,064	1,063	1,058	1,058	1,051	1,041	1,044
$d_N$	0,921	0,919	0,928	0,943	0,941	0,948	0,951	0,957

Na podstawie wzorów (9) i (11) wyznaczono względne obciążenie estymatora  $\hat{a}_1$ , zaprezentowane na rysunku 2.



Rys.2. Wartości względnego obciążenia estymatora  $\hat{a}_1$ .

Kolejne krzywe  $ba_{1,k,N}$  na rysunku 2 odpowiadają następującym wartościom parametru kształtu  $a$ :  $k=0 - a=1/3$ ;  $k=1 - a=1/2$ ;  $k=2 - a=2$ ;  $k=3 - a=3$ .

Z rysunku 2 wynika, że estymator  $\hat{a}_1$  jest obciążony – względne obciążenie estymatora osiąga wartość kilkudziesięciu procent. W związku z powyższym nie będzie wyznaczana wartość wariancji estymatora. Mianowicie, efektywność estymatora, mierzona jego wariancją, wynosi dla estymatorów nieobciążonych [7].

Obszerną analizę dotyczącą estymacji parametrów rozkładu potęgowego można znaleźć w pracy [2]. M.in. zamieszczono tam postać nieobciążonego estymatora parametru kształtu:

$$(12) \quad \hat{a}_2 = \left(1 - \frac{2}{N}\right) \cdot \left[ \ln(t_{(N)}) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln t(i) \right]^{-1}$$

Dla rozpatrywanych w pracy wartości parametrów (wzór (10)) uzyskano względne obciążenie  $ba_2 \in (0,00000184 ; 0,00114)$ . Ze względu na pomijalnie małe wartości  $ba_2$ ,

zrezygnowano z prezentacji rysunku przedstawiającego względne obciążenie jako funkcję liczby obserwacji  $N$ . Wychodząc z nierówności Rao- Cramera [7]:

$$(13) \quad V(\hat{a}) \geq V_{min} = \left[ N \int_0^b \left[ \frac{\partial \ln f(t,a)}{\partial a} \right]^2 f(t,a) dt \right]^{-1}$$

uzyskuje się następującą wartość wariancji estymatora najefektywniejszego:

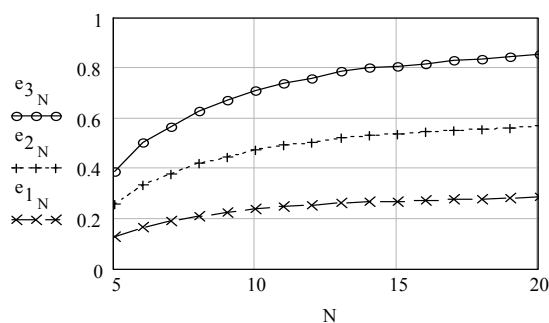
$$(14) \quad V_{min} = \frac{a^3}{3N}$$

Efektywność  $e$  estymatora  $\hat{a}_2$  określa wzór [7]:

$$(15) \quad e = \frac{V_{min}}{V(a_2)}$$

gdzie  $V_{min}$  określa wzór (14);  $V(a_2)$  - wariancja estymatora  $\hat{a}_2$ .

Na rysunku 3 przedstawiono wartości efektywności estymatora  $\hat{a}_2$  jako funkcję liczby obserwacji  $N$ . Zastosowano następujące oznaczenia: linia przerywana z iksami  $e_{1,N}$  odpowiada  $a=1$ ; linia kropkowana z plusami  $e_{2,N}$  wyznaczona dla  $a=2$  oraz linia ciągła z kółkami  $e_{3,N}$  wyznaczona dla  $a=3$ .



Rys.3. Efektywność estymatora  $\hat{a}_2$ .

Z rysunku 3 wynika wzrost wartości efektywności estymatora  $\hat{a}_2$  dla rosnących wartości  $N$  a także dla zwiększających się wartości parametru kształtu  $a$ .

### Estymacja parametru skali

W przypadku parametru skali zawodzi MNW. Mianowicie, pochodna cząstkowa logarytmu funkcji wiarygodności (wzór (6)) względem zmiennej  $b$  wyraża się wzorem:

$$(16) \quad \frac{\partial [\ln L(a,b)]}{\partial b} = -\frac{na}{b} = 0$$

który nie prowadzi do wyniku. Najprostszym estymatorem parametru  $b$  może być największa zaobserwowana wartość zmiennej  $t$  [1,2,3]:

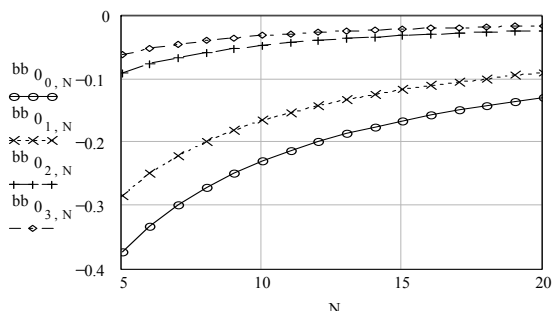
$$(17) \quad \hat{b}_0 = t_{(N)}$$

Na rysunku 4 przedstawiono wartości względnego obciążenia estymatora  $\hat{b}_0$ . Z rysunku wynika ujemny znak obciążenia, co oznacza, że ze wzoru (17) uzyskuje się zaniżone (niedoszacowane) wartości parametru skali  $b$ . Duża wartość względnego obciążenia, rzędu kilkadziesiąt procent, dyskwalifikuje estymator  $\hat{b}_0$ .

W pracy [5] dokonano również korekty estymatora parametru skali:

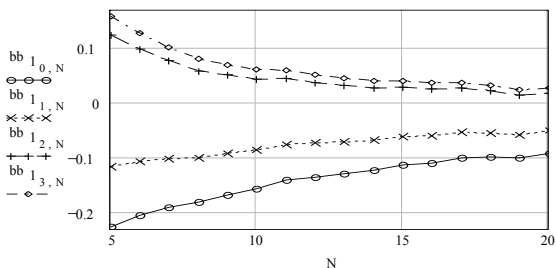
$$(18) \quad \hat{b}_1 = c_N t(N)$$

gdzie -  $c_N$  określa tabela 1.



Rys.4. Wartości względnego obciążenia estymatora  $\hat{b}_0$ .

Na rysunku 5 przedstawiono wartości względnego obciążenia estymatora  $\hat{b}_1$ . Zastosowano analogiczne oznaczenia jak na rysunku 2, co oznacza, że kolejne krzywe na rysunku 5 rozpatrywane od dołu, odpowiadają następującym wartościom parametru kształtu  $a$ :  $a=1/3$ ;  $a=1/2$ ;  $a=2$ ;  $a=3$ . Z rysunku 5 wynika, że pomimo korekty wykonanej w pracy [5], estymator parametru  $b$  jest obciążony – zbyt duże wartości względnego obciążenia.

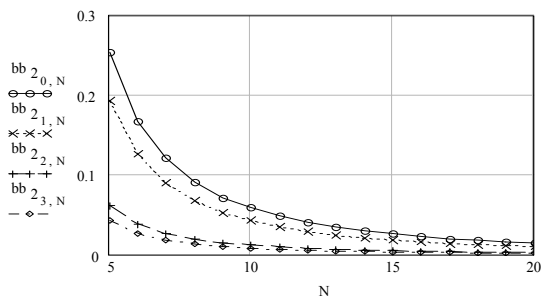


Rys.5. Wartości względnego obciążenia estymatora  $\hat{b}_1$ .

W pracy [2] znajduje się następujący wzór;

$$(19) \quad \hat{b}_2 = t(N) \left[ 1 + \frac{1}{\hat{a}_2(N-1)} \right],$$

który opisuje nieobciążony estymator parametru skali  $b$ . Na rysunku 6 zamieszczono wartości względnego obciążenia estymatora  $\hat{b}_2$ .



Rys.6. Wartości względnego obciążenia estymatora  $\hat{b}_2$  (oznaczenia jak na rysunku 5).

Pomimo, że wzór (18) odnosi się do nieobciążonego estymatora, to rysunek 6 nie potwierdza tej właściwości. Występuje duża wartość obciążenia np. dla parametru kształtu  $a=1/3$  (linia ciągła z kółkami) oraz  $a=1/2$  (linia kropkowana z icsam) dla  $N=5$  względne obciążenie wynosi odpowiednio: 0,253 oraz 0,193

Porównując rysunek 4 i rysunek 6, stwierdza się przeciwne znaki obciążenia. Sugeruje to utworzenie estymatora jako średniej ważonej estymatorów  $\hat{b}_0$  i  $\hat{b}_2$ :

$$(20) \quad \hat{b}_3 = 0,33b_0 + 0,67b_2$$

gdzie -  $\hat{b}_0$  i  $\hat{b}_2$  opisują odpowiednio wzory (17) i (19).

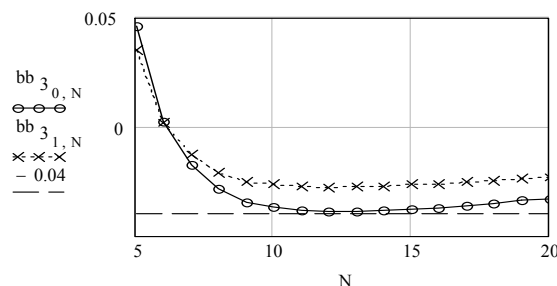
Ze wzorów (17),(19) i (20), uzyskuje się:

$$(21) \quad \hat{b}_3 = t(N) \left[ 1 + \frac{0,67}{\hat{a}_2(N-1)} \right]$$

Na rysunku 7 przedstawiono wartości względnego obciążenia estymatora  $\hat{b}_3$  jako funkcję liczby obserwacji  $N$ .

Współczynniki wagowe występujące we wzorze (20) dobrano tak, aby dla  $N \in [6; 20]$  wartość względnego obciążenia estymatora  $\hat{b}_3$  nie przekraczała 4% (rysunek 7). Jedynie dla  $N=5$  oraz  $a=1/3$   $bb_3 = 4,6\%$ .

Jakkolwiek estymatora  $\hat{b}_3$ , w porównaniu z wcześniej rozpatrzonymi estymatorami parametru skali, wykazuje znacznie mniejszą wartość względnego obciążenia, to



Rys.7. Wartości względnego obciążenia estymatora  $\hat{b}_3$ .

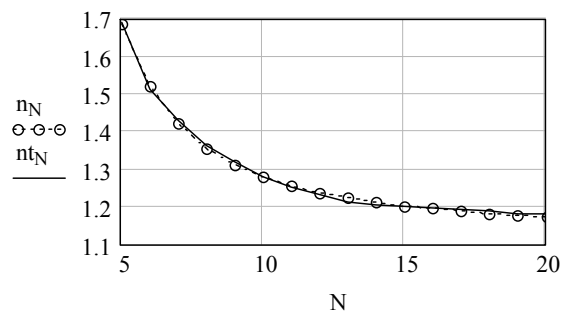
jednak trudno uznać go za estymator nieobciążony. Dlatego autor publikacji przeprowadził badania symulacyjne mające na celu korektę wzoru (19) w celu minimalizacji wartości obciążenia. Efektem tego eksperymentu numerycznego jest estymator o następującej postaci:

$$(22) \quad \hat{b}_4 = t(N) \left[ 1 + \frac{1}{\hat{a}_2(N+n_N)} \right]$$

gdzie współczynnik  $n_N$  opisuje tabela 2.

Tabela 2. Wartości współczynnika  $n_N$  korygującego estymator parametru skali (wzór (22))

N	5	6	7	8	9	10	11	12
$n_N$	1,689	1,511	1,430	1,362	1,320	1,281	1,253	1,232
N	13	14	15	16	17	18	19	20
$n_N$	1,214	1,206	1,200	1,196	1,191	1,187	1,182	1,182



Rys.8. Porównanie wartości współczynnika  $n_N$  (tabela 2) oraz wartości  $nt_N$  (wzór (23)).

Na podstawie wyników zawartych w tabeli 2 wyznaczono postać wzoru aproksymującego wartości współczynnika  $n_N$ :

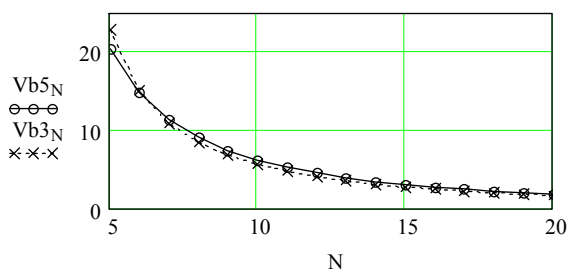
$$(23) \quad nt_N = \frac{7,435}{(N - 0,6)^{1,752}} + 1,133$$

Ostatecznie, można zaproponować następującą postać estymatora parametru skali:

$$(24) \quad \hat{b}_5 = t_{(N)} \left[ 1 + \frac{1}{\hat{a}_2(N + nt_N)} \right]$$

gdzie -  $\hat{a}_2$  jest opisane wzorem (12);  $nt_N$  - wyraża się zależnością (23).

Dla wartości parametrów opisanych zależnością (10) wyznaczono względne obciążenie estymatora wyrażającego się wzorem (24). W zależności (10) uwzględniono tylko jedną wartość parametru skali:  $b=10$ . Wynika to z faktu, że względne obciążenie estymatora parametru skali nie zależy od wartości parametru  $b$ .



Rys.9. Wariacja estymatora  $\hat{b}_3$  ( $Vb_3$ ) oraz estymatora  $\hat{b}_5$  ( $Vb_5$ ).

Podsumowując obliczenia stwierdza się, że względne obciążenie  $bb_5 \in (-0,00071 ; 0,00125)$ . Oznacza to, że estymator opisany wzorem (21) jest nieobciążonym estymatorem parametru skali.

Dla estymatora  $\hat{b}_3$  oraz estymatora  $\hat{b}_5$  wyznaczono wariację  $Vb_3$  oraz  $Vb_5$  przedstawioną na rysunku 9. Z rysunku 9 wynika zbliżona efektywność obydwu estymatorów.

### Podsumowanie

Rozkład potęgowy posiada następujące zalety [5]:  
 - pomimo prostej postaci gęstości rozkładu (wzór (1)) możliwe jest dopasowanie do zróżnicowanych charakterystyk niezawodnościowych obiektu;

- wartości zmiennej losowej zawarte są w skończonym przedziale;

- nieskomplikowany zapis matematyczny funkcji charakteryzujących rozkład.

W pracy rozpatrzono właściwości estymatorów parametrów rozkładu potęgowego. Ocenę właściwości estymatorów wykonano w ramach symulacji komputerowych z wykorzystaniem generatora liczb losowych (wzór (4)).

Stwierdzono, że spośród trzech rozpatrzonych estymatorów parametru kształtu, estymator  $\hat{a}_2$  (wzór (12)) jest nieobciążony.

Stosując nierówność Rao-Cramera wyznaczono minimalną wartość wariancji estymatora parametru kształtu (wzór (14)), co pozwoliło ocenić efektywność estymatora  $\hat{a}_2$  (rysunek 3).

W przypadku estymatora parametru skali zbadano właściwości trzech estymatorów opisanych w literaturze (wzory: (17), (18), (19)). Na podstawie tej analizy zaproponowano estymator wyrażający się wzorem (21).

W wyniku eksperymentu numerycznego wyznaczono nieobciążony estymator parametru skali – zależność (24).

Z rysunku 9 wynika zbliżona efektywność proponowanych estymatorów parametru skali (wzory (21) i (24)). Oznacza to, że w miejsce wzoru (24) można posłużyć się wzorem (21), licząc się z możliwością wystąpienia niewielkiego obciążenia estymatora.

**Autor:** prof. dr hab. inż. Jan Purczyński, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny, Wydział Elektryczny, ul. Sikorskiego 37, 70-313 Szczecin, E-mail: janpurczynski@zut.edu.pl

### LITERATURA

- [1] Ciechanowicz K., Uogólniony rozkład gamma i rozkład potęgowy jako rozkład trwałości elementów, *Archiwum Elektrotechniki*, tom XX1(1972), z.3, 489-5121
- [2] Firkowicz S., Statystyczne badanie wyrobów, WNT, Warszawa, (1970)
- [3] Lesiński S., Niezawodność łączników energoelektrycznych, Badania i ocena, WNT, Warszawa, (1983)
- [4] Paska J., Niezawodność systemów elektroenergetycznych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, (2005)
- [5] Lesiński S., Estymacja parametrów rozkładu potęgowego, *Przegląd Elektrotechniczny*, 74 (1998), nr.9, 245-247.
- [6] White E.P., Enquist B.J., Green J.L., On estimating the exponent of power-law frequency distributions, *Ecological Society of America, Report, Ecology*, 89 (2008), Issue 4, 905-912
- [7] Fisz M., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, PWN, Warszawa, (1969)