

O pewnych aspektach stosowania pochodnych ułamkowych w elektrodynamice

Streszczenie. W artykule zwrócono uwagę na pewne problemy związane z zastosowaniem pochodnych ułamkowych w opisie zjawisk elektromagnetycznych oraz często popełniane przy tym błędy.

Abstract. The article focuses on some of the problems associated with the use of fractional derivatives in the description of electromagnetic phenomena, and common errors. (On certain aspects of application of fractional derivatives in the electromagnetism).

Słowa kluczowe: pochodna ułamkowa, teoria obwodów elektrycznych, teoria pola elektromagnetycznego, analiza wektorowa
Keywords: fractional derivative, electric circuit theory, electromagnetic field theory, vector analysis

Wstęp

W ostatnich latach ukazuje się wiele publikacji dotyczących opisu zjawisk elektromagnetycznych przy zastosowaniu pochodnych ułamkowego rzędu. Niestety wiele z tych prac zawiera różnego rodzaju błędy, inne z kolei budzą wątpliwości np. z powodu braku jasnej interpretacji fizycznej zapisywanych formuł i występujących w nich wielkości. Na niektóre z tych mankamentów zwrócono uwagę w [1, 2] (por. też [3, 4]). Główne zastrzeżenia dotyczą niespektowania zasady jednorodności wymiarowej fizycznych zależności oraz ich niezgodności z ogólnie znanymi i dobrze potwierdzonymi empirycznie prawami (jak np. prawo Faradaya, czy Ampère'a).

Celem niniejszej pracy jest zwrócenie uwagi na kilka innych problemów i błędów, jakie się pojawiają przy próbach opisywania zjawisk elektromagnetycznych za pomocą pochodnych ułamkowych.

Ogólne informacje o pochodnych ułamkowych

Operator pochodnej ułamkowego rzędu jest uogólnieniem pojęć operatora n -krotnego różniczkowania i n -krotnego całkowania na przypadek, gdy n nie jest liczbą naturalną [5]. Najczęściej stosowane oznaczenia operatora pochodnej ułamkowej dla funkcji zmiennej x to D_x^α lub d^α/dx^α , gdzie α może być dowolną liczbą rzeczywistą lub zespoloną. W dalszej części pracy ograniczamy się do przypadku, gdy rząd pochodnej jest liczbą rzeczywistą (podobnie jak wszystkie różniczkowane funkcje i ich argumenty).

Podstawowe postulaty jakie zwykle stawia się definicji operatora pochodnej ułamkowej to [5]:

- identyczność:

$$(1) \quad D_x^0 f(x) = f(x)$$

- zgodność z pochodną i całką rzędu naturalnego:

$$(2) \quad D_x^\alpha f(x) = \frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{N}$$

$$(3) \quad D_x^{-\alpha} f(x) = \int \dots \int f(x) dx^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{N}$$

- liniowość:

$$(4) \quad D_x^\alpha (Af(x) + Bg(x)) = AD_x^\alpha f(x) + BD_x^\alpha g(x)$$

- addytywność i przemienność:

$$(5) \quad D_x^{\alpha+\beta} f(x) = D_x^\alpha D_x^\beta f(x)$$

Należy tu zauważyć, że w przypadku gdy całka w (3) pozostaje nieoznaczona, to ze względu na dowolność stałej całkowania, operator $D_x^{-\alpha}$ daje w wyniku rodzinę funkcji określonych z dokładnością do dowolnego wielomianu rzędu $\alpha-1$. Aby uniknąć tej niejednoznaczności, przy formułowaniu definicji pochodnej ułamkowej, przyjmuje się zwykle silniejszy postulat, mianowicie:

$$(6) \quad {}_a D_x^{-\alpha} f(x) = \int_a^{x_1} \dots \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbf{N}$$

gdzie a jest dowolną stałą zwaną *punktem bazowym* (zwykle przyjmuje się $a = 0$ lub $a = -\infty$).

Spośród wielu zaproponowanych definicji pochodnych ułamkowych (patrz np. [5]), w pracach dotyczących zagadnień elektromagnetyzmu, najczęściej spotyka się następujące:

- Grünwalda-Letnikowa:

$$(7) \quad D_x^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh)$$

- Riemanna-Liouville'a:

$$(8) \quad {}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad n-1 \leq \alpha < n$$

gdzie Γ – funkcja gamma Eulera

- Caputo:

$$(9) \quad {}_a^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \frac{d^n f}{dt^n} dt$$

gdzie $n-1 \leq \alpha < n \in \mathbf{N}$.

Definicja (7) jest wygodna do obliczeń numerycznych, ale trudna do stosowania w obliczeniach analitycznych. Można jednak wykazać, że jest ona równoważna definicji (8). Natomiast definicja (9) nie jest w pełni równoważna poprzednim. Jest ona jednak najchętniej stosowana w zagadnieniach różniczkowych, w których poszukiwane wielkości są funkcjami czasu, ponieważ pozwala na łatwe uwzględnianie klasycznych warunków początkowych stawianych tym funkcjom.

Należy zwrócić uwagę, że:

- pochodna rzędu niebędącego liczbą naturalną jest zależna od wyboru punktu bazowego a , podobnie jak pochodna o rzędzie ujemnym całkowitym (por. (6)),
- żadna z wyżej przedstawionych definicji nie realizuje w pełni postulatu (4). Można to łatwo zauważyć na przykładzie obliczania pochodnej Caputo rzędu $\alpha = 3/2$ z funkcji $f(x) = x$. Korzystając bezpośrednio z (9) otrzymujemy:

$$(10) \quad {}_0^C D_x^{\frac{3}{2}} x = {}_0^C D_x^{\frac{1}{2}} {}_0^C D_x^1 x = 0$$

ale

$$(11) \quad {}_0^C D_x^1 {}_0^C D_x^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \neq {}_0^C D_x^{\frac{3}{2}} x$$

Różne rezultaty w (10) i (11) oznaczają też, że operatory pochodnej ułamkowej na ogół nie są przemienne (są przemienne i addytywne tylko w pewnych zakresach rzędu pochodnej).

Uwagi dotyczące stosowania pochodnych ułamkowych w opisie zjawisk fizycznych

Przy definiowaniu wielu pojęć fizycznych (np. prędkość, przyspieszenie, praca, moc, natężenie prądu elektrycznego, siła elektromotoryczna, strumienie, cyrkulacje pól wektorowych, itp.) wykorzystywane są matematyczne operacje różniczkowania i całkowania, jednak są to zawsze operacje o rzędach całkowitych. Również wszystkie fundamentalne prawa fizyczne opisywane są równaniami, w których pochodne mają tylko całkowite rzędy. Nasuwa się więc pytanie, w jakim celu w analizie zagadnień fizycznych wprowadza się ostatnio pochodne ułamkowe?

W literaturze przedmiotu można rozróżnić dwa sposoby wykorzystania pochodnych ułamkowych w zagadnieniach fizycznych:

- jako narzędzia matematycznego pozwalającego uzyskiwać pewne rozwiązania równań fizycznych (bez zmiany samych równań i wielkości w nich występujących),
- jako modyfikację znanych zależności fizycznych, polegającą zwykle na zastąpieniu w nich pochodnych o rzędach całkowitych pochodnymi ułamkowymi.

Sposób pierwszy nie budzi zastrzeżeń. Istotne jest, że przy takim postępowaniu nie zmienia się fizycznego sensu praw i wielkości w nich występujących. Sposób ten można porównać np. do metody operatorowej rozwiązywania obwodów elektrycznych wykorzystującej transformatę Laplace'a. Przykłady takiego zastosowania pochodnych ułamkowych w elektrodynamice można znaleźć w [6, 7, 8].

Modyfikacja znanych i dobrze potwierdzonych empirycznie równań fizycznych przez zastąpienie w nich pochodnych o rzędach naturalnych pochodnymi ułamkowymi budzi natomiast wiele wątpliwości i często dokonywana jest błędnie już pod względem formalnym. Dokonując takich prób należy przede wszystkim zwrócić szczególną uwagę na niektóre specyficzne właściwości pochodnych ułamkowych, pod wieloma względami istotnie różniące się od właściwości pochodnych rzędu całkowitego.

Należy oczywiście pamiętać, że nie wszystkie definicje pochodnej ułamkowej są sobie równoważne, o czym już wspomniano w punkcie poprzednim. Np. obliczając pochodną rzędu $\frac{1}{2}$ z funkcji skoku jednostkowego według definicji (7) otrzymuje się:

$$(12) \quad {}_0^C D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

a według definicji (8):

$$(13) \quad {}_0^C D_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}(x) = 0$$

Posługując się raz przyjętą definicją operatora pochodnej ułamkowej, należy zwrócić uwagę, że efekt jego zadziałania na funkcję opisującą jakąś wielkość fizyczną zależy (na ogół) od przyjętej wartości punktu bazowego, podczas gdy żadna fizycznie mierzalna wielkość nie może być uzależniona od takiego arbitralnego wyboru. Jeżeli więc wzór zawierający pochodną ułamkową ma poprawnie opisywać zależność jakichś wielkości fizycznie mierzalnych, to albo musi być on skonstruowany w taki sposób, że w ostatecznym rezultacie daje wynik niezależny od wyboru punktu bazowego, albo konkretna wartość tego punktu musi mieć jakieś fizycznie uzasadnione znaczenie.

Nietypową cechą pochodnych ułamkowych, na którą szczególnie należy zwrócić uwagę, jest też ich nielokalność. Istotnie, z przedstawionych w poprzednim punkcie definicji wynika, że wartość funkcji pochodnej ułamkowego rzędu dla konkretnego argumentu x zależy nie tylko od przebiegu różniczkowanej funkcji w dowolnie małym otoczeniu x (jak to jest w przypadku pochodnych rzędu naturalnego), lecz w całym przedziale $[a, x]$. Z tego powodu pochodne ułamkowych rzędów mają bardziej charakter operacji całkowych niż różniczkowych (w klasycznym rozumieniu).

W wielu publikacjach dotyczących zastosowań pochodnych ułamkowych do opisu zjawisk elektromagnetycznych można napotkać błędy wynikające z niezauważenia przez autorów faktu, że pochodne różnych rzędów, liczone względem wielkości mianowanych, mają różne miana (patrz np. [9] - [12] i inne cytowane w [1, 2]). Dla pochodnych ułamkowych właściwość ta wynika wprost z ich definicji (por. (7) - (9)). Oznacza to, że proste zastąpienie, w poprawnie zapisanej zależności fizycznej, pochodnej rzędu naturalnego pochodną rzędu ułamkowego prowadzi z reguły do, niedopuszczalnej w fizycznych relacjach, niejednorodności wymiarowej. Dyskusje tego aspektu stosowania pochodnych ułamkowych można znaleźć w [1, 2].

W dalszej części niniejszej pracy zwrócono uwagę na kilka innych błędnych, lub z różnych powodów budzących poważne wątpliwości, zastosowań pochodnych ułamkowych w elektromagnetyzmie.

Problemy z interpretacją wielkości fizycznych

Uniknięcie wyżej wspomnianego błędu niejednorodności wymiarowej jest możliwe przez pomnożenie pochodnej ułamkowej przez dodatkowo wprowadzony współczynnik mianowany. Przykłady takiego postępowania można znaleźć w wielu pracach, np. [13 - 15]. Niestety autorzy zwykle nie analizują szeregu innych fizycznych problemów, jakie się w związku z tym pojawiają.

Rozpatrzmy to zagadnienie na przykładzie zastąpienia prawa Ohma:

$$(14) \quad u(t) = R \frac{dq}{dt}$$

zależnością:

$$(15) \quad u(t) = R \frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} \frac{d^\alpha q}{dt^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

jakie można znaleźć np. w [14]. Operator różniczkowania w (15) jest tu rozumiany w sensie definicji Caputo (9) przy punkcie bazowym $a = 0$. Wielkość σ jest z założenia

parametrem wyrażonym w jednostkach czasu, dzięki czemu jednorodność wymiarowa jest zachowana.

Autorzy [14] wskazują, że zależność (15) może opisywać element obwodu elektrycznego (dwójnik) łączący w sobie cechy rezystora i kondensatora (np. kondensatora stratnego o nieliniowych właściwościach). Na interpretację taką wskazują przypadki graniczne: dla $\alpha = 1$ zależność (15) przechodzi w zwykłe prawo Ohma (14) opisujące idealny rezystor, natomiast dla $\alpha = 0$ napięcie u jest proporcjonalne do ładunku elektrycznego q , jak dla idealnego kondensatora. Pojawiają się tu jednak problemy związane z niejasną interpretacją fizyczną wielkości występujących w (15).

Aby je zauważyć należy najpierw zwrócić uwagę, że zależność (14) może być rozumiana dwojako – albo jako empiryczne prawo fizyczne wyrażające proporcjonalność natężenia prądu do napięcia panującego na zaciskach konkretnego elementu obwodu elektrycznego (liniowego rezystora), albo jako definicja rezystancji dowolnego elementu obwodu, czyli stosunku napięcia do natężenia prądu. W pierwszym przypadku R jest z założenia wielkością stałą, w drugim może zależeć np. od napięcia (jak to jest np. w warystorach).

Zachodzi pytanie: co oznacza R we wzorze (15)? Jeśli jest to rezystancja (na co wskazuje użyty symbol), to korzystając z (14), jako jej definicji oraz zależności (15) otrzymuje się równanie

$$(16) \quad \frac{dq}{dt} = \frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} \frac{d^\alpha q}{dt^\alpha}$$

Nawet bez jego rozwiązywania widać, że wynikająca z niego zależność ładunku od czasu (a więc i natężenia prądu) musiałaby nie zależeć od przyłożonego do elementu napięcia i jego rezystancji, co należy uznać za rezultat nonsensowny. Inaczej mówiąc, lewa strona (16) jest po prostu natężeniem prądu (na mocy definicji), a prawa dla α różnego od 1 nie, więc w (15) wielkość R również nie oznacza stosunku napięcia do natężenia. Jeżeli więc zależność (15) ma opisywać zależność między napięciem a ładunkiem przepływającym przez jakiś rzeczywisty element obwodu, to wielkość R w niej występująca nie może oznaczać rezystancji (na mocy definicji) i nie powinna być oznaczana takim samym symbolem jak w (14). Co więc oznacza i czy w ogóle można jej nadać jakiś sens fizyczny?

Załóżmy, że dysponujemy dwójnikiem opisywanym zależnością (15), przy czym $\alpha \neq 1$. Dokonując pomiaru zależności natężenia prądu od napięcia można wyznaczyć rząd pochodnej oraz współczynnik proporcjonalności między napięciem a ułamkową pochodną ładunku względem czasu. Trudno jednak wskazać sposób, jak na tej podstawie dałoby się niezależnie określić wielkości R i σ . Zachodzi więc pytanie, czy w ogóle wielkościom tym można nadać osobny sens fizyczny? Jeśli tak, to autorzy prac dokonujących tego typu modyfikacji w klasycznych zależnościach opisujących elementy obwodów elektrycznych powinni go wyjaśnić (czyli podać ich operacyjne definicje, określające jak można je zmierzyć bezpośrednio lub obliczyć na podstawie innych pomiarów).

Problemy z punktem bazowym

Przy opisywaniu zależności fizycznych za pomocą pochodnych ułamkowych należy też zwrócić uwagę na problematyczne znaczenie wyboru punktu bazowego. Na przykład przyjęcie w (15) $\alpha = 0$ oznacza, że w chwili $t = 0$ napięcie na elemencie opisywanym przez tę zależność musi się zerować (por. (9)). Tu nasuwa się pytanie, jak ten fakt należy interpretować w kategoriach fizycznych? Chwila

początkowa jest pojęciem umownym i zasadniczo każdą chwilę pracy obwodu elektrycznego można przyjąć jako $t=0$. Z punktu widzenia obliczeniowego istotne jest jedynie, żeby stan obwodu w tej chwili był znany. Żaden element klasycznego obwodu nie powinien więc wymuszać jakiegokolwiek wartości panującego na nim napięcia w chwili początkowej (pomijając oczywisty przypadek idealnego źródła napięcia). Dlaczego element obwodu, który miałby łączyć w sobie cechy kondensatora i rezystora narzuca taki warunek? Abstrahując od celowości modyfikowania prawa Ohma w opisany sposób, wydaje się więc, że w miejsce (15) należałoby napisać raczej:

$$(17) \quad u(t) = X {}_t^C D_t^\alpha q(t) + u(t_0)$$

gdzie α i X są empirycznie wyznaczalnymi stałymi.

Problemy z nielokalnością

Kolejna trudność związana z taką modyfikacją równań fizycznych wiąże się z nielokalnością pochodnej ułamkowej. Zagadnienie to można również omówić na przykładzie zależności (15).

W przypadkach granicznych $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$, tzn. dla klasycznie rozumianego kondensatora i rezystora, zależności między napięciem a ładunkiem mają charakter chwilowy (tzn. „lokalny” w sensie czasowym). Napięcie na kondensatorze w chwili t zależy od wartości ładunku w nim zgromadzonego w tejże chwili, a na rezystorze, od ładunku, jaki przez niego przepłynął w nieskończenie krótkim interwale czasowym tę chwilę obejmującym. W obu przypadkach nie ma żadnego znaczenia jakie wartości funkcja $q(t)$ przyjmowała w chwilach wcześniejszych.

Zależność (15) wskazuje natomiast, że w przypadkach pośrednich, tzn. dla $0 < \alpha < 1$, sytuacja wygląda odmiennie, ponieważ zgodnie z definicją (9) wartość napięcia musiałaby zależeć od przebiegu funkcji $q(t)$ w całym przedziale $[0, t]$. Oznacza to, że hipotetyczny element obwodu elektrycznego opisywany zależnością (15) musiałby cechować się swojego rodzaju „pamięcią”, co w zasadniczy sposób odróżnia go od klasycznych elementów obwodów elektrycznych (również nieliniowych).

Fizycznego istnienia takich elementów nie można wykluczyć, jednak wydaje się, że na taką ich nietypową cechę autorzy powinni wyraźnie zwrócić uwagę.

Błędy w określeniach operatorów różniczkowych ułamkowych rzędów analizy wektorowej

W niektórych artykułach proponuje się uogólnienie podstawowych praw elektrodynamiki przez wprowadzenie do nich pochodnych ułamkowych również względem współrzędnych przestrzennych (patrz np. [9, 12], por. też [8]). Wymaga to określenia ułamkowych odpowiedników operatorów różniczkowych klasycznej analizy wektorowej, takich jak gradient, dywergencja, rotacja, laplasjan.

W [12] proponuje się zdefiniowanie tego typu operacji przy pomocy *operatora gradientu ułamkowego* zdefiniowanego jako (wzory (14), (15) w [12]):

$$(18) \quad \nabla^{\vec{\alpha}} := D_x^{\alpha_1} (\cdot) \mathbf{e}_1 + D_y^{\alpha_2} (\cdot) \mathbf{e}_2 + D_z^{\alpha_3} (\cdot) \mathbf{e}_3$$

gdzie D^α jest operatorem pochodnej ułamkowej w sensie definicji (7). Opierając się na wzorach klasycznej analizy wektorowej autorzy [12] definiują ułamkowe operacje gradientu, dywergencji i rotacji we współrzędnych kartezjańskich:

$$(19) \quad \text{grad}^{\vec{\alpha}} \varphi = \nabla^{\vec{\alpha}} \varphi, \quad \text{div}^{\vec{\alpha}} \mathbf{V} = \nabla^{\vec{\alpha}} \cdot \mathbf{V}, \quad \text{rot}^{\vec{\alpha}} \mathbf{V} = \nabla^{\vec{\alpha}} \times \mathbf{V}$$

Następnie, posługując się ułamkową wersją potencjałów elektrodynamicznych (wzory (33) i (34) w [12]) i twierdzeniem Helmholtza o dekompozycji pól, postulują ostatecznie uogólnienie równań Maxwella w postaci

$$(20) \quad \begin{aligned} \operatorname{rot}^{\bar{\alpha}} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{d^{\beta} \mathbf{D}}{dt^{\beta}} & \operatorname{div}^{\bar{\alpha}} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot}^{\bar{\alpha}} \mathbf{E} &= -\frac{d^{\beta} \mathbf{B}}{dt^{\beta}} & \operatorname{div}^{\bar{\alpha}} \mathbf{D} &= \rho \end{aligned}$$

Analizując już sam wzór (18) nasuwa się jednak spostrzeżenie, że zdefiniowany tam operator nie może mieć fizycznego sensu, gdy wielkości α_i nie są sobie równe, ponieważ w przeciwnym przypadku składniki sumy w (18) mają różne miana. Błędem niejednorodności wymiarowej obarczone są również równania (20). Należy więc albo założyć, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, albo wprowadzić przed każdym wyrazem po prawej stronie (18) odpowiedni współczynnik mianowany (jak i po prawej stronie w (20) przy pochodnych względem czasu). Błędy te można więc usunąć, jednak zachodzi tu inny problem, o bardziej fundamentalnym znaczeniu.

Przede wszystkim należy postawić pytanie: czy operator określony przez (18) (po usunięciu błędu niejednorodności wymiarowej) jest rzeczywicie operatorem wektorowym? Inaczej mówiąc: czy działając nim na funkcję skalarną, uzyskuje się poprawną funkcję wektorową? Nie każde trzy dowolnie zdefiniowane wielkości można traktować jako wielkość wektorową. Aby tak było, wielkości te powinny się prawidłowo transformować przy ortogonalnej transformacji układu współrzędnych (np. przy obrocie).

Weryfikację charakteru operatora zdefiniowanego w (18) można przeprowadzić na prostym przykładzie. Niech:

$$(21) \quad \varphi(x, y, z) = x, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/2$$

Po skorzystaniu z (8) i (18) otrzymuje się

$$(22) \quad \operatorname{grad}^{1/2} \varphi = 2\sqrt{x/\pi} \mathbf{e}_1$$

Dokonując transformacji obrotu o kąt θ wokół osi OZ:

$$(23) \quad x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta, \quad z = z'$$

mamy

$$(24) \quad \varphi'(x', y', z') = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$(25) \quad \operatorname{grad}^{1/2} \varphi' = 2 \cos \theta \sqrt{x'/\pi} \mathbf{e}_1 - 2 \sin \theta \sqrt{y'/\pi} \mathbf{e}_2$$

Obliczając następnie moduł ułamkowego gradientu w obu układach współrzędnych otrzymuje się:

$$(26) \quad \left| \operatorname{grad}^{1/2} \varphi \right| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x' \cos \theta - y' \sin \theta}$$

$$(27) \quad \left| \operatorname{grad}^{1/2} \varphi' \right| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x' \cos^2 \theta + y' \sin^2 \theta}$$

Zatem $\left| \operatorname{grad}^{1/2} \varphi' \right| \neq \left| \operatorname{grad}^{1/2} \varphi \right|$, co oznacza, że tak zdefiniowana wielkość nie jest wektorem, ponieważ moduł wektora jest skalarem i nie może się zmieniać w wyniku transformacji obrotu układu współrzędnych. Oznacza to też, że żadna z operacji zdefiniowanych w (18) i użytych w (20) nie może mieć obiektywnego (tzn. niezależnego od wyboru układu współrzędnych) sensu fizycznego.

Podsumowanie

W pracy zwrócono uwagę na często popełniane błędy przy używaniu pochodnych ułamkowych w teorii obwodów elektrycznych i teorii pola elektromagnetycznego, jak też na inne problemy i trudności z tym związane. Używając tego narzędzia do analizy zagadnień elektromagnetyzmu należy szczególnie uważać na jednorodność wymiarową zapisywanych zależności, fizyczny sens występujących w nich wielkości, jak też i ich transformacyjne właściwości. Nie wolno też ignorować faktu, że pochodna ułamkowa nie jest operacją lokalną, co zasadniczo odróżnia ją od klasycznych operatorów różniczkowych.

Zdaniem autorów niniejszej pracy, rozważania takie jak np. w [9], czy [12] mogą mieć jedynie spekulatywny charakter, ponieważ jak dotąd nie ma empirycznych podstaw do modyfikacji klasycznych równań elektrodynamiki. Nie chcemy przez to powiedzieć, że spekulacje takie pozbawione są całkowicie sensu, jednak nawet w takich rozważaniach konieczne jest zachowanie pewnych formalnych rygorów, ogólnie obowiązujących w fizyce.

Autorzy: prof. zw. dr inż. Ryszard Sikora, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Informatyki, ul. Sikorskiego 37, 70-313 Szczecin, E-mail: rs@zut.edu.pl; dr hab. inż. Stanisław Pawłowski, prof. PRz, Politechnika Rzeszowska, Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów, E-mail: spawlo@prz.edu.pl

LITERATURA

- [1] Sikora R., Pochodne ułamkowe w teorii obwodów elektrycznych. Uwagi krytyczne, *Przegląd Elektrotechniczny*, 92 (2016), nr.10, 274-276
- [2] Sikora R., Fractional derivatives in electrical circuit theory – critical remarks, *Archives of Electrical Engineering*, 66 (2017), nr.1, 155-163
- [3] Ostalczyk P., Jednak: "Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitych rzędów", *Przegląd Elektrotechniczny*, 93 (2017), nr.3, 175-180
- [4] Sikora R., Riposta na ripostę prof. Piotra Ostalczyka, *Przegląd Elektrotechniczny*, 93 (2017), nr.4, 150-152
- [5] Oldham K. B., Spanier J., The Fractional Calculus, *Mathematics in Science and Engineering*, 111, (1974) Academic Press
- [6] Engheta N., On Fractional Calculus and Fractional Multipoles in Electromagnetism, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 44 (1996), 554-566
- [7] Engheta N., Electrostatic 'Fractional' Image Methods for Perfectly Conducting Wedges and Cones, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 44 (1996), 1565-1574
- [8] Engheta N., Fractional Curl Operator in Electromagnetics, *Microwave and Optical Technology Letters*, 17, (1998), n.2, 86-91
- [9] Ismail R., Radwan A. G., Rectangular Waveguides in the Fractional-Order Domain, *IEEE Xplore*, 978-1-4673-4810-2/12/\$31.00 ©2012
- [10] Kaczorek T., Zeroing of state variables in fractional descriptor electrical circuits by state-feedbacks, *Archives of Electrical Engineering*, 63 (249) No 3 (2014)
- [11] Farman Ali M., Sharma M., Jain R., An Application of Fractional Calculus in Electrical Engineering, *Advanced Engineering Technology and Application*, 5 (2016), No. 2, 41-45
- [12] Ortigueira M. D., Rivero M., Trujillo J. J., From a generalised Helmholtz decomposition theorem to fractional Maxwell equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22 (2015), Issues 1-3, 1036-1049
- [13] Westerlund S., Ekstam L., Capacitor Theory, *IEEE Trans. On Dielectrics and Electrical Insulation*, 1 (1994), No. 5
- [14] Gomez-Aguilar J. F., Razo-Hernandez R., Granados-Liberman D., A physical interpretation of fractional calculus in observables terms: analysis of the fractional time constant and the transitory response, *Revista Mexicana de Fisica*, 60 (2014), 32-38
- [15] Gomez-Aguilar J. F., et al., Electrical circuits described by a fractional derivative with regular Kernel, *Revista Mexicana de Fisica*, 62 (2016), 144-154