

Modele rozkładu prędkości gazu w przepływie przez przewód o przekroju kołowym

Streszczenie. W pracy przedstawiono rozważania związane z modelami matematycznymi profili prędkości w przepływie przez rurę. Dzięki modelom możliwe jest wyznaczenie współczynników wzorcowania przepływomierzy próbkujących. Na podstawie przeprowadzonych badań doświadczalnych wyznaczono rozkłady współczynników wzorcowania w zależności od promienia rury.

Abstract. The paper presents considerations related to mathematical models of velocity profiles in the flow through a pipe. Thanks to the models, it is possible to determine the calibration coefficients of the sampling flowmeters. Based on the experimental tests carried out, distributions of calibration coefficients were determined depending on the radius of the pipe. (**Models of gas speed distribution in flow through a circular wire**).

Słowa kluczowe: model matematyczny, współczynnik wzorcowania, profil prędkości.

Keywords: mathematical model, calibration factor, velocity profile.

Wstęp

Pomiary wielkości fizycznych są w przemyśle podstawowym źródłem informacji o przebiegu procesu, jego stanu jak i jakości. Coraz wyższy poziom zaawansowania technologicznego procesów wymaga coraz bardziej dokładnych i niezawodnych urządzeń pomiarowych. Od wskazań przyrządów zależy sterowanie całym procesem technologicznym a dokładność wskazań gwarantuje powtarzalność procesu, co znacząco wpływa na jakość uzyskanego produktu. Jednocześnie dąży się do tego by urządzenia były uniwersalne i nie ingerowały w proces technologiczny. Jednym z trudniejszych zagadnień jest pomiar strumienia objętości, który jest zaliczany do najtrudniejszych w metrologii przemysłowej. Przepływomierze spełniające przedstawione wymagania zwykle są przepływomierzami próbkującymi, które obliczają strumień objętości na podstawie wartości prędkości zmierzonej w pewnej ograniczonej przestrzeni płynnej nie będącej przestrzenią całego przewodu. Stosowanie tego typu przepływomierzy jest uzasadnione: mniejszym kosztem zakupu, niewielką integracją w strugę płynu, możliwością pomiaru w wielu punktach poprzez zmianę położenia czujnika [1]. Do poprawnego obliczenia strumienia objętości, na podstawie próbkowania konieczna jest znajomość profilu prędkości. Na tej podstawie możliwe jest wyznaczenie współczynnika wzorcowania przepływomierza. Znając współczynnik wzorcowania, pole powierzchni przekroju przepływowego przewodu oraz wartość zmierzonej prędkości w przekrojach próbkowania, możemy wyznaczyć strumień objętości. Wiele przepływomierzy realizuje próbkowanie w kilku różnych miejscach, przy czym próbkowanie niekoniecznie musi mieć miejsce w osi przewodu. Ponieważ próbkowanie dla różnych promieni będzie miało różne drogi, w związku z tym stała kalibracji będzie miała różne wartości wzdłuż promienia przewodu. Dlatego też znajomość rozkładu prędkości w przewodzie jest szczególnie ważna.

Istnieje wiele matematycznych modeli rozkładu prędkości, różniących się postacią funkcji oraz zakresem stosowności. Znajomość rzeczywistego profilu prędkości występującego w przewodzie zamkniętym pozwala na dobór odpowiadającego mu matematycznego modelu rozkładu prędkości co pozwala na teoretyczne wyznaczenie współczynnika wzorcowania przepływomierza już na etapie produkcji. Przyjęty za wzorec rozkładu prędkości model matematyczny, wpływa na dokładność wskazania przepływomierza gdyż to z jego udziałem obliczany jest strumień objętości na podstawie zmierzonego sygnału z próbkującego urządzenia pierwotnego przepływomierza.

Zatem zgodność modelu z rzeczywistym profilem prędkości występującym w przewodzie jest kluczowa dla wysokiej dokładności pomiaru. Dlatego ważnym zagadnieniem, z metrologicznego punktu widzenia, jest weryfikacja znanych modeli matematycznych rozkładu prędkości [2] szczególnie na drodze doświadczalnej.

Zasada działania przepływomierzy próbkujących

Podstawową cechą przepływomierzy próbkujących jest dokonywanie przez urządzenie pierwotne przepływomierza (czujnik) pomiaru wartości prędkości miejscowej płynu w ograniczonej przestrzeni przekroju przewodu (przestrzeni czynnej czujnika). Na podstawie wyniku pomiaru prędkości miejscowej, informacji o średnicy przewodu oraz współczynnika wzorcowania zostaje wyliczony strumień objętości przepływającego medium w całym przekroju przewodu. Współczynnik wzorcowania definiowany jest równaniem

$$(1) \quad k = \frac{v_{sr}}{v_c}$$

gdzie: v_{sr} - średnia prędkość płynu w przekroju przewodu, v_c - średnia prędkość płynu w przestrzeni czynnej czujnika.

Ze względu na to, że sygnał wyjściowy z urządzenia pierwotnego (czujnika) nie zależy bezpośrednio od strumienia objętości, lecz od prędkości w określonej przestrzeni przekroju przepływowego, należy stwierdzić, że pomiar strumienia płynu tym przepływomierzem jest pomiarem pośrednim. Zatem, na dokładność pomiaru ma znaczący wpływ model matematyczny profilu prędkości, który ustala zależność pomiędzy mierzoną prędkością a strumieniem płynu. Należy zatem stwierdzić, że dokładna analiza modelu matematycznego rozkładu prędkości, a szczególnie jego zgodność z rzeczywistością jest ważnym zagadnieniem.

W zależności od charakteru przepływu, profil prędkości zmienia się od parabolicznego dla przepływu laminarnego do potęgowego dla przepływów turbulentnych. Wyprowadzenie teoretyczne wzoru opisującego rozkład prędkości dla przepływu laminarnego można znaleźć w wielu źródłach m.in. [4]

$$(2) \quad v = v_m \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

gdzie: v_m - prędkość w osi rurociągu, która jest prędkością maksymalną, r - odległość punktu od osi rurociągu w przekroju poprzecznym, R - promień wewnętrzny rurociągu.

W przypadku przepływu turbulentnego nie da się wyznaczyć ścisłego modelu matematycznego rozkładu prędkości na drodze teoretycznej. Zostało opracowanych wiele wzorów, którymi można z pewną dokładnością opisać rzeczywisty profil prędkości [5]. Ze względu na to, że właśnie przepływ turbulentny jest najczęściej występującym przepływem w przemyśle, tak dużo uwagi zostało poświęcone temu zagadnieniu.

Jednym ze wzorów jest wzór uniwersalny opisujący w przybliżeniu rozkład prędkości od przepływu laminarnego po równomierny (łokowy):

$$(3) \quad v_1 = v_m \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{m_1} \right]$$

Gdy wykładnik $m_1=2$ wzór opisuje profil przepływu laminarnego, a gdy m wynosi kilka lub kilkanaście, to wzór opisuje rozkład prędkości przepływu turbulentnego. W przypadku, gdy m dąży do nieskończoności, model opisuje przepływ równomierny [6].

Wzór potęgowy trójskładnikowy pozwala na lepsze dopasowanie profilu obliczeniowego do wyznaczonego doświadczalnie, niż można to zrobić dla wzoru uniwersalnego [3]:

$$(4) \quad v_2 = v_m \left[1 - b \left(\frac{r}{R} \right)^2 - (1 - b) \left(\frac{r}{R} \right)^{m_2} \right]$$

gdzie: b , m_2 – parametry, które wyznaczają się dla konkretnego profilu prędkości

Najczęściej stosowanym modelem rozkładu prędkości dla przepływu burzliwego jest wzór potęgowy Prandtla (wzór 5). Istnieje wiele zależności matematycznych między wykładnikiem potęgowym występującym w tym wzorze, a liczbą Reynoldsa. Wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa wartość wykładnika potęgowego coraz mniej zależy od liczby Reynoldsa, a przy dużych jej wartościach zależy tylko od chropowatości względnej rurociągu

$$(5) \quad v_3 = v_m \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}}$$

gdzie: $\frac{1}{n}$ – wykładnik potęgowy zależny od liczby Reynoldsa i chropowatości rurociągu.

Współczynnik potęgowy występujący we wzorze Prandtla można obliczyć między innymi z równania:

$$(6) \quad n = 1,66 \cdot \log(Re)$$

w którym liczbę Reynoldsa definiujemy:

$$(7) \quad Re = \frac{v_m \cdot D}{\vartheta}$$

gdzie: v_m – prędkość w osi rurociągu, D – średnica wewnętrzna rurociągu, ϑ – kinematyczny współczynnik lepkości.

Wzory opisujące rozkład prędkości dla przepływu turbulentnego, które pozwalają jednocześnie na opis rozkładu prędkości dla przepływu laminarnego mogą być stosowane również dla przepływu przejściowego. Poszukiwanie odpowiedniego modelu matematycznego rozkładu prędkości w tym przepływie nie jest łatwe, ponieważ trudno jest opisać dokładnie cały zakres jednym wzorem [7], [8].

Czujniki o powierzchni czynnej w kształcie prostokąta są najczęściej stosowanymi czujnikami dlatego skupiono uwagę na tej grupie czujników.

Dla przepływu laminarnego, we wzorze podstawowym na współczynnik wzorcowania (1), prędkość średnią w powierzchni czynnej czujnika oblicza się ze wzoru (8).

$$(8) \quad v_c = v_m \left[1 - \left(\frac{r_{co}}{R} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{R_c}{R} \right)^2 \right]$$

gdzie: r_{co} – odległość środka czujnika od osi rurociągu, R_c – promień czujnika.

Prędkość średnią przepływu laminarnego można obliczyć ze wzoru (9):

$$(9) \quad v_{sr} = \frac{v_m}{2}$$

Współczynnik wzorcowania dla przepływu laminarnego przedstawia się w postaci (10):

$$(10) \quad k = \frac{v_{sr}}{v_c} = \frac{1}{2 \left[1 - \left(\frac{r_{co}}{R} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{R_c}{R} \right)^2 \right]}$$

Dla współczynnika wzorcowania dla przepływu turbulentnego o profilu opisanym wzorem uniwersalnym, prędkość średnią w powierzchni czynnej czujnika można obliczyć ze wzoru (11):

$$(11) \quad v_c = v_m \left[1 - \left(\frac{R_{co}}{R} \right)^4 - \frac{2r_{co}^2 R_c^2}{R^4} - \frac{1}{3} \left(\frac{R_c}{R} \right)^4 \right]$$

natomiast prędkość średnią za pomocą wzoru (12):

$$(12) \quad v_{sr} = \frac{m_1}{(m_1+2)} v_m$$

Wzór na współczynnik wzorcowania przedstawia zależność (13):

$$(13) \quad k = \frac{v_{sr}}{v_c} = \frac{2}{3 \left[1 - \left(\frac{R_{co}}{R} \right)^4 - \frac{2r_{co}^2 R_c^2}{R^4} - \frac{1}{3} \left(\frac{R_c}{R} \right)^4 \right]}$$

Dla współczynnika wzorcowania dla przepływu turbulentnego o profilu opisanym wzorem potęgowym trójskładnikowym prędkość średnią w powierzchni czynnej czujnika można obliczyć ze wzoru (14):

$$(14) \quad v_c = v_m \left[1 - b \left(\frac{r_{co}}{R} \right)^2 - \frac{b}{2} \left(\frac{R_c}{R} \right) - (1 - b) \left(\frac{r_{co}}{R} \right)^4 - \frac{(1-b)(2r_{co}^2 R_c^2)}{R^4} - \frac{(1-b)}{3} \left(\frac{R_c}{R} \right)^4 \right]$$

natomiast prędkość średnią za pomocą wzoru (15)

$$(15) \quad v_{sr} = \frac{2(m_2+b) - m_2 b}{2(m_2+b)} v_m$$

Wzór na współczynnik wzorcowania przedstawia zależność (16):

$$(16) \quad k = \frac{v_{sr}}{v_c} = \frac{2(m_2+b) - m_2 b}{12 \left[1 - b \left(\frac{r_{co}}{R} \right)^2 - \frac{b}{2} \left(\frac{R_c}{R} \right) - (1-b) \left(\frac{r_{co}}{R} \right)^4 - \frac{(1-b)(2r_{co}^2 R_c^2)}{R^4} - \frac{(1-b)}{3} \left(\frac{R_c}{R} \right)^4 \right]}$$

Dla współczynnika wzorcowania dla przepływu turbulentnego o profilu opisanym wzorem Prandtla prędkość średnią w powierzchni czynnej czujnika można obliczyć ze wzoru (17):

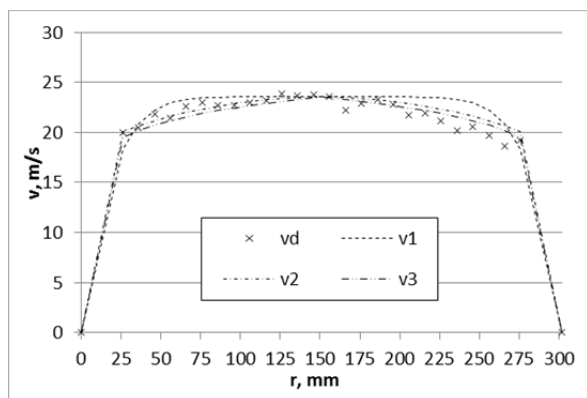
$$(17) \quad v_c = \frac{v_m}{3} \left[2 \left(1 - \sqrt{\left(\frac{r_{co}}{R} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{R_c}{R} \right)^2} \right)^{\frac{1}{n}} + \left(1 - \sqrt{\left(\frac{r_{co}}{R} \right)^2 + \left(\frac{R_c}{R} \right)^2} \right)^{\frac{1}{n}} \right]$$

Wzór na współczynnik wzorcowania przedstawia zależność (18):

$$(18) \quad k = \frac{v_{sr}}{v_c} = \frac{6n^2}{(n+1)(n+2)} \left[2 \left(1 - \sqrt{\left(\frac{r_{co}}{R} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{R_c}{R} \right)^2} \right)^{\frac{1}{n}} + \left(1 - \sqrt{\left(\frac{r_{co}}{R} \right)^2 + \left(\frac{R_c}{R} \right)^2} \right)^{\frac{1}{n}} \right]$$

Wyniki badań

Na podstawie przeprowadzonych pomiarów porównano profile prędkości uzyskane z pomiarów doświadczalnych z teoretycznymi profilami wyznaczonymi z modeli matematycznych dla różnych liczb Reynoldsa. Na rysunku 1 przedstawiono przykładowe profile prędkości dla $Re=470000$.



Rys. 1. Profile prędkości: vd-doświadczalny, v1-model uniwersalny, v2-model trójskładnikowy, v3-model Prandtla

Można zauważyć, że najlepszą zgodność modeli z pomiarami doświadczalnymi uzyskano w osi rury, a wraz z oddalaniem się od osi zgodność jest mniejsza. Należy zauważyć, że w przedstawionych modelach profilu prędkości występują współczynniki np. m_1, m_2, n , za pomocą których można modyfikować kształt profilu teoretycznego. W przypadku profilu przedstawionych na rysunku 1 wartości te wynoszą: $m_1=8; m_2=4; n=9,42; b=0,45$. Uwzględniając zmienność tych współczynników należy zauważyć, że faktycznie tyle jest modeli ile jest kombinacji współczynników wykorzystanych w równaniach.

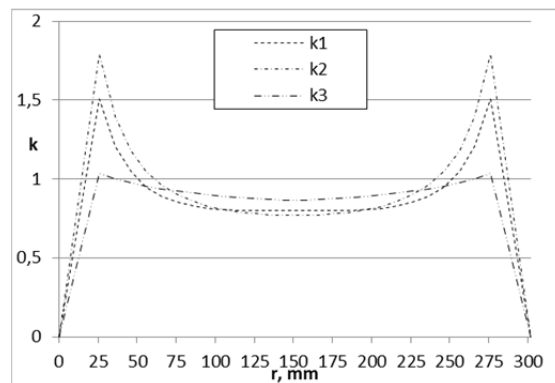
Dopasowanie modelu do rzeczywistych wartości prędkości uzyskuje się poprzez współczynniki kalibracji. Przykładowe rozkłady współczynnika wzorcowania wzdłuż średnicy rury dla $Re=470000$ przedstawiono na rysunku 2. Można zauważyć, że w zależności od wybranego modelu w różny sposób zmienia się wartość tego współczynnika z promieniem rury. Przy czym w okolicy średnicy rury dla wszystkich modeli współczynnik na wartość mniejszą od jedności, a na brzegach wartości są powyżej jedności.

W przepływomierzach próbkujących z jednym czujnikiem urządzenia pierwotnego zwykle umieszczany jest on w średnicy rury. Można zauważyć, że w okolicach średnicy rury zmiany współczynnika wzorcowania nie są duże, dlatego niedokładność montażu ze względu na zmianę współczynnika nie spowoduje istotnego błędu pomiarowego. W przypadku przepływomierzy wielodrogowych, w których stosuje się kilka urządzeń pierwotnych mierzących prędkość w płaszczyznach nie pokrywających się z osią przewodu, niedokładność ustawienia położenia w sposób istotny zmienia wartości współczynnika wzorcowania w płaszczyznach zbliżonych do ścianki, co można zaobserwować na rysunku 2. Jednak nie jest to obserwowane jednakowo dla wszystkich modeli. W modelu Prandtla w najmniejszym stopniu obserwowana jest zależność współczynnika wzorcowania od promienia rury, co wynika z najlepszego odwzorowania modelem Prandtla rzeczywistego profilu prędkości uzyskanego w doświadczeniu.

Wnioski

Opracowano wiele modeli matematycznych opisujących profile prędkości w przepływie turbulentnym. Spośród

przebadanych w pracy modeli najlepiej opisał profil rzeczywisty model Prandtla. Nie oznacza to jednak, że jest to jeden jedyny model, który powinno się stosować. W zależności od staranności doboru współczynników modeli można uzyskać również dobre dopasowanie.



Rys. 2. Współczynniki wzorcowania: k1-model uniwersalny, k2-model trójskładnikowy, k3-model Prandtla

Dokładność dopasowania modelu matematycznego do rzeczywistego profilu ma bardzo duży wpływ na współczynnik wzorcowania i rozkład jego wartości wzdłuż średnicy rury. Im dokładniejsze odwzorowanie profilu tym mniejsza zmiana wartości współczynnika wzorcowania.

Autorzy: dr hab. inż. Artur Andruszkiewicz, Politechnika Wroclawska, Wydział Mechaniczno-Energetyczny, Katedra Termodynamiki, Teorii Maszyn i Urządzeń Ciepłych, wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, e-mail: artur.andruszkiewicz@pwr.edu.pl; dr inż. Wiesław Wędrychowicz, Politechnika Wroclawska, Wydział Mechaniczno-Energetyczny, Katedra Termodynamiki, Teorii Maszyn i Urządzeń Ciepłych, wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, e-mail: wieslaw.wedrychowicz@pwr.edu.pl; mgr inż. Piotr Synowiec, Politechnika Wroclawska, Wydział Mechaniczno-Energetyczny, Katedra Termodynamiki, Teorii Maszyn i Urządzeń Ciepłych, wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, e-mail: piotr.synowiec@pwr.edu.pl; mgr inż. Piotr Piechota, Politechnika Wroclawska, Wydział Mechaniczno-Energetyczny, Katedra Termodynamiki, Teorii Maszyn i Urządzeń Ciepłych, wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, e-mail: piotr.piechota@pwr.edu.pl.

LITERATURA

- [1] Flow Handbook, A Practical Guide: Measurement technologies – Applications – Solutions, Endress+Hauser Flowtec AG, CH-4153 Reinach/BL, 2004
- [2] Strohmarmann G., atp-Markanalyse *Durchfluss und Mengenmesstechnik Automatisierungstechnische Praxis* 36, (1994), nr 8, 38-55
- [3] Waluś S.: Optymalizacja metrologiczna pomiaru strumienia płynu za pomocą przepływomierzy próbkujących, Monografia 43, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2003
- [4] Bukowski J.: Mechanika płynów, PWN, Warszawa 1975
- [5] Gryboś R.: Podstawy mechaniki płynów, PWN, Wa-wa 1989
- [6] Waluś S.: Pomiar strumienia objętości w rurociągu niepełnym przepływomierzem ultradźwiękowym z równoczesnym pomiarem poziomym. VII Krajowa Konferencja Metrologii i Aparatury Pomiarowej, Wrocław, Prace Naukowe Instytutu Metrologii Elektrycznej PWr, seria: Konferencje 12, 92-95
- [7] Waluś S.: Ultradźwiękowe pomiary strumienia objętości wody w rurociągach i kanałach otwartych, Politechnika Śląska, Zeszyty naukowe nr 1075, Automatyka z. 99, Gliwice 1990
- [8] Daugherty R.L., Franzini J.B.: Fluid Mechanics with engineering applications, Mc Graw-Hill Book Company, New York 1977
- [9] Domagała P.: Pomiar pola prędkości za pomocą termoanemometru, www.imc.pcz.czest.pl/instytut/pl/3/3.8/materialy/ee/ee_06.pdf