

Analiza rozkładu pola przepływowego w cienkiej warstwie przewodzącej z defektem eliptycznym

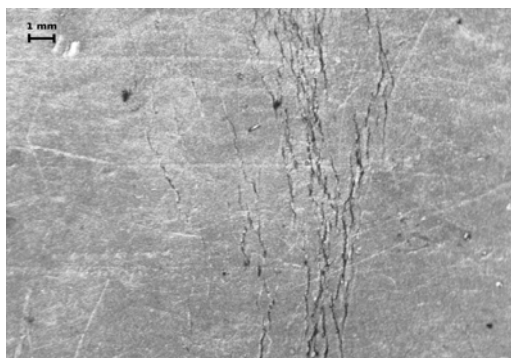
Streszczenie. W artykule zaprezentowano analityczne rozwiązanie zagadnienia obliczania rozkładu pola przepływowego w cienkiej warstwie przewodzącej z defektem (pęknięciem) o kształcie elipsy. Wyprowadzono wzory na funkcje potencjału i składowych pola elektrycznego oraz przybliżony wzór pozwalający oszacować wpływ defektu na natężenie prądu w ścieżce przewodzącej. Ponadto podano wzory dla pęknięcia nieskończenie cienkiego oraz dokonano oceny wpływu tej idealizacji na oszacowanie natężenia prądu w ścieżce.

Abstract. The article presents an analytical solution of the problem of calculating the flow field distribution in a thin electroconductive layer defected with the cracks in the shape of an ellipse. The formulas for the functions of the potential and the electric field components as well the approximate formula allowing to estimate the impact of the defect on the current in the electroconductive layer were derived. In addition, formulas for infinitely thin distribution in a thin conductive layer with an elliptical defect).

Słowa kluczowe: pole przepływowe, cienkie warstwy przewodzące, elektronika noszona, tekstronika
Keywords: flow field, thin conductive layer, wearable electronics, textronics.

Wstęp

W wielu praktycznych zastosowaniach, coraz częściej zachodzi potrzeba wytwarzania układów elektronicznych na podłożach elastycznych, np. materiałach tekstylnych. Takie układy są stosowane w odzieży noszonej tam, gdzie ważne są funkcje pomiaru i kontroli (temperatura, wilgotność, ciśnienie, analiza kinematyczna i czujniki ruchu, monitorowanie szybkości odpowiedzi, czujnik aktywności serca, bioczujniki itp.) [1-6]. Zagadnieniami tymi zajmuje się nowa gałąź elektrotechniki nazwana tekstroniką. Jednym z podstawowych problemów technologicznych tekstroniki jest wytwarzanie na podłożu tekstylnym niezawodnie działających ścieżek przewodzących, narażonych w trakcie użytkowania na różnego rodzaju naprężenia mechaniczne, głównie zginające i rozciągające. Tematyce tej poświęcono szereg badań laboratoryjnych [7,8]. Zaprezentowano rezultaty badań wpływu liczby zgięć tekstronicznych warstw przewodzących otrzymanych metodą fizycznego próżniowego napyłania (PVD) na jej rezystancję. Wzrost rezystancji spowodowany jest powstawaniem wielu mikropęknięć w miejscu zginania, których liczba i wielkość narasta w miarę zwiększania liczby zgięć (Rys. 1.).

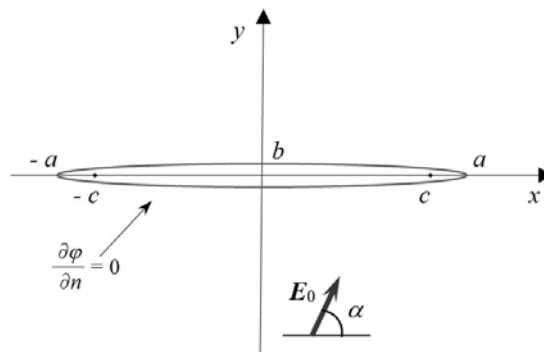


Rys.1. Obraz mikroskopowy cienkiej warstwy przewodzącej wykonanej ze złota na kompozytowym podłożu tekstylnym po procesie wielokrotnego zginania (mikroskopia stereoskopowa)

Celem niniejszej pracy jest teoretyczna analiza rozkładu gęstości prądu w cienkiej warstwie przewodzącej zawierającej defekt (pęknięcie) i na tej podstawie oszacowanie jego wpływu na prąd całkowity i rezystancję ścieżki.

Pęknięcie eliptyczne w nieograniczonym obszarze

Na drodze analitycznej można otrzymać dokładne rozwiązanie zagadnienia pola przepływowego w cienkiej warstwie przewodzącej z defektem o kształcie elipsy (Rys.2.). Zakłada się, że przepływ prądu jest wymuszany przez stałe i jednorodne pole elektryczne o znanym natężeniu E_0 , pochodzącym z zewnętrznego źródła oraz, że obszar pęknięcia wypełniony jest idealnym dielektrykiem. Ponadto przyjmuje się, że funkcje pola nie zależą od współrzędnej z prostopadłej do płaszczyzny XY .



Rys.2. Analizowany model przewodzącej warstwy z defektem

Przy takich założeniach, zarówno w obszarze przewodzącym Ω^I , jak i dielektrycznym Ω^{II} pole elektryczne posiada potencjał skalarny $\varphi = \varphi(x,y)$

$$(1) \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$$

spełniający równanie Laplace'a

$$(2) \quad \Delta \varphi = 0$$

Na granicy obszarów Γ funkcja potencjału musi być ciągła oraz spełniać zerowy warunek Neumanna od strony obszaru Ω^I :

$$(3) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma^+} = 0$$

(zwrot wektora normalnego przyjęto jak zwykle, od obszaru przewodzącego do dielektrycznego, zatem symbol Γ^+ oznacza powierzchnię brzegową od strony przewodnika).

Rozwiązanie w obszarze przewodzącym

Funkcja potencjału w obszarze przewodzącym może być zapisana jako:

$$(4) \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1$$

gdzie:

$$(5) \quad \varphi_0(x, y) = -E_0(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$$

jest potencjałem pola wymuszającego, a φ_1 potencjałem indukowanym, spowodowanym obecnością defektu. Oba potencjały spełniają równanie (2).

W celu znalezienia potencjału φ_1 zastosowano współrzędne eliptyczne η, ψ zdefiniowanymi zależnościami [9]:

$$(6) \quad \begin{cases} x = c \cosh \eta \cos \psi \\ y = c \sinh \eta \sin \psi \end{cases}$$

Na brzegu S współrzędna η przyjmuje stałą wartość, którą można różnie powiązać z parametrami elipsy a, b, c ($c^2 = a^2 - b^2, a > b$, por. Rys. 2.):

$$(7) \quad \eta_0 = \operatorname{arcosh} \frac{a}{c} = \ln \frac{a+b}{c} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{a-b}$$

Na podstawie (3) – (6), w obszarze Ω^I , otrzymuje się:

$$(8) \quad \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right|_{\Gamma^+} = - \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_0^+} = E_0 c (\cos \alpha \sinh \eta_0 \cos \psi + \sin \alpha \cosh \eta_0 \sin \psi)$$

Zależność (8) stanowi warunek brzegowy dla funkcji potencjału indukowanego w obszarze Ω^I . We współrzędnych eliptycznych równanie (2) przyjmuje postać:

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \psi^2} = 0$$

(Laplasjan we współrzędnych eliptycznych [9] ma bardziej złożoną formę niż sugerowałoby to równanie, jednak samo równanie Laplace'a sprowadza się do (9).)

Rozwiązanie zagadnienia sformułowanego równaniami (8), (9) uzyskano przez zastosowanie metody separacji zmiennych. W rezultacie otrzymano:

$$(10) \quad \varphi_1(\eta, \psi) = -E_0 c \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} [b \cos \alpha \cos \psi + a \sin \alpha \sin \psi] e^{-\eta}$$

Po uwzględnieniu (4), (5), (6) otrzymuje się pełną funkcję potencjału w obszarze Ω^I w postaci:

$$(11) \quad \varphi^I(\eta, \psi) = -E_0 \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} [a \cosh \eta - b \sinh \eta] \cos(\psi - \alpha)$$

Korzystając z (1) i operatora gradientu we współrzędnych eliptycznych [9] otrzymuje się:

$$(12) \quad E_{\eta}^I(\eta, \psi) = \frac{E_0 (a \sinh \eta - b \cosh \eta)}{(a-b) \sqrt{\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi}} \cos(\psi - \alpha)$$

$$(13) \quad E_{\psi}^I(\eta, \psi) = \frac{-E_0 (a \cosh \eta - b \sinh \eta)}{(a-b) \sqrt{\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi}} \sin(\psi - \alpha)$$

Transformując następnie (11) – (13) do układu kartezjańskiego otrzymano:

$$(14) \quad \varphi^I(x, y) = \frac{E_0}{a-b} \cdot [(\operatorname{sgn}(x) b P_1 - ax) \cos \alpha - (\operatorname{sgn}(y) a P_2 - by) \sin \alpha]$$

(15)

$$E_x^I = \frac{-E_0}{a-b} \cdot \left[\left(\operatorname{sgn}(x) \frac{Q_1 + 1}{2P_1} bx - a \right) \cos \alpha - \operatorname{sgn}(y) \frac{Q_1 - 1}{2P_2} ax \sin \alpha \right]$$

(16)

$$E_y^I = \frac{-E_0}{a-b} \cdot \left[\operatorname{sgn}(x) \frac{Q_2 - 1}{2P_1} by \cos \alpha - \left(\operatorname{sgn}(y) \frac{Q_2 + 1}{2P_2} ax - b \right) \sin \alpha \right]$$

gdzie:

$$(17) \quad P_1 = \sqrt{\frac{x^2 - y^2 - c^2 + D}{2}}; \quad P_2 = \sqrt{\frac{-x^2 + y^2 + c^2 + D}{2}}$$

$$(18) \quad Q_1 = \frac{x^2 + y^2 - c^2}{D}; \quad Q_2 = \frac{x^2 + y^2 + c^2}{D}$$

$$(19) \quad D = \sqrt{(x^2 + y^2 - c^2)^2 + (2cy)^2}$$

Poszukiwany rozkład pola gęstości prądu otrzymuje się na podstawie (15) i (16) korzystając z lokalnego prawa Ohma:

$$(20) \quad \mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$$

Rozwiązanie w obszarze dielektrycznym

Podstawiając (7) do (11) otrzymuje się potencjał na granicy obszaru Ω^I :

$$(21) \quad \varphi^I(\eta_0, \psi) = -E_0 (a+b) \cos(\psi - \alpha)$$

Ponieważ funkcja potencjału musi być ciągła, zależność (21) stanowi równocześnie warunek brzegowy dla potencjału w obszarze Ω^{II} . Stosując ponownie separację zmiennych otrzymuje się w tym obszarze rozwiązanie:

(22)

$$\varphi(\eta, \psi) = -E_0 (a+b) \left(\frac{c}{a} \cosh \eta \cos \psi \cos \alpha + \frac{c}{b} \sinh \eta \sin \psi \sin \alpha \right)$$

co po transformacji do układu kartezjańskiego daje

$$(23) \quad \varphi^{II}(x, y) = -E_0 (a+b) \cdot \left(\frac{x}{a} \cos \alpha + \frac{y}{b} \sin \alpha \right)$$

$$(24) \quad E_x^{II} = E_0 \frac{a+b}{a} \cos \alpha$$

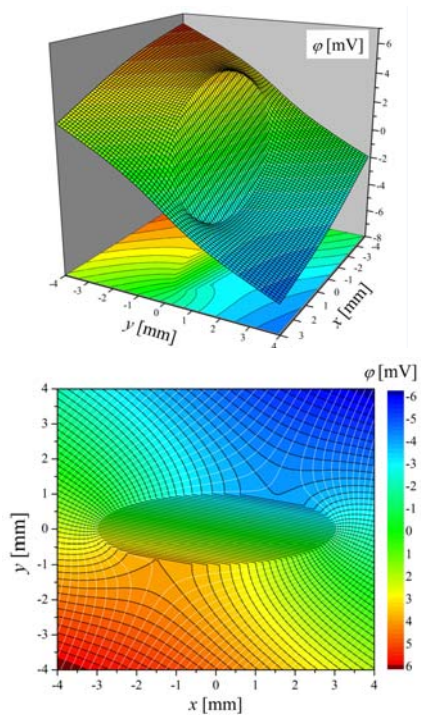
$$(25) \quad E_y^{II} = E_0 \frac{a+b}{b} \sin \alpha$$

Oznacza to, że pole elektryczne w obszarze Ω^{II} jest polem jednorodnym o wartości:

$$(26) \quad E^{II} = E_0 (a+b) \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}}$$

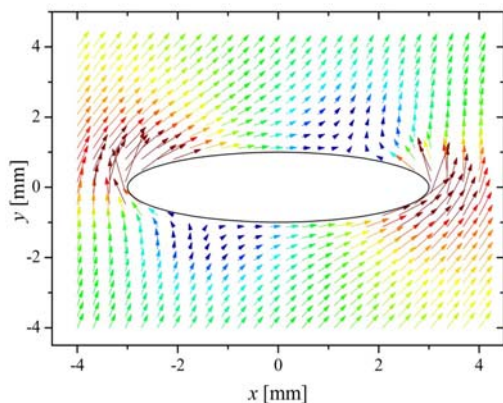
Z warunku ciągłości stycznej składowej natężenia pola elektrycznego wynika, że wzór ten określa jednocześnie maksymalną wartość pola elektrycznego przy powierzchni S od strony obszaru przewodzącego. Stąd, po skorzystaniu z (20), można łatwo określić maksymalną wartość gęstości prądu w analizowanym układzie.

Na rysunku 3. Przedstawiono przykładowy wykres funkcji potencjału opisanej wzorami (14), (23), dla $a = 3$ mm, $b = 1$ mm, $E_0 = 1$ V/m, $\alpha = 60^\circ$.



Rys.3. Obliczony na podstawie wzorów (14) (23) rozkład potencjału (białym kolorem oznaczono linie prądu)

Rysunek 4. Ilustruje rozkład pola przepływowego opisany wzorami (15), (16), (20) (por. też linie prądu na Rys. 3).



Rys.4. Rozkład gęstości prądu w analizowanym układzie

Oszacowanie wpływu defektu na rezystancję ścieżki

Przedstawione rozwiązanie pozwala oszacować wpływ pęknięcia na rezystancję ścieżki przewodzącej. W tym celu rozważmy zagadnienie cienkiej ścieżki przewodzącej z defektem eliptycznym, zilustrowane na rysunku 5.

Zagadnienie to różni się od wcześniej sformułowanego tym, że poza warunkami brzegowymi na powierzchni defektu, funkcja potencjału musi spełniać zerowe warunki Neumanna na krawędziach ścieżki. Takie zagadnienie można rozwiązać tylko na drodze numerycznej, jednak przy założeniu, że $d_1, d_2 \gg a$ należy się spodziewać, że przedstawione wcześniej rozwiązanie z przybliżeniem będzie spełnić również te warunki, ponieważ funkcja potencjału wymuszającego (5) spełnia je dokładnie, a funkcja potencjału indukowanego (10) szybko maleje z odległością. Przyjmując to uproszczenie można stosunkowo łatwo obliczyć prądy i_1, i_2 przepływające przez powierzchnie S_1, S_2 przechodzące przez jedną z osi elipsy (por. Rys. 5) i

porównać ich sumaryczną wartość i z prądem i_0 , jaki płynąłby w ścieżce bez defektu.

Korzystając z ogólnego wzoru:

$$(27) \quad i = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

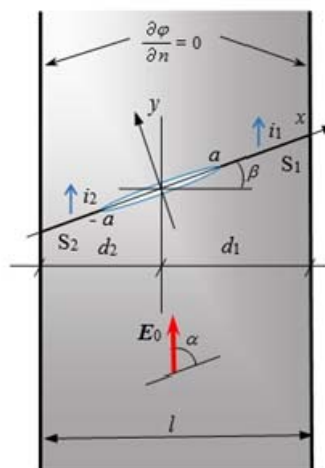
Otrzymano ostatecznie:

$$(28) \quad \frac{i}{i_0} \cong \frac{a \left(\sqrt{d_1^2 - c^2 \cos^2 \beta} + \sqrt{d_2^2 - c^2 \cos^2 \beta} \right) - bl}{(a-b)l}$$

gdzie β jest mniejszym z kątów nachylenia jednej z osi elipsy (por. Rys. 5). Należy zaznaczyć, że przybliżenie (28) jest tym lepsze im ten kąt jest mniejszy (w miarę jego wzrostu narasta błąd spowodowany niespełnieniem warunku brzegowego na krawędziach ścieżki).

Zgodnie z prawem Ohma stosunek rezystancji R ścieżki z defektem do rezystancji R_0 ścieżki bez defektu będzie stosunkiem odwrotnym:

$$(29) \quad \frac{R}{R_0} = \frac{i_0}{i}$$



Rys. 5. Ścieżka przewodząca z eliptycznym defektem

Pęknięcie nieskończenie cienkie

Przyjmując krótszą półoś elipsy $b = 0$ otrzymuje się uproszczone wersje wyprowadzonych wzorów, odpowiadające nieskończenie cienkiemu pęknięciu warstwy przewodzącej. Poniżej zaprezentowano najważniejsze z nich:

$$(30) \quad \phi^1(x, y) = -E_0 \cdot [x \cos \alpha + \operatorname{sgn}(y) P_2 \sin \alpha]$$

$$(31) \quad E_x^1 = E_0 \left(\cos \alpha + \operatorname{sgn}(y) \frac{Q_1 - 1}{2P_2} x \sin \alpha \right)$$

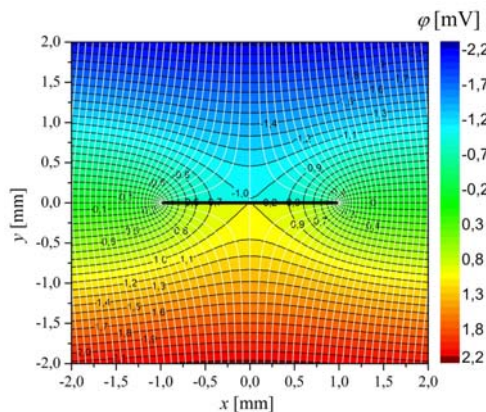
$$(32) \quad E_y^1 = \operatorname{sgn}(y) E_0 \frac{Q_2 + 1}{2P_2} x \sin \alpha$$

$$(28) \quad \frac{i}{i_0} = \frac{R_0}{R} \cong \frac{\sqrt{d_1^2 - a^2 \cos^2 \beta} + \sqrt{d_2^2 - a^2 \cos^2 \beta}}{l}$$

Na rysunku 6. Przedstawiono przykładowy rozkład potencjału i linie prądu dla tego przypadku (dla $\beta = 0^\circ$).

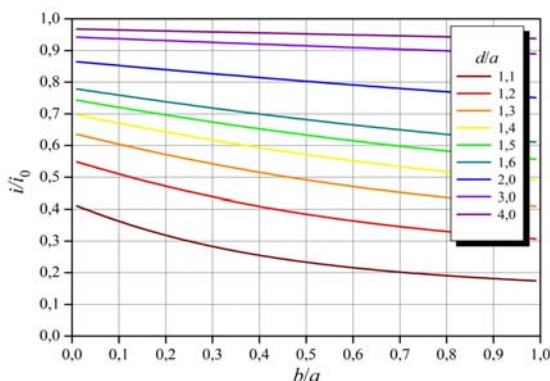
Należy zwrócić uwagę na nieciągłość funkcji potencjału na linii pęknięcia, oraz osobliwości składowych natężenia pola elektrycznego na końcach odcinka defektu ($x = a, y = 0$). Rozwiązanie takie jest więc zasadniczo niefizyczne, tym

niemniej może być użyteczne w przypadkach defektów o dużym aspekcie geometrycznym (tutaj: stosunku a/b).



Rys. 6. Rozkład potencjału i linie prądu dla nieskończonego cienkiego defektu

W celu dokonania oceny, w jakim stopniu taka idealizacja może wpływać na oszacowanie natężenia prądu zbadano zależność natężenia prądu od aspektu elipsy dla różnych szerokości ścieżek. Wyniki przedstawiono na rysunku 7. Wykresy te odpowiadają defektowi o kształcie elipsy o nachyleniu $\beta = 0^\circ$ i środku leżącym na osi ścieżki.



Rys. 7. Zależność natężenia prądu w ścieżce przewodzącej z eliptycznym defektem od parametrów geometrycznych układu

Na ich podstawie można wnioskować, że dla $b/a < 0,2$ i $d/a > 1,6$ względna różnica między szacowanymi wartościami prądów na podstawie wzorów (28) i (33) nie przekracza 5% i szybko maleje w miarę wzrostu aspektu defektu i jego odległości od krawędzi ścieżek.

Podsumowanie

W pracy zaprezentowano analityczne rozwiązanie zagadnienia obliczania rozkładu pola przepływowego w cienkiej warstwie przewodzącej z defektem o kształcie elipsy dowolnie zorientowanym względem pola elektrycznego wymuszającego przepływ prądu. Przedstawiono w postaci jawnej funkcje potencjału i

składowych pola elektrycznego w obszarze przewodzącym (wzory (10)-(19)) i w obszarze defektu (wzory (22)-(26)). Na ich podstawie wyprowadzono przybliżony wzór pozwalający oszacować wpływ defektu na natężenie prądu w ścieżce przewodzącej o zadanej szerokości oraz jej rezystancję (wzory (28), (29)). Ponadto przedstawiono uproszczone wersje ww. wzorów odpowiadające defektowi nieskończonego cienkiemu (wzory (30)-(33)) oraz dokonano oceny stopnia, w jakim taka idealizacja wpływa na oszacowanie natężenia prądu w ścieżce (wykresy na rys. 6). Stwierdzono, że przy stosunku półosi elipsy b/a mniejszego od 0,2 i stosunku szerokości ścieżki do szerokości defektu większego od 1,6, względna różnica między szacowanymi wartościami prądów na podstawie wzorów (28) i (33) nie przekracza 5% i szybko maleje w miarę wzrostu aspektu defektu i jego odległości od krawędzi ścieżek.

Autorzy: Stanisław Pawłowski PhD, Department of Electrodynamics and Electrical Machine Systems, Rzeszów University of Technology, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów, Poland; E-mail: spawlo@prz.edu.pl. Jolanta Plewako PhD, Department of Power Electronics and Power Engineering, Rzeszów University of Technology, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów, Poland; E-mail: jplewako@prz.pl; Ewa Korzeniewska PhD, Institute of Electrical Engineering Systems, Lodz University of Technology, ul. Stefanowskiego, 90-924 Lodz, Poland, E-mail: ewakorz@matel.p.lodz.pl

LITERATURA

- [1]. Rymarczyk T.; Nita P.; Vejar A.; Vos M., Stefaniak B., Adamkiewicz, P., Wearable mobile measuring device based on electrical tomography, *Przegląd Elektrotechniczny*, 95 (2019), nr 4, 211-214
- [2]. Jakubas A., Lada-Tondyra E., Nowak M., Textile sensors used in smart clothing to monitor the vital functions of young children, *Progress in Applied Electrical Engineering, PAEE 2017*, Article number 8008989
- [3]. Rymarczyk T., Klosowski G., Tchorzewski P., Cieplak T., Kozłowski, E., Area monitoring using the ERT method with multisensor electrodes, *Przegląd Elektrotechniczny*, 95 (2019) vol. 95, nr 1, 153-156
- [4]. Tokarska M., Frydrysiak M., Zieba J., Electrical properties of flat textile material as inhomogeneous and anisotropic structure, *Journal of Material Science, Materials in Electronics*, (2013), nr 24, 5061-5068
- [5]. Pawlak R., Korzeniewska E., Koneczny C., Hałgas B., Properties of conductive structures produced by PVD method on a textile composites by using the PVD method for textronic applications, *Autex Research Journal*, 17 (2017), nr 3, 229-237, DOI: 10.1515/aut-2017-0015
- [6]. Ziaja J., ZnO thin film deposition with pulsed magnetron sputtering, *Przegląd Elektrotechniczny*, 83, (2007), nr 11, 235-239
- [7]. Korzeniewska, E., Walczak, M., Rymaszewski, J., Elements of elastic electronics created on textile substrate - *MIXDES 2017*, 8005250, 447-450
- [8]. Korzeniewska E., Józwick J., Zawiślak R., Krawczyk A., Michałowska J., Resistance of metallic layers used in textronic systems to mechanical deformation, *Przegląd Elektrotechniczny*, 93 (2017), nr 12, 111-114
- [9]. Korn G. A., Korn T. M., *Mathematical handbook for scientists and engineers*, McGraw-Hill Book Company, (1968)