

Analiza właściwości magnetycznych cienkowarstwowych materiałów z przewodzącą strukturą periodyczną

Streszczenie. W pracy zaproponowano wykorzystanie metody różnic skończonych i całkowego sformułowania pola wektorowego do obliczeń rozkładu pola magnetycznego w cienkowarstwowych strukturach, formujących niejednorodne warstwy materiałów laminarnych. Zaprezentowano przykładowe geometrie elementów periodycznych, które obliczono przy wykorzystaniu metod elementów i różnic skończonych, a także określono ich indukcyjność. Scharakteryzowano dokładność proponowanego modelu różnicowo-całkowego 2D w odniesieniu do różniczkowego modelu 3D.

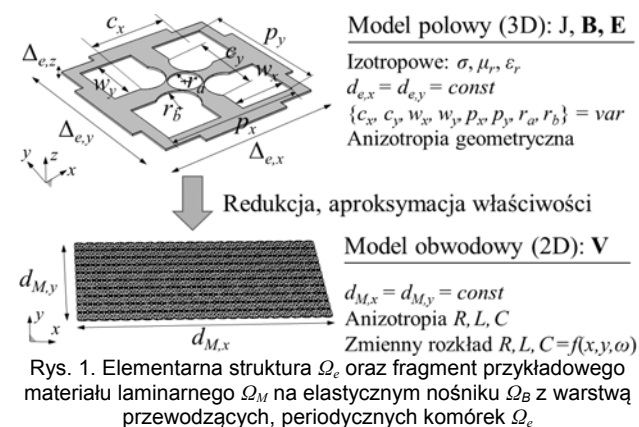
Abstract. The paper demonstrates the application of the finite-difference method combined with integral vector field formulation to calculate the magnetic field distribution in thin-film structures, which form nonhomogeneous layers of the laminar materials. An exemplar geometries of periodic elements were presented and solved both by the finite-element and finite-difference method, to estimate elements self-inductance. The accuracy of the proposed difference-integral 2D model in relation to differential 3D model were characterized. (**Analysis of the magnetic properties of the thin-film materials with a conductive periodic structure**).

Słowa kluczowe: struktury periodyczne, indukcyjność własna, pole magnetyczne, analiza numeryczna.

Keywords: periodic structures, self-inductance, magnetic field, numerical analysis.

Wstęp

W XXI wieku znaczącą rolę odgrywają inteligentne materiały o dobieranych, nietypowych właściwościach. Opracowanie metamateriałów dających szerokie możliwości formowania rozkładu pola elektromagnetycznego [4], czy struktur fraktalnych, wykorzystywanych do tworzenia planarnych cewek drukowanych [3, 7], otworzyły drogę do badań nad materiałami o szerokim zastosowaniu. Materiały te charakteryzują się m.in. złożoną budową, powtarzalnym rozkładem komórek formujących materiał i możliwością kształtowania właściwości na poziomie periodycznie rozłożonych struktur elementarnych [1, 3, 4].



Jedną z proponowanych grup materiałów o strukturze periodycznej są kompozyty laminarne [2, 9], składające się z warstw ciągłych i co najmniej jednej warstwy porowatej (rys. 1). Rozkład komórek (elementów Ω_e) na dwuwymiarowej płaszczyźnie, dowolnie usytuowanej w przestrzeni, determinuje - wraz z ich geometrią i wzajemnym układem połączeń - wypadkowe cechy materiału Ω_M [1]. W takim układzie, podłoże nieprzewodzące Ω_B , na której warstwa periodyczna jest osadzona, pełni rolę bazy (lepszca) nadającej także elastyczność i zwiększając odporność mechaniczną. Kształtowanie cech, np. elektrycznych (rezystancja) [9], magnetycznych układu (indukcyjność) [7], termicznych [2] (efektywna przewodność cieplna) odbywa się w pierwszej kolejności na poziomie elementów Ω_e , często z pominięciem modelowania bazy Ω_B , co upraszcza analizę.

W pracy scharakteryzowano właściwości magnetyczne przykładowych komórek, tworzących materiały laminarne z przewodzącymi warstwami periodycznymi. Ocenie poddano możliwości wyznaczania ich zastępczej indukcyjności w oparciu o metodę elementów skończonych (MES) i metodę różnic skończonych (MRS). Przeprowadzono badania numerycznego modelu 3D elementu Ω_e i ekwiwalentnego, cienkowarstwowego modelu 2D. Rozwiązywane zagadnienie stacjonarnego pola elektrycznego i magnetycznego w obrębie geometrii elementu, umożliwiło wyznaczenie rozkładu wektorowego potencjału magnetycznego w strukturze, a na tej podstawie - zastępczej indukcyjności, przy uwzględnieniu sprzężeń magnetycznych w obrębie elementu.

Opis i metodyka rozwiązywania zagadnienia połowego

Wynikowe parametry obwodowe struktur są skupionym odzwierciedleniem rozkładu pola elektrycznego i magnetycznego w ich obrębie. W stacjonarnym lub wolnozmiennym polu elektromagnetycznym, to przede wszystkim droga i gęstość prądu elektrycznego determinują rezystancję oraz indukcyjność przewodzącego, niemagnetycznego elementu Ω_e . Wobec tego oszacowanie parametrów jego schematu zastępczego może zostać przeprowadzone, np. w oparciu o rezultaty obliczeń numerycznych pola elektrycznego i magnetycznego, na podstawie których wyznaczany jest m.in. rozkład gęstości prądu, czy wektorowego potencjału magnetycznego.

Skalarne, wolnozmiennie pole elektryczne $V = V(x, y, z)$ opisuje jednorodne równanie Laplace'a

$$(1) \quad \nabla \cdot [-\sigma(x, y, z) \nabla V(x, y, z)] = 0,$$

które w układzie Ω_M uwzględnia niejednorodny, lecz również periodyczny rozkład przestrzenny przewodności elektrycznej $\sigma = \sigma(x, y, z)$. Ponieważ szybkość zmian pola jest pomijalna, zaś lepszca odznacza się właściwościami izolacyjnymi ($\sigma_B \approx 0$), uzasadnione jest pominięcie w obliczeniach warstwy bazowej Ω_B . Wtedy gęstość prądu $\mathbf{J}_e = \mathbf{J}_e(x, y, z)$ wyznacza jest tylko dla warstwy złożonej z Ω_e

$$(2) \quad \mathbf{J}_e = -\sigma \nabla V.$$

Pole elektryczne (1) jest polem stacjonarnym lub quasi-stacjonarnym potencjalnym, bezwirowym. Możliwe uproszczenie analizy z trzech do dwóch wymiarów

uzasadnia założenie, że lokalnie, w obrębie elementu Ω_e (z wyłączeniem jego brzegów), spełniony jest warunek

$$(3) \quad \frac{d}{dz} \mathbf{J}_e \approx 0.$$

Jednak podobne twierdzenie, w odniesieniu do wirującego w każdej z trzech płaszczyzn pola magnetycznego, nie jest słuszne. Opis pola za pomocą potencjału wektorowego $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z)$, zdefiniowanego jako $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, dany jest równaniem Poisson'a [8]

$$(4) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}_e,$$

przy czym z założenia elementy przewodzące i otoczenie są niemagnetyczne, toteż przenikalność magnetyczna μ_0 jest stała w całym obszarze. Rozwiązanie równań (1) i (4), które uzyskano za pomocą Metody Elementów Skończonych (MES), musi być zatem zawsze otrzymane w przestrzeni 3D, z uwzględnieniem otoczenia (powietrze) oraz rozproszonych źródeł pola magnetycznego (\mathbf{J}_e) [8].

Magnetyczny model cienkowarstwowy

Ponieważ komórki elementarne Ω_e są strukturami cienkowarstwowymi ($d_{e,z} \ll d_{e,x} \vee d_{e,y}$), to słuszne jest wykorzystanie modeli elektromagnetycznych, opisujących cienkie taśmy przewodzące (ang. *thin film*) i sprowadzenie obliczeń pola magnetycznego do prostszego zagadnienia 2D. Takie podejście zaprezentowano m.in. w [5, 6], określając indukcyjność przewodnika o przekroju prostokątnym, stosując całkowity opis \mathbf{A} w obszarze v

$$(5) \quad \mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{J}_e(r')}{\rho} dv,$$

gdzie: $r = r(x,y,z)$ jest punktem obserwacji, $r' = r'(x',y',z')$ punktem źródłowym, a dystans między nimi

$$(6) \quad \rho = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}.$$

Zwróćmy uwagę, iż pominięcie całkowania po zmiennej z w (5) oznacza obliczenie lokalnego rozkładu \mathbf{A} , na podstawie również lokalnego rozkładu \mathbf{J}_e , w obszarze o pomijalnej wysokości $d_{e,z}$. Wtedy w (6) czynnik $(z'-z)^2 = 0$, a (5) można przy założeniu (3) przekształcić do

$$(7) \quad \mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} d_{e,z} \iint \frac{\mathbf{J}_e(r')}{\rho} dx' dy',$$

który opisuje rozkład \mathbf{A} na ograniczonej płaszczyźnie xy .

Stosując do rozwiązania (1) metodę różnic skończonych (MRS) można dla znanej siatki prostokątnej o kroku $\Delta x = \Delta y = h$ i warunków brzegowych, wyznaczyć rozkład wartości wektora \mathbf{J}_e w płaszczyźnie xy z równania (2). Jego znajomość oraz określenie dla każdego z punktów obserwacji i źródłowych dystansu (6), stanowi podstawę do wyznaczenia \mathbf{A} , poprzez zastąpienie całki podwójnej w (7) kwadraturą numeryczną, np. schematem prostokątów. Tym sposobem, metodą różnic skończonych (pole elektryczne) i całkową cienkowarstwową (pole magnetyczne), obliczono stacjonarne pole elektromagnetyczne elementu Ω_e .

Następnie wykorzystując polową (8a) i obwodową (8b) definicję zgromadzonej w układzie energii magnetycznej W_m

$$(8a) \quad W_m = \frac{1}{2} d_{e,z} \iint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_e) dx dy,$$

$$(8b) \quad W_m = \frac{1}{2} LI^2,$$

a także obliczając z MRS natężenie prądu I płynącego przez komórkę Ω_e , znajdowana jest jej indukcyjność zastępcza L . Porównując stronami (8a) i (8b) otrzymuje się

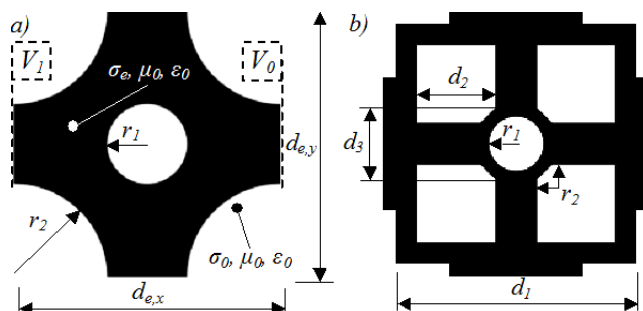
$$(9) \quad L = \frac{d_{e,z} \iint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_e) dx dy}{I^2}.$$

W dalszej części dla przykładowych elementów Ω_e porównano i omówiono wyniki obliczeń pola magnetycznego, uzyskane za pomocą dwóch metod:

- metody elementów skończonych w przestrzeni 3D (MES),
- metody różnic skończonych w przestrzeni 2D z całkowym, cienkowarstwowym sformułowaniem \mathbf{A} (nazywaną w skrócie metodą różnicowo-całkową MR-C).

Analizowany model elementu przewodzącego

Powtarzalny układ Ω_e decyduje o właściwościach elektromagnetycznych materiału Ω_M . Problem ich określenia sprowadza się do analizy pojedynczego elementu. Nieprzewodzące podłoże Ω_B nie bierze bezpośredniego udziału w kształtowaniu rozprzysywu prądu w obrębie komórki, ani pośredniego przez zakładane, wolnozmiennne pole magnetyczne. Dlatego zastępcze parametry można określić wyłącznie na podstawie analizy pól w obrębie struktury Ω_e .



Rys. 2. Geometria analizowanych komórek Ω_e formujących warstwę przewodzącą: a) element "porowaty"; b) element "fraktalny"

Budowa komórek „porowatych” (rys. 2a) modyfikowana jest przez ubytek przewodnika w centralnym obszarze o promieniu r_1 , zaś wycięcia wierzchołków poprzez parametr r_2 . W strukturze na bazie anteny fraktalnej (rys. 2b) - oprócz centralnego ubytku o promieniu r_1 i prostego ścięcia wierzchołków r_2 - zmianie podlega szerokość kwadratowej ramy fraktala o boku d_1 , jego wewnętrznych wycięć d_2 oraz szerokość d_3 określająca rozmiar środkowego obszaru przewodzącego. Założono stałe wymiary zewnętrzne $d_{e,x} = d_{e,y} = 10$ mm i $d_{e,z} = 0,105$ mm oraz jednorodne wartości przenikalności elektrycznej (ϵ_0) i magnetycznej (μ_0) w obszarze komórki i otoczenia. Przewodność elektryczna struktury elementu odpowiadała miedzi o $\sigma_e = 5,6 \cdot 10^7$ S/m, a obszary wycięć przyjęto jako nieprzewodzące ($\sigma_0 = 0$ S/m).

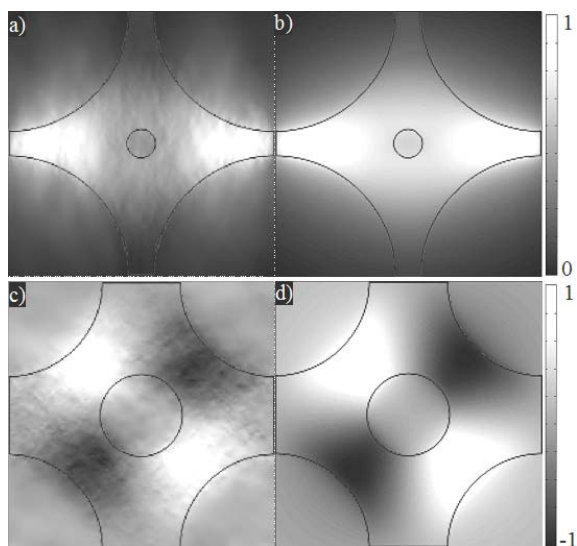
Tabela 1. Parametry geometryczne elementów w [mm]

Nr	Porowaty		Fraktalny				
	r_1	r_2	d_1	d_2	d_3	r_1	r_2
1	0,5	4,5	9,0	1,50	4	2,00	1,25
2	1,5	3,5	5,5	4,50	3	1,00	1,00
3	2,5	2,5	9,5	4,75	1	0,35	0,35
4	3,5	1,5	9,0	4,38	3	0,68	0,75
5	4,5	0,5	9,0	4,00	2	1,00	0,50

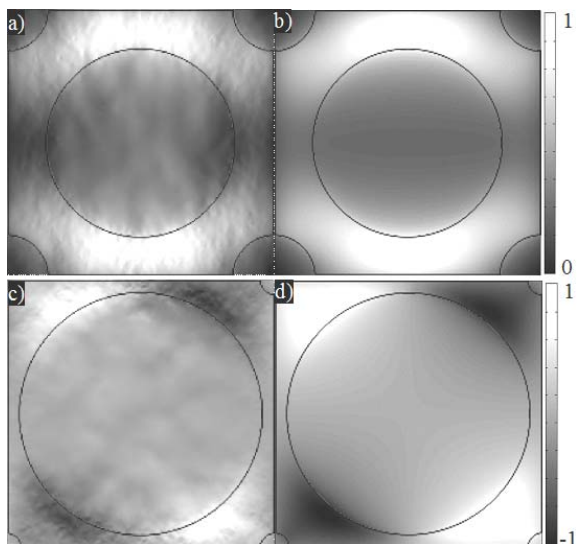
Rozkład pola magnetycznego w strukturze

Analizę rozkładu pola magnetycznego, wyrażanego wektorowym potencjałem magnetycznym \mathbf{A} , przeprowadzono dla 5-ciu wersji komórek „porowatych” i „fraktalnych” o różnych parametrach geometrycznych (tab. 1). Obliczenia wykonano za pomocą MES w modelu 3D (uwzględniającym kształt, grubość i otoczenie komórki)

oraz przy zastosowaniu MR-C, którym rozwiązano model cienkowarstwowy 2D, obejmujący jedynie obszar elementu w płaszczyźnie xy z pominięciem jego grubości ($d_{e,z} \rightarrow 0$).

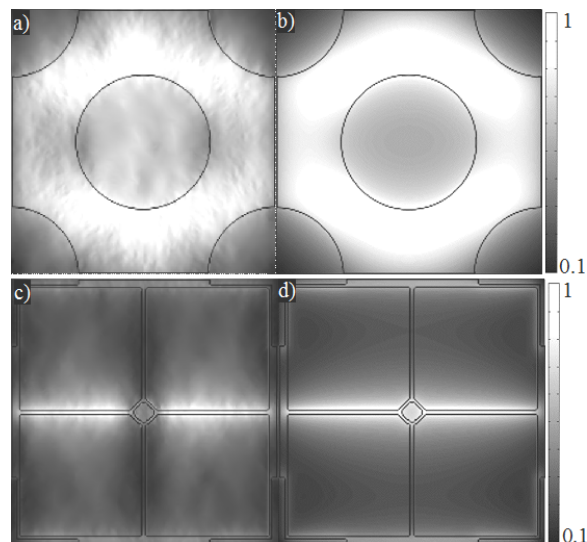


Rys. 3. Element porowaty - względna wartość składowej A_x wariantu nr 1 a) wyniki MES, b) wyniki MR-C; względna wartość składowej A_y , wariantu nr 2: c) wyniki MES; d) wyniki MR-C

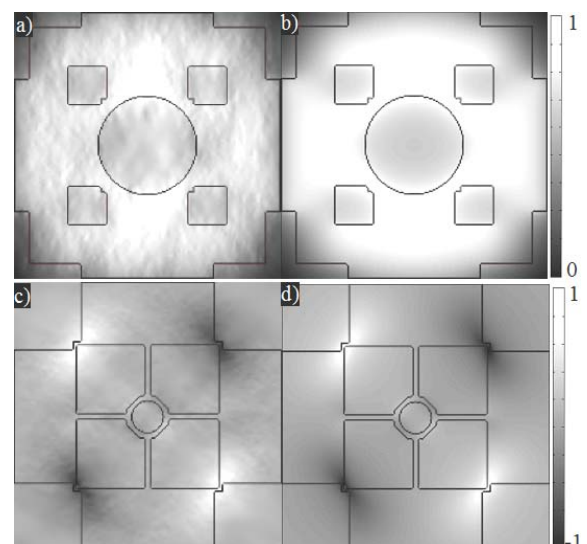


Rys. 4. Element porowaty - względna wartość składowej A_x wariantu nr 4 a) wyniki MES, b) wyniki MR-C; względna wartość składowej A_y , wariantu nr 5: c) wyniki MES; d) wyniki MR-C

Rozkłady składowych wektora \mathbf{A} , przedstawiane są na wysokości $h_{xy} = d_{e,z}/2$ w płaszczyźnie xy . Obliczenia pola magnetycznego za pomocą MR-C skutkują znalezieniem identycznego rozkładu, jak w modelu 3D, zarówno składowej A_x (rys. 3a,3b i rys. 4a,4b) i A_y (rys. 3c,3d i rys. 4c,4d) w obszarze komórki. Zauważalne różnice wynikają w dużej mierze ze sposobów dyskretyzacji obszaru i interpolacji funkcji wynikowej. Przy dużych r_2 "wycinających" wierzchołki elementu, składowa A_x (rys. 3a,3b) osiąga największe wartości w miejscu przyłączenia elektrod zasilających. Trend odwraca się, gdy $r_1 > r_2$ i wtedy pole koncentruje się przy dwóch poziomych krawędziach (rys. 4a,4b). Przesunięcie rozkładu A_x wskutek zmiany geometrii, nie rzutuje na charakter rozkładu A_y - w każdym wariancie (rys. 3c, 4d) zachowano symetrię rozmieszczenia skrajnych wartości tej składowej względem przekątnej komórki. Zmianie ulega jedynie przestrzenne przesunięcie obszarów z max. i min. wartościami A_y .

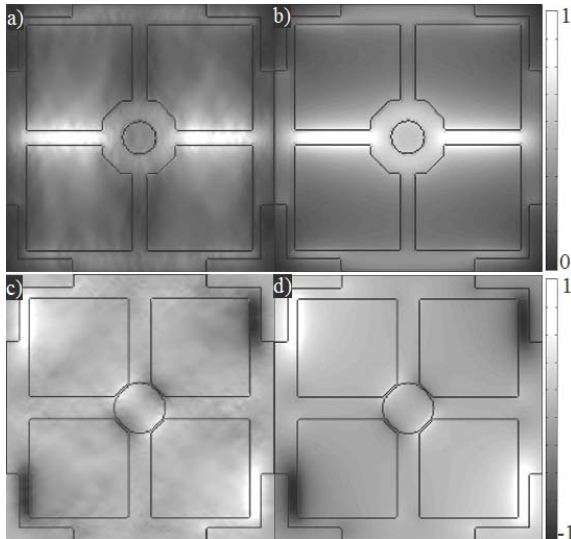


Rys. 5. Względna wartość modułu A dla wariantów nr 3 elementu: porowatego a) wyniki MES, b) wyniki MR-C; fraktalnego c) wyniki MES; d) wyniki MR-C



Rys. 6. Element fraktalny - względna wartość składowej A_x wariantu nr 1 a) wyniki MES, b) wyniki MR-C; względna wartość składowej A_y , wariantu nr 2: c) wyniki MES; d) wyniki MR-C

Zgodność między obliczeniami A_x i A_y przekłada się bezpośrednio na poprawność określenia wartości oraz rozkładu modułu wektora \mathbf{A} , w każdym analizowanym wariancie i geometrii (np. rys. 5). Wynikami otrzymane po zastosowaniu modelu 2D (MR-C) dla prostszej geometrii porowatej oraz bardziej złożonej fraktalnej (rys. 6b,6d i rys. 7b,7d), zgadzały się z modelem 3D (MES). Uproszczenie zagadnienia do analizy 2D nie przełożyło się na istotne błędy, np. MR-C uwzględniła znaczącą, bliską maksymalnej wartość A_x przy krawędziach centralnego wycięcia wariantu fraktalnego nr 1 (rys. 6b), czy też w miejscach przewężeń struktury wariantu nr 5 (rys. 7c i 7d), gdzie obie metody wykazały lokalny wzrost wartości składowej A_y . Podobnie jak w przypadku elementów porowatych, rozkład tej składowej nie zmienił się, ulegając jedynie deformacji wraz z deformowaniem struktury wewnętrznej komórki. Jednak składowa A_x jest już inaczej rozmieszczona w przestrzeni. Przykładem jest wariant nr 4 (rys. 7a,7b) - widać wyraźne zagęszczenie wektorowego potencjału magnetycznego w centralnym obszarze ścieżek przewodzących, a nie w obszarach krawędzi komórki (jak miało to miejsce przy strukturze porowatej), co skutecznie wyznaczyła zarówno MES, jak i MR-C.

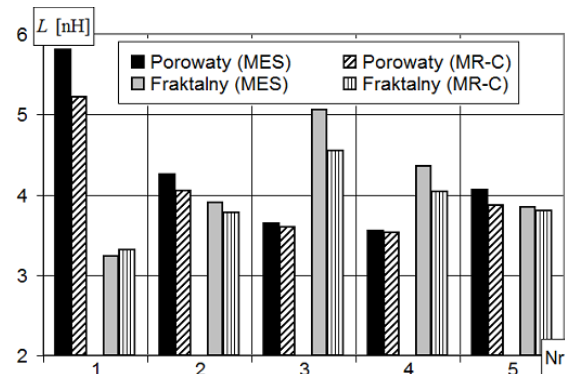


Rys. 7. Element fraktalny - względna wartość składowej A_x , wariantu nr 4 a) wyniki MES, b) wyniki MR-C; względna wartość składowej A_y , wariantu nr 5: c) wyniki MES; d) wyniki MR-C

Zastosowanie MR-C w nawet najbardziej złożonym geometrycznie przypadku, umożliwia poprawne określenie rozkładu A , gdy grubość $d_{e,z}$ jest skończona i $d_{e,z} \ll d_{e,x} \wedge d_{e,y}$.

Indukcyjność zastępcza elementów

Rozpatrywane konstrukcje elementów charakteryzują się pewnymi skupionymi parametrami obwodowymi. Korzystając z (9), na podstawie rozkładu gęstości prądu i pola magnetycznego, wyznaczyć można, np. zastępczą indukcyjność własną L komórki.



Rys. 8. Obliczone indukcyjności własne rozpatrywanych elementów

Obliczenia przeprowadzone przy użyciu MR-C są uproszczeniem rzeczywistego modelu 3D elementu Ω_e , rozwiązywanego za pomocą MES, a mimo to cechują się dużą zgodnością wyników (rys. 8). Porównując otrzymane wartości można zauważyć, że maksymalna rozbieżność między MR-C a MES wyniosła 10% (wariant nr 3 elementu fraktalnego), ale w dwóch przypadkach spadła do ok. 1% (np. wariant nr 4 elementu porowatego). Średnia wartość tej różnicy dla obu geometrii, to 4,29% i 4,85% odpowiednio dla komórki o strukturze porowatej i fraktalnej. W niemal każdym przypadku indukcyjność obliczona MR-C była mniejsza od wyznaczonej MES. W analizowanych wariantach zauważalny jest też trend zmian indukcyjności w funkcji parametrów geometrycznych, np. spadek indukcyjności od wariantu nr 1 do 4 elementu porowatego. Trend ten uchwyciony został także przez algorytm MR-C.

Wartości indukcyjności elementów zawierają się w zakresie 3 ÷ 6 nH. Ponieważ indukcyjność jednolitej płytki przewodzącej o wymiarach $d_{e,x} \times d_{e,y} \times d_{e,z}$ to ok. 2,8 nH (na podstawie zależności z [6]), analizowane geometrie

komórek wskazują na możliwość zwiększenia indukcyjności nawet dwukrotnie (lub jej dobór w podanym zakresie), jedynie wskutek modyfikacji geometrii wewnętrznej komórek, a więc regulacji parametrów r_1, r_2, d_1, d_2, d_3 .

Podsumowanie

Zaproponowano numeryczny, cienkowarstwowy model elektromagnetyczny struktur periodycznych, formujących dwuwymiarowe warstwy przewodzące materiałów laminarnych. Przedstawiono równania opisujące rozkład pola magnetycznego i indukcyjność własną komórek z regulowaną geometrią. Rozwiązania postawionych problemów uzyskano za pomocą MES i metody różnicowej całkowej (MR-C). Scharakteryzowano rezultaty obliczeń otrzymane po zastosowaniu obu metod. Analizie poddano rozkład wektorowego potencjału magnetycznego i zastępczą indukcyjność dwóch geometrii komórek o różnych parametrach. Porównano dokładność MR-C w odniesieniu do MES, zidentyfikowano różnice w obu modelach 2D i 3D.

Otrzymane wyniki wskazują na precyzyjne odwzorowanie, przez model rozwiązywany MR-C, rozkładu składowych wektorowego potencjału magnetycznego w obrębie analizowanych elementów. Kosztem dokładności, metoda MR-C umożliwia sprowadzenie analizy pola magnetycznego do ograniczonej rozmiarami elementu, prostokątnej przestrzeni 2D, tym samym znacząco redukując stopień złożoności modelu oraz jego warunków brzegowych. Z kolei rozbieżności w wartościach indukcyjności, wyznaczonej na podstawie wyników z MES i MR-C, wynoszą średnio ok. 4,5%. Największe indukcyjności własne zaobserwowano dla geometrii o najcieńszych ścieżkach. Sformułowanie połowe problemu umożliwia także uwzględnienie sprzężeń indukcyjnych w obrębie elementu, które ze względu na jego rozmiary zewnętrzne, wpłyną na zastępczą indukcyjność.

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr MB/WE/5/2018 i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

Autorzy: mgr inż. Adam Steckiewicz, dr hab. inż. Bogusław Butryło, Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny, ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok, E-mail: a.steckiewicz@doktoranci.pb.edu.pl; b.butrylo@pb.edu.pl

LITERATURA

- [1] Abramovich H., Intelligent Materials and Structures, De Gruyter (2016)
- [2] Butryło B., Steckiewicz A., Ocena termicznych właściwości dynamicznych materiałów warstwowych ze strukturą periodyczną, *Przegląd Elektrotechniczny*, 93 (2017), nr 3, s. 162-166
- [3] Lazarus N., Meyer D. C., Bedair S.S., Fractal Inductors, *IEEE Transactions On Magnetics* (2014), t. 50, nr. 4
- [4] Lovat G., Burghignoli P., Celozzi S., Shielding Properties of a Wire-Medium Screen, *IEEE Transactions On Electromagnetic Compatibility* (2008), t. 50, nr. 1
- [5] Piątek Z., Baron B., Exact closed form formula for self inductance of conductor of rectangular cross section, *Progress in Electromagnetics Research M* (2012), t. 26, s. 225-236
- [6] Piątek Z., Baron B., Szczegielniak T., Kusiak D., Pasierbek A., Self inductance of long conductor of rectangular cross section, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr. 8, s. 323-326
- [7] Shoute G., Barlage W. D., Bedair S.S., Fractal Loop Inductors, *IEEE Transactions On Magnetics* (2015), t. 51, nr. 6
- [8] Sikora J., Numeryczne metody rozwiązywania zagadnień brzegowych, Politechnika Lubelska (2011)
- [9] Steckiewicz A., Butryło B., An application of PSO algorithm for multi-criteria geometry optimization of printed low-pass filters based on conductive periodic structures, *Proc. SPIE Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High Energy Physics Experiments* (2017), t. 10445