

Zniekształcenia modulacyjne filtrów cyfrowych – modeli linii długiej

Streszczenie. W artykule na operatorowym równaniu różniczkowym jednorodnej linii długiej dokonano przekształcenia digitalizującego otrzymując filtr cyfrowy – model linii. Filtry cyfrowe modelu nie są filtrami typu wymiernego. Są to mianowicie filtry pierwiastkowe i wykładniczo-pierwiastkowe. Artykuł idzie jednak dalej i zajmuje się problemem zniekształcenia filtrów – modeli linii długiej – zachodzącego w procesie modulacji sygnałów nośnych.

Abstract. In the article differential operator equation of the homogenous transmission line has been digitally converted to give digital filter – transmission line model. These models aren't rational type of filters, in fact they are root and exponential-root filters. This article goes further and deals with the problem of filter's distortion – transmission line models – which takes place during the modulation of carrier signals. (**Modulation distortion of digital filters – transmission line models**)

Słowa kluczowe: linia długa, operatory rzędu ułamkowego, filtry funkcyjne, modulacja

Keywords: transmission line, fractional order operators, function filters, modulation

Wprowadzenie – filtry funkcyjne – pojęcia podstawowe

Cyfrowy filtr przyczynowy A , utożsamiany z rzeczywisto–liczbowym ciągiem $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ albo z funkcją:

$$(1) \quad A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \quad z \in \mathbf{C},$$

działa na sygnał x utożsamiany z ciągiem $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ według prawa splotowego:

$$(2) \quad (Ax)_n = \sum_{m=0}^{\infty} A_m x_{n-m}.$$

Jeżeli $f(z)$ jest funkcją zmiennej zespolonej, to przyczynowy filtr $f(A)$ nazywany **filtrem funkcyjnym** utożsamiany będzie z ciągiem [5]:

$$(3) \quad \left\{ (f(A))_n \right\}_{n=0}^{\infty},$$

takim, że:

$$(4) \quad (f(A))(z) = f(A(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} (f(A))_n z^n,$$

oraz:

$$(5) \quad (f(A))_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(A(z))}{dz^n} \right|_{z=0}.$$

Filtr funkcyjny działa na sygnał x również według prawa splotowego:

$$(6) \quad (f(A)x)_n = \sum_{m=0}^{\infty} (f(A))_m x_{n-m}.$$

Ze wzorów (4) i (1) wynika też wyrażenie na warunek początkowy ciągu wagowego (3) filtru funkcyjnego:

$$(7) \quad (f(A))_0 = f(A_0).$$

Formuła (5) w zastosowaniu do wyznaczania współczynników wagowych filtrów funkcyjnych nie jest wygodna. Ma ona zastosowanie tylko do stosunkowo prostych filtrów jakimi są na przykład filtry różniczkujące rzędu $-1 \leq p \leq 1$, tj. $(a-z)^p$. Wówczas zastosowanie formuły (5) daje użyteczny wynik [2][3]:

$$(8) \quad \left((a-z)^p \right)_n = a^p a^{-n} \prod_{m=1}^n \frac{m-1-p}{m}.$$

Filtr taki nazywa się też całko–pochodnym filtrem rzędu p z zero–biegunem a .

Dla filtrów funkcyjnych bardziej złożonych lepsze rezultaty daje formuła uwikłana [5]:

$$(9) \quad (f(A))_n = \sum_{m=1}^n \frac{m}{n} A_m \left(\frac{df}{dA} \right)_{n-m},$$

kóra dla pewnych funkcji $f(A)$ może przejść w formułę rekurencyjną. Przykładowo ma to miejsce dla funkcji wykładniczej e^A , która jest idempotentem względem operacji różniczkowania:

$$(10) \quad (e^A)_n = \sum_{m=1}^n \frac{m}{n} A_m (e^A)_{n-m}.$$

Warunek początkowy dla ciągu $\{e^A\}_n$ otrzymuje się ze wzoru (7):

$$(e^A)_0 = e^{A_0}.$$

Wskaźniki n : $n = 1, 2, 3, \dots$

Model cyfrowy linii długiej

Równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych linii długiej mają postać:

$$\frac{\partial u}{\partial \dot{x}} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t},$$

$$\frac{\partial i}{\partial \dot{x}} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t}$$

gdzie $u(\dot{x}, t)$, $i(\dot{x}, t)$ – przestrzenno–czasowe rozkłady napięcia i prądu wzdłuż linii. Dokonując modelowania cyfrowego z odstępem pobierania próbek czasowych θ otrzymuje się operatorowy układ równań różniczkowych:

$$\frac{du}{d\dot{x}} = \frac{L}{\theta}(a-z)i,$$

$$\frac{di}{d\dot{x}} = \frac{C}{\theta}(b-z)u$$

który po dalszych przekształceniach przyjmuje ostateczną postać:

$$(11) \quad \frac{du}{dx} = \rho Ai,$$

$$\frac{di}{dx} = \rho^{-1} Bu$$

gdzie:

$A(z) = a - z$, $B(z) = b - z$ – elementarne filtry cyfrowe nierekursywne rzędu 1-go;

$a = 1 + R/R_L$, $b = 1 + G/G_C$ – zera (rzeczywiste) filtrów elementarnych;

$\rho = \sqrt{R_L/G_C}$ – opór falowy linii;

$x = \sqrt{R_L G_C} \dot{x}$ – względna odległość mierzona od końca linii;

$R_L = L/\theta$, $G_C = C/\theta$ – rezystancja indukcyjna, konduktancja pojemnościowa linii w Ω i Ω^{-1} na jednostkę długości.

W rozwiązaniu równań różniczkowych linii (11) biorą udział dwa operatory:

$$(12) \quad \sqrt{AB} = (a-z)^{1/2} (b-z)^{1/2},$$

$$(13) \quad \rho \sqrt{\frac{A}{B}} = \rho (a-z)^{1/2} (b-z)^{-1/2}.$$

Są one sekwencjami dwóch filtrów cyfrowych całkowniczych rzędu $1/2$ i $-1/2$ z zero–biegunami rzeczywistymi a , b leżącymi poza domkniętym kołem jednostkowym. Pierwszy z nich określony wzorem (12) nazywa się filtrem **propagacji**, drugi (13) to filtr **impedancji falowej**. Ich współczynniki wagowe można wyznaczyć ze wzorów splotowych [2][3]:

$$(14) \quad \left(\sqrt{AB}\right)_n = \sqrt{ab} a^{-n} \alpha_n,$$

$$(15) \quad \left(\sqrt{\frac{A}{B}}\right)_n = \sqrt{\frac{a}{b}} a^{-n} \beta_n,$$

gdzie:

$$(16) \quad \alpha_n = \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{b}\right)^m D_{n-m} D_m,$$

$$(17) \quad \beta_n = \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{b}\right)^m D_{n-m} I_m.$$

Ciągi $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ są współczynnikami wagowymi filtrów:

– różniczkującego rzędu $1/2$:

$$D(z) = (1-z)^{1/2},$$

– całkującego z rzędem $1/2$:

$$I(z) = (1-z)^{-1/2}.$$

Wagi te określone są wzorem (8), który w tym przypadku przyjmuje postać:

$$D_n = -\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{6} \frac{5}{8} \dots \frac{2n-3}{2n}, \quad D_0 = 1,$$

oraz:

$$I_n = \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{7}{8} \dots \frac{2n-1}{2n}, \quad I_0 = 1.$$

W rozwiązaniu równań operatorowych linii (11) występuje też operator funkcyjny złożony:

$$e^{\sqrt{AB}x}$$

– tzw. operator – filtr **transmisji falowej**. Jego współczynniki wagowe można wyznaczać rekurencyjnie za pomocą wzoru (10):

$$(18) \quad \left(e^{\sqrt{AB}x}\right)_n = x \sum_{m=1}^n \frac{m}{n} \left(\sqrt{AB}\right)_m \left(e^{\sqrt{AB}x}\right)_{n-m},$$

$$\left(e^{\sqrt{AB}x}\right)_0 = e^{abx}$$

Periodyzacja stabilnych filtrów przyczynowych

Każdy stabilny i przyczynowy filtr cyfrowy scharakteryzowany ciągiem wagowym $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ może być speriodyzowany, tzn. zamieniony w N –okresowy zgodnie z formułą [4]:

$$(19) \quad \tilde{\gamma}_n = \gamma_n + \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_{n+pN} \quad \text{dla } n \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Filtr periodyczny identyfikowany jest za pomocą ciągu N –okresowego $\{\tilde{\gamma}_n\}$ i działa na N –okresowy sygnał wejściowy $\{x_n\}$ formułą splotu cyklicznego:

$$(20) \quad \left(\tilde{\gamma}x\right)_n = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{\gamma}_{n \ominus m} x_m \equiv \{\tilde{\gamma}_n\} \otimes \{x_n\},$$

gdzie znak \ominus oznacza działanie odejmowania modulo N .

Otrzymane w poprzednim punkcie filtry \sqrt{AB} , $\sqrt{A/B}$ i $e^{\sqrt{AB}x}$ są stabilne, bo ich ciągi wagowe należą do

przestrzeni \mathbf{L}^1 . Są również przyczynowe i dlatego mogą być speriodyzowane za pomocą formuły (19). Stabilność tych filtrów jest konsekwencją tego, że zera filtrów elementarnych A , B leżą poza domkniętym kołem jednostkowym.

Zniekształcenia modulacyjne filtrów cyfrowych

Czasowo–dyskretny N –periodyczny sygnał zmodulowany opisany jest ciągiem:

$$x_n(\tau): n \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \tau \in \mathbf{R}.$$

Ciąg ten jest okresowy podług czasowo–dyskretnego wskaźnika n , rzeczywisty parametr τ zwany czasem unoszenia powoduje powolną ewolucję sygnału – modulację. W istocie sygnał analogowy zmodulowany scharakteryzowany jest funkcją czasową dwóch zmiennych $x(t, \tau)$ okresową podług t o okresie T . Wprowadzony wcześniej ciąg $\{x_n(\tau)\}$ może powstawać poprzez próbkowanie sygnału analogowego podług t z odstępem pobierania próbek θ .

Można wykazać że modulacja powoduje zniekształcenie operatora przejścia układu $H(s)$, $s = d/dt$ według reguły [8]:

$$(21) \quad H(s) \rightarrow H(s) \left(1 + \frac{d \ln H}{ds} \frac{d}{d\tau} \right),$$

gdzie $H(s)$ jest analogową transmitancją układu liniowego, czasowo–niezmienniczego, a więc działającego na sygnał wejściowy względem operacji splotu. Gdy sygnał ten jest okresowy podług zmiennej t jest to splot cykliczny.

Jeżeli $H^D(z)$ jest modelem cyfrowym układu analogowego $H(s)$ otrzymywanym za pomocą funkcji digitalizującej $s = D(z)$, tzn. że:

$$(22) \quad H^D(z) = H(D(z)),$$

wtedy formuła zniekształcenia modulacyjnego filtru cyfrowego przyjmie postać:

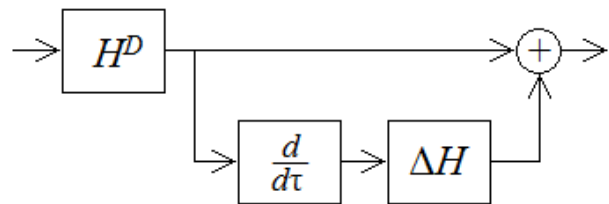
$$(23) \quad H^D(z) \rightarrow H^D(z) \left(1 + \left(\frac{dD}{dz} \right)^{-1} \frac{d \ln H^D}{dz} \frac{d}{d\tau} \right).$$

W szczególnym przypadku gdy funkcją digitalizującą jest $D(z) = \frac{1}{\theta}(1-z)$ reguła (23) przyjmie następującą postać:

$$(24) \quad H^D(z) \rightarrow H^D(z) \left(1 - \theta \frac{d \ln H^D}{dz} \frac{d}{d\tau} \right) = H^D \left(1 + \Delta H \frac{d}{d\tau} \right),$$

$$\Delta H = -\theta \frac{d \ln H^D}{dz}.$$

Operatory H^D , ΔH we wzorze (24) trzeba traktować jak speriodyzowane filtry cyfrowe, z których ten pierwszy jest filtrem oryginalnym, drugi jako jego ujemna logarytmiczna pochodna jest deformacją modulacyjną. Filtr deformacji modulacyjnej zawiera też operator różniczkowania podług czasu unoszenia. Filtry H^D i ΔH działają na sygnał wejściowy według prawa splotu cyklicznego wykonywanego po wskaźniku dyskretnym $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Wszystko to ilustruje schemat blokowy pokazany na rys. 1.



Rys. 1. Schemat blokowy filtra cyfrowego z widocznym multiplikatywnym zniekształceniem modulacyjnym

Widoczny na rys. 1 jest kaskadowo dołączony filtr deformacji modulacyjnej w postaci logarytmiczno–pochodnego filtru ΔH i bloku różniczkowania podług czasu unoszenia.

Zniekształcenia modulacyjne filtrów cyfrowych – modeli linii długiej

W punkcie tym zostaną określone operatory cyfrowych logarytmiczno–pochodnych filtrów deformacyjnych dla filtru impedancji falowej $\rho \sqrt{A/B}$ oraz złożonego pierwiastkowo–wykładniczego filtru transmisji falowej $e^{\sqrt{AB}x}$.

Operator deformacyjny ΔH występujący we wzorze (24) i widoczny też w schemacie blokowym na rys. 1 dla operatora impedancji falowej przyjmuje postać:

$$(25) \quad -\theta \frac{d \ln \rho \sqrt{A/B}}{dz} = -\frac{\theta}{2} \left(\frac{dA}{dz} \frac{dB}{dz} \right) = \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{a-z} - \frac{1}{b-z} \right) = \frac{\theta}{2} \frac{b-a}{(a-z)(b-z)}.$$

Jest on wymiernym rekursywnym filtrem cyfrowym rzędu 2–go z rzeczywistymi biegunami a , b leżącymi poza domkniętym kołem jednostkowym co zapewnia jego stabilność.

Natomiast analogiczny deformacyjny operator dla filtru transmisji falowej określony jest wzorem:

$$(26) \quad -\frac{d \ln e^{\sqrt{AB}x}}{dz} = -\theta_x \frac{d \sqrt{AB}}{dz} = -\theta_x \frac{\frac{dA}{dz} B + A \frac{dB}{dz}}{2\sqrt{AB}} = \frac{\theta_x}{2} \left(\sqrt{\frac{A}{B}} + \sqrt{\frac{B}{A}} \right).$$

Nie jest on już wymierny, a okazuje się sumą dwóch wzajemnie odwrotnych filtrów pierwiastkowych:

$$(27) \quad \Delta H = \frac{\theta x}{2} \left[\frac{(a-z)^{1/2} (b-z)^{-1/2} +}{+(a-z)^{-1/2} (b-z)^{1/2}} \right]$$

Jego współczynniki wagowe można wyznaczyć za pomocą formuł spłotowych (15) i (17). Pierwiastkowy filtr $\sqrt{A/B}$ występujący w wyrażeniu (26) podobny jest do filtru cyfrowego impedancji falowej i wynosi dokładnie Z_f/ρ .

Wnioski

Linie długą charakteryzują dwa operatory: impedancji falowej $Z_f = \sqrt{Z/Y}$ i transmisji falowej $e^{x\sqrt{ZY}}$. W sytuacji gdy przez linię przenoszone są sygnały zmodulowane ulegają one tzw. deformacji modulacyjnej. Oprócz filtru cyfrowego, który modeluje dany operator linii, pojawia się logarytmiczno-pochodny filtr deformacji modulacyjnej. Oryginalny filtr impedancji falowej jest opisany całkopochodnym operatorem rzędu $2 \times 1/2$ z zerobiegunem rzeczywistym, a odpowiadający mu deformacyjny filtr logarytmiczno-pochodny jest już zwykłym filtrem rekursywnym 2-go rzędu. Natomiast filtr transmisji falowej jest filtrem złożonym. Jest to filtr funkcyjny pierwiastkowo-wykładniczy i przez to jego filtr logarytmiczno-pochodny nie jest już opisany operatorem wymiernym ale złożony jest z pierwiastkowego operatora impedancji falowej i jego odwrotności.

Autorzy: dr inż. Zuzanna Siwczyńska, Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, E-mail: zsiw@pk.edu.pl.

LITERATURA

- [1] Siwczyńska Z.: Cyfrowe filtry hiperboliczne i eliptyczne w zastosowaniach do układów o parametrach rozłożonych, *Przegląd Elektrotechniczny*, 92 (2016), nr 9, 238-242
- [2] Siwczyńska Z.: Pierwiastkowe operatory immitancji – realizacja za pomocą filtrów cyfrowych, *Przegląd Elektrotechniczny*, 91 (2015), nr 12, 265-266
- [3] Siwczyńska Z.: Modele nieskończonych obwodów elektrycznych – operatory pierwiastkowe, *Przegląd Elektrotechniczny*, 91 (2015), nr 12, 262-264
- [4] Siwczyńska Z.: Przyczynki do teorii mocy linii długiej w dziedzinie czasu dyskretnego, *Przegląd Elektrotechniczny*, 91 (2015), nr 3, 149-151
- [5] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: The digital function filters – algorithms and applications, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Science*, 61 (2013), n. 2, 371-377
- [6] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Zastosowanie cyfrowych filtrów hiperbolicznych rzędu ułamkowego do analizy procesów falowych, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr 5a, 218-222
- [7] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Zastosowanie cyfrowych filtrów rzędu ułamkowego typu wykładniczego do analizy układów o parametrach rozłożonych, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr 2, 184-190
- [8] Siwczyński M., Hawron K.: Rozkłady G, B operatorów dwójników elektrycznych i ich zaburzenia modulacyjne, *Przegląd Elektrotechniczny*, 91 (2015), nr 10, 257-261
- [9] Siwczyński M., Hawron K.: Rozkłady G, B operatorów zaburzonych modulacyjnie – realizacja za pomocą filtrów cyfrowych, *Przegląd Elektrotechniczny*, 92 (2016), nr 5, 212-215
- [10] Atici F. M., Eloe P. W.: A transform method in discrete fractional calculus, *International Journal of Difference Equations (IJDE)*, 2 (2007), n. 2, 165-176
- [11] Li Y., Sheng H., Chen Y. Q.: Analytical impulse response of a fractional second order filter and its impulse response invariant discretization, *Signal Processing*, 91 (2011), n. 3, 498-507
- [12] Tseng C. C.: Design of FIR and IIR fractional order Simpson digital integrators, *Signal Processing*, 87 (2007), n. 5, 1045-1057
- [13] Chen Y. Q., Vinagre B. M.: A new IIR-type digital fractional order differentiator, *Signal Processing*, 83 (2003), n. 11, 2359-2365
- [14] Stakhiv P., Kozak Y., Hoholyuk O.: Discrete mathematical macromodel of electric transmission line, *Przegląd Elektrotechniczny*, 89 (2013), nr 4, 272-274