

doi:10.15199/48.2019.05.41

# Wpływ kwantowania współczynników na działanie filtru Gaussa dla realizacji bezpośredniej i ortogonalnej (rotatory Givensa)

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono dwie realizacje filtru Gaussa 1D. Pierwsza oparta jest na bezpośredniej implementacji splotu, druga bazuje na filtrze ortogonalnym realizowanym za pomocą rotatorów Givensa. Obie realizacje zostały przeanalizowane pod kątem wrażliwości na kwantowanie współczynników dla 8-, 16- i 24-bitowych rejestrów. Wyznaczono i porównano błędy średniokwadratowe charakterystyki amplitudowej oraz błędy dla odpowiedzi systemu na pobudzenie losowym szumem i deltą Kroneckera.

**Abstract.** In the paper, two realizations of 1D Gauss filter are presented. The first realization is based on direct structure with convolution, in the second orthogonal filter with use Givens rotations is realized. Both systems are analyzed of sensitivity on coefficient quantization for 8-, 16- and 24-bits length of register. Also determined mean squared errors for amplitude characteristics, impulse responses and responses on noise excitation. (Coefficient quantization effect for Gauss filter for direct and orthogonal (Givens rotations) realization).

**Słowa kluczowe:** filtr Gaussa, splot, filtr ortogonalny, rotator Givensa, kwantowanie współczynników.

**Keywords:** Gauss filter, convolution, orthogonal filter, Givens rotation, coefficients quantization.

## Wstęp

Powszechnie spotykane są różne systemy cyfrowego przetwarzania sygnałów (CPS) [1] mające na celu np. filtrowanie danych. Jednym z najczęściej stosowanych systemów o skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR) jest filtr Gaussa, a kluczowe przy implementacji jest uwzględnienie skończonej precyzji zapisu współczynników [2]. Ma to bezpośredni wpływ m.in. na charakterystykę częstotliwościową. W niniejszym artykule przedstawiono wpływ kwantowania współczynników w dwóch realizacjach jednowymiarowego (1D) filtru Gaussa. Pierwsza, wykorzystuje bezpośrednią implementację splotu. Druga, bazuje na ortogonalnym filtrze Gaussa realizowanym za pomocą rotatorów Givensa. Dla obu struktur wykonane zostały pomiary wybranych parametrów, które pozwalają określić wrażliwość na kwantowanie współczynników. Jako środowisko symulacyjne zastosowano oprogramowanie Scilab [3], umożliwiające jednocześnie precyzyjną analizę danych.

## Realizowane struktury

Transmitancja dowolnego systemu dyskretnego 1D o skończonej odpowiedzi impulsowej może być przedstawiona następująco [1]:

$$(1) \quad H(z) = \sum_{i=0}^n b(i)z^{-i}$$

gdzie:  $b(i)$  - odpowiedź impulsowa systemu,  $n$  - stopień filtru (transmitancji).

Do realizacji wybrano filtr stopnia  $n=6$  o odpowiedzi impulsowej przedstawionej w tabeli 1.

Tabela 1. Odpowiedź impulsowa filtru Gaussa 1D

Współczynnik	Wartość
$b(0)$	0,04491017964071856
$b(1)$	0,11976047904191617
$b(2)$	0,20958083832335328
$b(3)$	0,25149700598802394
$b(4)$	0,20958083832335328
$b(5)$	0,11976047904191617
$b(6)$	0,04491017964071856

Przedstawiony filtr spełnia warunek:

$$(2) \quad \left| H(e^{j\omega}) \right| = \left| \sum_{i=0}^6 b(i)e^{-j\omega i} \right| \leq 1,$$

zgodnie z którym, filtr nie wzmacnia sygnału.

## Splot

Pierwszy z systemów realizuje bezpośrednio splot:

$$(3) \quad y(k) = \sum_{i=0}^6 b(i)x(k-i)$$

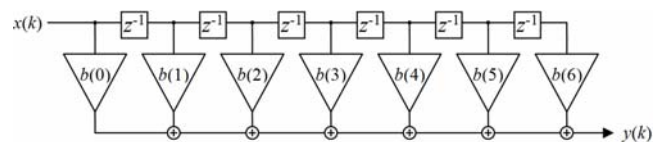
gdzie:

$b(i)$  - współczynniki systemu (odpowiedź impulsowa),

$x(k)$  - wejście systemu (pobudzenie),

$y(k)$  - wyjście systemu (odpowiedź).

Dla wykorzystanego filtru Gaussa struktura wykonująca splot przedstawiona jest na rysunku 1.



Rys.1. Struktura bezpośrednia filtru Gaussa 1D

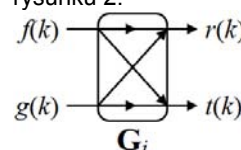
## Ortogonalny filtr rotatorowy

Realizacja filtru FIR 1D w oparciu o rotatory Givensa może zostać wykonana na podstawie [4] i [5]. Filtry rotatorowe to ortogonalne systemy bezstratne [2]. Rotatorem Givensa określamy układ wykonujący następującą operację:

$$(3) \quad \begin{bmatrix} r(k) \\ t(k) \end{bmatrix} = [\mathbf{G}_i] \begin{bmatrix} f(k) \\ g(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(k) \\ g(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i)f(k) - \sin(\alpha_i)g(k) \\ \sin(\alpha_i)f(k) + \cos(\alpha_i)g(k) \end{bmatrix}$$

gdzie:  $\cos(\alpha_i)$ ,  $\sin(\alpha_i)$  - współczynniki rotatora,  $f(k)$ ,  $g(k)$  - wejścia systemu,  $r(k)$ ,  $t(k)$  - wyjścia systemu.

Przyjęty i stosowany [2] symbol rotatora przedstawiono na rysunku 2.



Rys.2. Zastosowany symbol rotatora Givensa

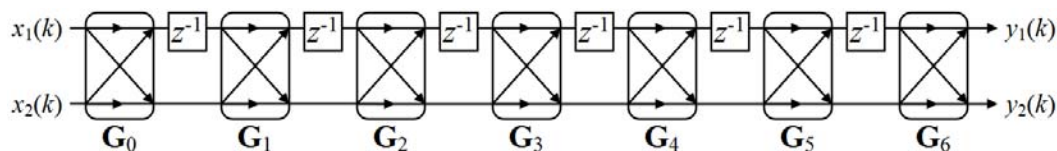
Dla wybranego filtra Gaussa w zastosowaniu 3D, synteza opisana jest również w [6]. Na rysunku 3 przedstawiona jest odpowiednia struktura, gdzie przez  $x_1(k)$  i  $x_2(k)$  oznaczono wejścia, a  $y_1(k)$  i  $y_2(k)$  to wyjścia systemu. Parametry poszczególnych rotatorów zebrano w tabeli 2.

Ponieważ jest to układ o dwóch wejściach i dwóch wyjściach, system zbudowany z sieci połączonych rotatorów (rys. 3) realizuje ogólną transmitancję:

$$(4) \quad \mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} H_1(z) & T_1(z) \\ H_2(z) & T_2(z) \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$H_1(z) = H(z),$$



Rys.3. Struktura rotatorowego filtra Gaussa 1D

Tabela 2. Parametry rotatorów dla ortogonalnego filtra Gaussa 1D wyznaczone przy podwójnej precyzji obliczeń.

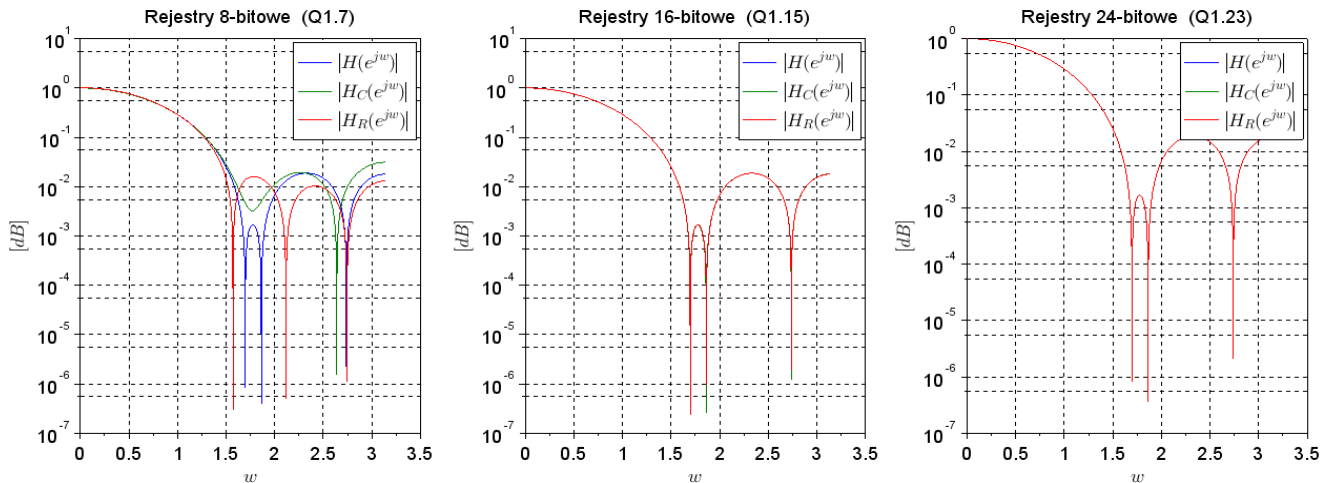
Rotator	Wartość		
	$\alpha_i$	$\cos(\alpha_i)$	$\sin(\alpha_i)$
$G_0$	$-93,282421^\circ$	$-0,05725772154510825$	$-0,99835943092829182$
$G_1$	$169,851161^\circ$	$-0,9843533389112288$	$0,17620585737799865$
$G_2$	$160,525091^\circ$	$-0,94278758410237018$	$0,33339401803634178$
$G_3$	$155,812340^\circ$	$-0,9122083824406112$	$0,40972657590774297$
$G_4$	$-19,474909^\circ$	$0,9427875841023754$	$-0,33339401803632673$
$G_5$	$-10,148839^\circ$	$0,9843533389112256$	$-0,17620585737801639$
$G_6$	$-3,282421^\circ$	$0,99835943092829227$	$-0,05725772154510368$

Tabela 3. Wartości poszczególnych współczynników po kwantowaniu

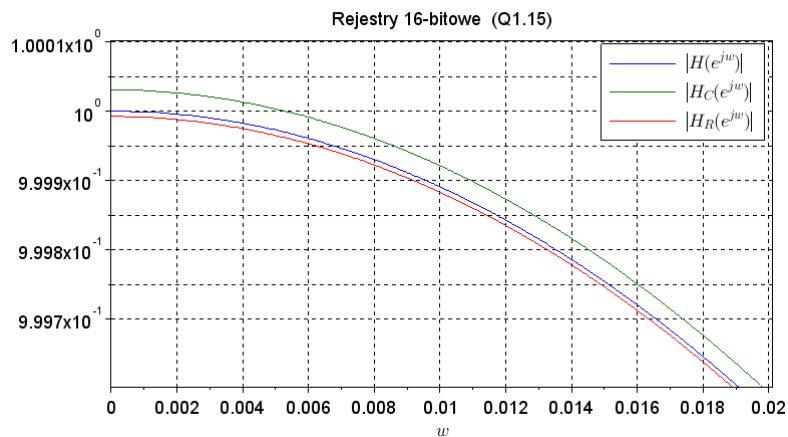
Przyjęta długość rejestrów	Wartości poszczególnych współczynników po kwantowaniu		
	Realizacja bezpośrednia	Realizacja rotatorowa	
8-bitów U2 Q1.7 (zakres wartości od -1 do $1-2^{-7}$ )	$b(0) = 0,046875$ $b(1) = 0,1171875$ $b(2) = 0,2109375$ $b(3) = 0,25$ $b(4) = 0,2109375$ $b(5) = 0,1171875$ $b(6) = 0,046875$	$\cos(\alpha_0) = -0,0546875$ $\cos(\alpha_1) = -0,984375$ $\cos(\alpha_2) = -0,9453125$ $\cos(\alpha_3) = -0,9140625$ $\cos(\alpha_4) = 0,9453125$ $\cos(\alpha_5) = 0,984375$ $\cos(\alpha_6) = 0,9921875$	$\sin(\alpha_0) = -1$ $\sin(\alpha_1) = 0,1796875$ $\sin(\alpha_2) = 0,3359375$ $\sin(\alpha_3) = 0,40625$ $\sin(\alpha_4) = -0,3359375$ $\sin(\alpha_5) = -0,1796875$ $\sin(\alpha_6) = -0,0546875$
16-bitów U2 Q1.15 (zakres wartości od -1 do $1-2^{-15}$ )	$b(0) = 0,044921875$ $b(1) = 0,1197509765625$ $b(2) = 0,2095947265625$ $b(3) = 0,251495361328125$ $b(4) = 0,2095947265625$ $b(5) = 0,1197509765625$ $b(6) = 0,044921875$	$\cos(\alpha_0) = -0,0572509765625$ $\cos(\alpha_1) = -0,984344482421875$ $\cos(\alpha_2) = -0,942779541015625$ $\cos(\alpha_3) = -0,912200927734375$ $\cos(\alpha_4) = 0,942779541015625$ $\cos(\alpha_5) = 0,984344482421875$ $\cos(\alpha_6) = 0,99835205078125$	$\sin(\alpha_0) = -0,99835205078125$ $\sin(\alpha_1) = 0,17620849609375$ $\sin(\alpha_2) = 0,333404541015625$ $\sin(\alpha_3) = 0,40972900390625$ $\sin(\alpha_4) = -0,333404541015625$ $\sin(\alpha_5) = -0,17620849609375$ $\sin(\alpha_6) = -0,0572509765625$
24-bity U2 Q1.23 (zakres wartości od -1 do $1-2^{-23}$ )	$b(0) = 0,04491019248962402$ $b(1) = 0,11976051330566406$ $b(2) = 0,20958077907562256$ $b(3) = 0,25149703025817871$ $b(4) = 0,20958077907562256$ $b(5) = 0,11976051330566406$ $b(6) = 0,04491019248962402$	$\cos(\alpha_0) = -0,05725777149200439$ $\cos(\alpha_1) = -0,98435330390930176$ $\cos(\alpha_2) = -0,9427875280380249$ $\cos(\alpha_3) = -0,9122084379196167$ $\cos(\alpha_4) = 0,9427875280380249$ $\cos(\alpha_5) = 0,98435330390930176$ $\cos(\alpha_6) = 0,99835944175720215$	$\sin(\alpha_0) = -0,99835944175720215$ $\sin(\alpha_1) = 0,17620587348937988$ $\sin(\alpha_2) = 0,33339405059814453$ $\sin(\alpha_3) = 0,40972661972045898$ $\sin(\alpha_4) = -0,33339405059814453$ $\sin(\alpha_5) = -0,17620587348937988$ $\sin(\alpha_6) = -0,05725777149200439$

Tabela 4. Błąd średniokwadratowy poszczególnych pomiarów implementowanych struktur

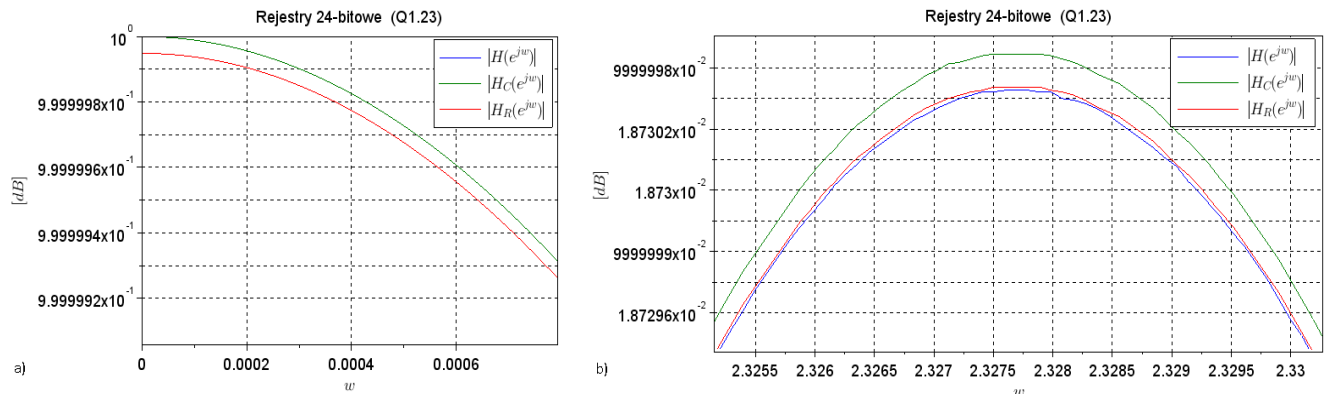
Przyjęta długość rejestrów	Wartości poszczególnych współczynników po kwantowaniu					
	Realizacja bezpośrednia			Realizacja rotatorowa		
	MSE odpowiedzi impulsowej	MSE charakterystyki amplitudowej	MSE odpowiedzi na pobudzenie szumem	MSE odpowiedzi impulsowej	MSE charakterystyki amplitudowej	MSE odpowiedzi na pobudzenie szumem
8-bitów U2 Q1.7 (zakres wartości od -1 do $1-2^{-7}$ )	<b>0,0000038</b>	<b>0,0000240</b>	<b>0,1459375</b>	0,0000082	0,0000440	0,3115468
16-bitów U2 Q1.15 (zakres wartości od -1 do $1-2^{-15}$ )	$1.204 \cdot 10^{-10}$	$8.261 \cdot 10^{-10}$	0,0000046	<b><math>6.583 \cdot 10^{-11}</math></b>	<b><math>4.690 \cdot 10^{-10}</math></b>	<b>0,0000025</b>
24-bity U2 Q1.23 (zakres wartości od -1 do $1-2^{-23}$ )	$1.470 \cdot 10^{-15}$	$1.015 \cdot 10^{-14}$	$5.590 \cdot 10^{-11}$	<b><math>9.434 \cdot 10^{-16}</math></b>	<b><math>6.543 \cdot 10^{-15}</math></b>	<b><math>3.578 \cdot 10^{-11}</math></b>



Rys. 4. Charakterystyki amplitudowe poszczególnych realizacji danego filtra Gaussa 1D



Rys. 5. Charakterystyki amplitudowe dla wybranego zakresu  $\omega$  przy 16-bitowym kwantowaniu współczynników



Rys. 6. Charakterystyki amplitudowe dla wybranego zakresu  $\omega$  przy 24-bitowym kwantowaniu współczynników

### Kwantowanie współczynników

Kwantowaniem określamy proces stratnej konwersji próbek sygnału do zadanego formatu zapisu liczb cyfrowych (stałopozycyjny lub zmiennopozycyjny) dla skończonej długości rejestrów. Na potrzeby niniejszych analiz założono kwantowanie przez zaokrąglenie współczynników do formatu stałopozycyjnego 8-, 16- i 24-bitowego. Zastosowano zapis ze znakiem w systemie U2 z formatowaniem Q1.7, Q1.15 oraz Q1.23 (jeden bit całkowity i odpowiednio 7-, 15- i 23-bity ułamkowe. Szczegóły dotyczące dokładności poszczególnych kwantowań oraz wartości współczynników obu struktur przedstawiono w tabeli 3.

### Pomiary

Obie przedstawione realizacje filtra Gaussa 1D zostały

zaimplementowane symulacyjnie w środowisku Scilab [3]. Następnie wprowadzono skwantowane współczynniki do poszczególnych realizacji i przetworzono dwa sygnały, pobudzenie impulsowe oraz losowy szum o rozkładzie równomiernym i liczbie próbek  $2^{18}$ . Wyznaczone zostały odpowiedzi i charakterystyki amplitudowe poszczególnych realizacji filtra. Następnie porównano otrzymane dane z wartościami wzorcowymi, wyznaczonymi z odpowiedzi filtra zrealizowanego na pełnej dostępnej precyzji. Ze zmierzonych wartości obliczono błąd średniokwadratowy (MSE, ang. Mean Squared Error):

$$(4) \quad MSE = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m [x(k) - x_b(k)]^2,$$

gdzie:  $m$  - liczba próbek,  $x(k)$  - sygnał wzorcowy, otrzymany z systemu zrealizowanego na pełnej dostępnej precyzji,  $x_b(k)$  - sygnał analizowany (badany), otrzymany z systemu o skwantowanych współczynnikach.

Na rysunku 4 przedstawiono charakterystyki amplitudowe poszczególnych realizacji filtru Gaussa dla kwantowania współczynników na różnych poziomach. Przez  $|H(e^{j\omega})|$  oznaczono wzorcową charakterystykę amplitudową (idealną), natomiast  $|H_C(e^{j\omega})|$  i  $|H_R(e^{j\omega})|$  to charakterystyki amplitudowe odpowiednio systemu bezpośrednio realizującego splot i systemu bazującego na rotatorach. Ponieważ dla kwantowania 16- i 24-bitowego charakterystyki praktycznie pokrywają się, na rysunkach 5 i 6 przedstawiono bardziej precyzyjne dane dla wybranych zakresów  $\omega$ . Niższą wrażliwość struktury rotatorowej można zauważyć np. na rysunku 5, gdzie  $|H_R(e^{j\omega})|$  ma przebieg bardziej zbliżony do  $|H(e^{j\omega})|$  niż  $|H_C(e^{j\omega})|$ . Dla kwantowania współczynników na 24-bitach, w początkowym zakresie pasma przepustowego ( $\omega < 0.0008$ ),  $|H_R(e^{j\omega})|$  wypada nieco gorzej, gdyż  $|H(e^{j\omega})|$  i  $|H_C(e^{j\omega})|$  całkowicie się pokryły (rysunek 6a). Natomiast już np. dla  $2.3255 < \omega < 2.33$  (rysunek 6b) ponownie przebieg  $|H_R(e^{j\omega})|$  jest bliższy  $|H(e^{j\omega})|$ . Zaprezentowanie szczegółowych charakterystyk w całym zakresie  $\omega$  jest utrudnione przez bardzo zbliżone przebiegi (potrzebne byłoby zaprezentowanie nawet kilkudziesięciu wykresów co mogło by zająć wiele stron). Dlatego też wyznaczone błędy MSE pozwalają na prostsze i szybsze wskazanie implementacji filtru Gaussa o mniejszej wrażliwości.

#### Podsumowanie

W artykule zaprezentowano i porównano wybrane parametry oraz charakterystyki dla dwóch realizacji filtru Gaussa. Pierwsza bazuje na klasycznym splotcie, druga to implementacja ortogonalnego filtru wykorzystująca rotatory Givensa. Z tabeli 4 można odczytać zmierzone parametry w postaci błędów średniokwadratowych dla odpowiedzi impulsowych, charakterystyk amplitudowych oraz odpowiedzi na pobudzenie losowym szumem. Dla współczynników skwantowanych na 8-bitach, lepsza okazuje się struktura bezpośrednia. Jednak już dla kwantowania na 16- i 24-bitach, niższe błędy ma struktura rotatorowa, co potwierdza lepsze parametry filtrów ortogonalnych [2]. Kluczowa jest tu wrażliwość, która dla struktury rotatorowej (ortogonalnej) jest niższa niż w przypadku struktury bezpośredniej. Realizacja systemu rotatorowego obciążona jest złożonym procesem syntezy (konieczne jest wykorzystanie środowisk matematycznych np. Scilab). Jednak zważywszy na fakt, że obecnie komputer i różne narzędzia projektowe są podstawą przy pracy nad systemami CPS, zawiła synteza nie jest istotną przeszkodą. Na potrzeby niniejszego artykułu opracowano kompletny skrypt, który jako parametry przyjmuje współczynniki filtru FIR, a zwracany

danymi są odpowiednie macierze rotacji. Podsumowując, bazując na konkretnym przypadku filtru Gaussa 1D, w niniejszej pracy udało się wykazać jedną z ważniejszych zalet systemów ortogonalnych, jaką jest niska wrażliwość na kwantowanie współczynników. Wykorzystanie tego faktu, może pozwolić na uniknięcie wielu problemów przy implementacji i sprzętowej realizacji układów CPS.

Dalsze prace będą polegały na analizie wrażliwości charakterystyk amplitudowych i fazowych na błędy współczynników przy uwzględnieniu pasma przepustowego i zaporowego danego filtru. Ponieważ autor prowadzi też badania nad synteza [6, 7] i realizacją [8, 9] filtrów 3D, planowane jest wykonanie podobnych pomiarów również dla takich struktur.

**Autorzy:** mgr inż. Paweł Poczekajło, Politechnika Koszalińska, Wydział Elektroniki i Informatyki, ul. Sniadeckich 2, 75-453 Koszalin, E-mail: [pawel.poczekajlo@tu.koszalin.pl](mailto:pawel.poczekajlo@tu.koszalin.pl).

#### LITERATURA

- [1] Oppenheim A.V., Schaffer R.W., Cyfrowe przetwarzanie sygnałów, Wyd. Kił, Warszawa (1979) (tłumaczenie z "Digital Signal Processing", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1975), ISBN: 0132146355).
- [2] Vaidyanathan P.P., Multirate Systems And Filter Banks, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1993). ISBN: 81-7758-942-3
- [3] Online, Home - SCILAB, <https://www.scilab.org/>
- [4] Wirski R., Wawryn K., Stanowa synteza systemów bezstratnych o skończonej odpowiedzi impulsowej (ang. "State-space synthesis of finite impulse response loss-less systems"), *Przegląd Elektrotechniczny*, 86 (2010), nr. 11a, 218-221.
- [5] Wirski R., Wawryn K., Strzeszewski B., State-space approach to implementation of FIR systems using pipeline rotation structures, *International Conference on Signals and Electronic Systems (ICSES)*, Wrocław 2012. DOI: 10.1109/ICSES.2012.6382223
- [6] Poczekajło P., Wirski R., Synthesis and Realization of 3-D Orthogonal FIR Filters Using Pipeline Structures, *Circuits Systems and Signal Processing*, 37 (2018), nr. 4, 1669-1691. DOI: 10.1007/s00034-017-06
- [7] Poczekajło P., Wawryn K., Algorithm for Realisation, Parameter Analysis, and Measurement of Pipelined Separable 3D Finite Impulse Response Filters Composed of Givens Rotation Structures, *IET Signal Processing*, 12 (2018), nr. 7, 857-867. DOI: 10.1049/iet-spr.2017.0450
- [8] Wawryn K., Poczekajło P., Wirski R., FPGA implementation of 3-D separable Gauss filter using pipeline rotation structures, *22nd International Conference on Mixed Design of Integrated Circuits Systems (MIXDES)*, Torun 2015, 589-594. DOI: 10.1109/MIXDES.2015.7208592
- [9] Poczekajło P., Wawryn K., Hardware implementation of 3D pipelined Laplace filter based on rotation structures, *24th International Conference on Mixed Design of Integrated Circuits Systems (MIXDES)*, Bydgoszcz 2017, 276-280. DOI: 10.23919/MIXDES.2017.8005215