

Podstawy teoretyczne metod kompensacji mocy biernej prądów niesinusoidalnych w dziedzinie częstotliwości i czasu. Energetyczna interpretacja wrocławskiej tożsamości matematycznej

Streszczenie: W opracowaniu przedstawiono uwagi ogólne dotyczące metod realizacji kompensacji mocy biernej obciążenia z niesinusoidalnymi sygnałami napięcia i prądu. W dziedzinie częstotliwości sformułowano metodę opartą na strukturze łańcuchowej kompensacji filtracyjnej. W dziedzinie czasu przedstawiono warunki ograniczające jednoparametrową kompensację C, L. Podano również warunki realizacji kompensacji w zakresie koncepcji teorii mocy Fryzego. Metody zilustrowano na wybranych przykładach.

Abstract: The paper presents general remarks on the methods of implementing load reactive power compensation with non-sinusoidal voltage and current signals. In the frequency domain, a method based on the chain structure of filtration compensation was formulated. In the time domain, the conditions limiting one-parameter C, L compensation are presented. The conditions for realizing compensation in the scope of the Fryze power theory concept are also given. The methods have been illustrated by selected examples. **Theoretical background for compensation methods of reactive power of non-sinusoidal currents in the frequency and time domain. Energetic interpretation of the Wrocław mathematical identity**

Słowa kluczowe: teoria mocy, prądy niesinusoidalne, moc bierna, kompensacja
Keywords: power theory, non-sinusoidal current, reactive power, compensation

Motto: „W nauce prawda jest cenniejsza gdy jest jasno wypowiedziana”

Wprowadzenie

Zagadnienia dotyczące teorii mocy prądów odkształconych przedstawiane są obecnie w licznych opracowaniach tworzących obszerną bibliografię.

Problematyka ta obejmuje bardzo szeroki zakres ważnych aspektów teoretycznych jak również aplikacyjnych [9], [11]. Szczególne i zasadnicze znaczenie dla energetyki ma tematyka dotycząca obniżenia strat mocy w liniach przesyłowych. Zagadnienia te bezpośrednio powiązane są z metodami redukcji prądów przesyłanych przez linię, które w szczególnym przypadku łączy się z kompensacją mocy biernej.

Opracowanie niniejsze można podzielić na dwie części. W pierwszej części, w dziedzinie częstotliwości, jest przedstawiona jednolita metoda i procedura obliczeniowa umożliwiająca efektywną redukcję określonych harmonicznych prądu w linii a przez to ich kompensację lub pełną eliminację. W tym celu wykorzystano metodę filtrów łańcuchowych. W uzupełnieniu przedstawiono możliwości i ograniczenia niepełnej kompensacji jednoparametrowej przez dobór jednego elementu reaktancyjnego C, L [19].

W drugiej części, w zakresie koncepcji Fryzego [13, 14], sformułowano metodę dekompozycji odbiornika na składową czynną i bierną z wydzieleniem opowiadających im komponentów odbiornika. W tym ujęciu idea kompensacji polega na redukcji składowej biernej prądu pobieranego z linii zasilającej. Kompensator jest układem realizującym operację wymuszenia prądu przeciwnego do prądu komponentu biernego odbiornika.

Zasadniczym celem opracowania jest przedstawienie jednolitej, uporządkowanej metodyki formułowania

problemów kompensacji. W stosunku do istniejącego obecnie stanu problematyki kompensacji, opracowanie zawiera nowe elementy uzupełnienia i rozszerzenia.

Autorzy wyrażają nadzieję, że rozważane metody analizy będą podstawą dalszych opracowań ukierunkowanych na zastosowania praktyczne.

Sformułowanie metody analizy w dziedzinie częstotliwości

W obwodach prądu niesinusoidalnego rozpatrywane są (sygnały) przebiegi chwilowe napięć $u(t)$ i prądów $i(t)$ jako funkcje okresowe o okresie T .

W klasie funkcji okresowych $x(t)$, $y(t)$ o okresie T , spełniających warunek okresowości $x(t)=x(t+T)$, wprowadzimy operację iloczynu skalarnego (x,y) wyrażoną wzorem

$$(1) \quad (x, y) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t) dt$$

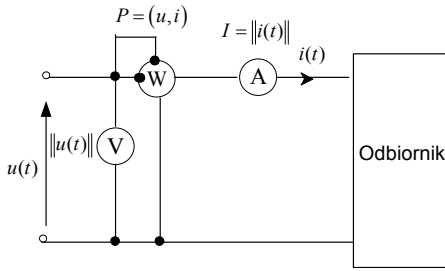
Operacja iloczynu skalarnego jest operacją liniową i spełnia względem dodawania ważną własność rozdzielności $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$.

Wprowadzamy skrócony zapis normy sygnału jako jego wartość skuteczną $\|x\|$, wartość średnią X_0 , wartość skuteczną składowej przemiennej $\|\hat{x}\|$

$$(2) \quad (x, x) \leq \|x\| \|y\|, \quad \|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad X_0 = \langle x \rangle = (x, 1) \\ \tilde{x} = x - X_0, \quad \|x\|^2 = X_0^2 + \|\tilde{x}\|^2$$

W przyjętych oznaczeniach wskazania przyrządów przedstawiono w obwodzie na rysunku (rys.1)

$$(3) \quad U = \|u\| = \sqrt{(u, u)}, \quad I = \|i\| = \sqrt{(i, i)}, \quad P = (u, i)$$



Rys.1 Schemat odbiornika z zaznaczonymi sygnałami i wartościami mierzonymi

W opracowaniu, w pierwszej kolejności rozpatrzone będzie ujęcie analizy w dziedzinie częstotliwości. Jest to w sposób naturalny rozszerzeniem znanych zależności z prądów sinusoidalnych.

Zakładamy, że rozpatrywane sygnały $u(t)$ oraz $i(t)$ w rozpatrywanym układzie (rys.1) mogą być przedstawione w postaci szeregów Fouriera praktycznie ze skończoną liczbą wyższych harmonicznych $k, l=1, \dots, N$ opisanych wzorami

$$(4) \quad u(t) = U_0 + \sqrt{2} \sum_k U_k \sin(k\omega t + \psi_{uk})$$

$$(5) \quad i(t) = I_0 + \sqrt{2} \sum_k I_k \sin(k\omega t + \psi_{ik}) + \sqrt{2} \sum_l I_l \sin(l\omega t + \psi_{il}), \quad (l \neq k)$$

lub z wydzielonymi składowymi harmonicznych prądu zgodnymi z fazami napięcia (i_p - składowa czynna) oraz ortogonalnymi do kolejnych harmonicznych napięcia (i_Q - składowa bierna)

$$(6) \quad i(t) = I_0 + \sqrt{2} \sum_k I_k \cos \varphi_k \sin(k\omega t + \psi_{uk}) + \sqrt{2} \sum_k I_k \sin \varphi_k \cos(k\omega t + \psi_{uk}) + \sqrt{2} \sum_l I_l \sin(l\omega t + \psi_{il}) = i_p + i_Q + i_G, \quad \varphi_k = \psi_{uk} - \psi_{ik}$$

Przyjęte w przebiegu prądu harmoniczne o indeksach l wyrażają tak zwane harmoniczne zewnętrzne (obce generowane), są to takie, które przy niewystępowaniu w napięciu $U_l=0$, występują w prądzie $I_l \neq 0$. Fakt ten ma miejsce często w układach z elementami nieliniowymi. Teoretycznie pod względem energetycznym sytuacja taka nie ma istotnego znaczenia, harmoniczne te nie są związane z przenoszeniem energii i mogą być zawsze kompensowane (patrz niżej przykłady).

Wskazania zaznaczonych na rysunku przyrządów mogą być obliczone znanymi wzorami z definicji (1, 2, 3)

$$(7) \quad U = \sqrt{\|u\|^2} = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{U_0^2 + \sum_k U_k^2}$$

$$(8) \quad I = \sqrt{\|i\|^2} = \sqrt{(i, i)} = \sqrt{I_0^2 + \sum_k I_k^2 + \sum_l I_l^2}$$

$$(9) \quad P = (u, i) = U_0 I_0 + \sum_k U_k I_k \cos \varphi_k = P_0 + \sum_k P_k$$

Występujące we wzorach (7, 8, 9) wartości skuteczne harmonicznych oraz ich wartości zespolone mogą być wyznaczone ze wzorów

$$(10) \quad \underline{U}_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_k + jB_k) = U_k \exp(j\psi_{uk})$$

$$U_k = \sqrt{\frac{A_k^2 + B_k^2}{2}}, \quad \psi_{uk} = \arctg \frac{B_k}{A_k}$$

$$(11) \quad \underline{I}_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (C_k + jD_k) = I_k \exp(j\psi_{ik})$$

$$I_k = \sqrt{\frac{C_k^2 + D_k^2}{2}}, \quad \psi_{ik} = \arctg \frac{D_k}{C_k}$$

gdzie wprowadzone stałe A_k, B_k, C_k, D_k są wyrażone przez iloczyn skalarny określony wzorem (1).

$$(12) \quad A_k = 2(u, \sin k\omega t), \quad B_k = 2(u, \cos k\omega t)$$

$$C_k = 2(i, \sin k\omega t), \quad D_k = 2(i, \cos k\omega t)$$

Występujące dodatkowo składowe stałe U_0, I_0 z definicji (1) określone są zależnościami

$$(13) \quad U_0 = \langle u(t) \rangle = (u, 1), \quad I_0 = \langle i(t) \rangle = (i, 1)$$

Przy uwzględnieniu powyższych zależności otrzymuje się wzory dla mocy pozornej, czynnej i biernej poszczególnych harmonicznych i składowej stałej

$$(14) \quad \begin{aligned} S_k &= \underline{U}_k \underline{I}_k^* = U_k I_k e^{j(\psi_{uk} - \psi_{ik})} = U_k I_k e^{j\varphi_k} \\ &= U_k I_k \cos \varphi_k + j U_k I_k \sin \varphi_k = P_k + jQ_k \\ P_0 &= U_0 I_0 \end{aligned}$$

Dla rozpatrywanego odbiornika mogą być wyznaczone jego zastępcze parametry: konduktancji, susceptancji oraz admittancji dla każdej harmonicznej oddzielnie

$$(15) \quad G_k = \frac{P_k}{U_k^2}, \quad B_k = -\frac{Q_k}{U_k^2}, \quad Y_k = G_k + jB_k$$

Jak wiadomo z teorii mocy prądów odkształconych przedstawiona wzorem (9) moc czynna wyraża zasadę addytywności mocy czynnej względem zawartych harmonicznych.

Analogicznie jak dla sygnałów sinusoidalnych postulowana jest moc bierna sygnału odkształconego oraz moc pozorna. Moc bierną Q_B jako sumę mocy biernych harmonicznych wprowadził Budeanu [15]

$$(16) \quad Q = \sum_k U_k I_k \sin \varphi_k = \sum_k Q_k = Q_B$$

Moc pozorną określa wzór

$$(17) \quad S = UI = \sqrt{U_0^2 + \sum_k U_k^2} \sqrt{I_0^2 + \sum_k I_k^2 + \sum_l I_l^2}$$

Wprowadzając oznaczenia pomocnicze dla składowych czynnych i biernych harmonicznych prądu ze wzoru (6)

$$(18) \quad I_{Pk} = I_k \cos \varphi_k, \quad I_{Qk} = I_k \sin \varphi_k$$

otrzymuje się uproszczony zapis podanych wyżej zależności dla mocy i prądów

$$(19) \quad P = U_0 I_0 + \sum_k U_k I_{Pk}, \quad Q_B = \sum_k U_k I_{Qk}, \quad I_G = \sqrt{\sum_l I_l^2}$$

$$(20) \quad I_P = \sqrt{\sum_k I_{Pk}^2}, \quad I_Q = \sqrt{\sum_k I_{Qk}^2}, \quad I = \sqrt{I_0^2 + I_P^2 + I_Q^2 + I_G^2}$$

Przy przyjętych oznaczeniach, spełnione są nierówności Cauchy'ego, Schwarz-Buniakowskiego dla mocy czynnej i biernej

$$(21) \quad \begin{aligned} \left(U_0 I_0 + \sum_k U_k I_{Pk} \right)^2 &\leq \left(U_0^2 + \sum_k U_k^2 \right) \left(I_0^2 + \sum_k I_{Pk}^2 \right) \\ \left(U_0 I_0 + \sum_k U_k I_{Pk} \right)^2 &\leq U^2 \left(I_0^2 + I_P^2 \right) \\ \left(\sum_k U_k I_{Qk} \right)^2 &\leq \left(\sum_k U_k^2 \right) \left(\sum_k I_{Qk}^2 \right) \leq U^2 I_Q^2 \leq U^2 \left(I_Q^2 + I_G^2 \right) \end{aligned}$$

z których druga i trzecia dodane stronami sprowadzają się do jednej nierówności

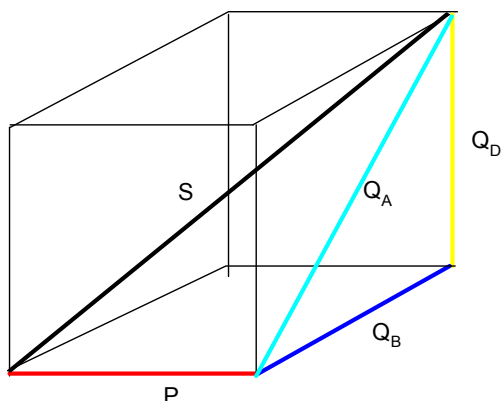
$$(22) \quad P^2 + Q_B^2 \leq S^2$$

Nierówność powyższa formalnie umożliwia zdefiniowanie dodatkowego składnika jako mocy deformacji Q_D spełniającej równanie

$$(23) \quad S^2 = P^2 + Q_B^2 + Q_D^2 = P^2 + Q_A^2$$

gdzie Q_A oznacza moc bierną absolutną w sensie Fryzego [13, 14.]

Znaczenie mocy deformacji Q_D polega na tym, że wykazuje ona istnienie różnic między admitancjami harmonicznymi oraz istnienie obcych harmonicznymi w prądzie ; co będzie wyjaśnione w dalszych rozważaniach.



Rys.2 Tradycyjny prostopadłościan mocy, w którym spełniona jest zależność (23)

Miarę stopnia odkształcenia; zamiast mocy deformacji, może wyrażać współczynnik deformacji, określony wzorem

$$(24) \quad \delta = \frac{Q_D^2}{S^2} 100 = \left(1 - \frac{P^2 + Q_B^2}{S^2} \right) 100\%$$

Oczywiście dla sygnałów sinusoidalnych, dla mocy S, P, Q spełniony jest warunek trójkąta, stąd $\delta=0$.

Współczynnik deformacji δ określa procentowy udział mocy deformacji w stracie nadmiarowej w linii [6].

Współczynnik mocy prądu odkształconego wyrażony jest wzorem

$$(25) \quad \lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{U \sqrt{I_0^2 + I_p^2 + I_Q^2 + I_G^2}}$$

W przypadku kompensacji składowych biernych ($I_Q=0$) oraz eliminacji harmonicznymi generowanych (obcych) ($I_G=0$), współczynnik mocy osiąga wartość maksymalną,

$$(25a) \quad \lambda_{\max} = \frac{P}{S} = \frac{U_0 I_0 + \sum_k U_k I_{pk}}{U \sqrt{I_0^2 + I_p^2}} < 1$$

Jak wynika z nierówności w ogólnym przypadku kompensacja mocy biernej Budeanu ($I_Q=0$) i eliminacja harmonicznymi obcych ($I_G=0$) nie wystarcza do pełnej kompensacji. Wynika to z faktu nieskompensowania mocy deformacji. Natomiast przy pełnej kompensacji w sensie Fryzego przez linię zamiast prądu I_p płynie prąd czynny Fryzego I_a i nierówność (25a) przechodzi w równość z wartością maksymalną równą 1. Bardziej szczegółowe omówienie będzie zawarte w dalszej części opracowania.

Poza współczynnikiem mocy dla oceny obniżenia strat w linii warto wprowadzić współczynnik strat nadmiarowych określony wzorem [6]

$$\kappa = \frac{\Delta P_l - \Delta P_{l\min}}{\Delta P_{l\min}} = \frac{R_l I^2 - R_l I_{\min}^2}{R_l I_{\min}^2} = \frac{I^2}{I_{\min}^2} - 1, \quad I_{\min} = \frac{P}{U}$$

Stąd wynika związek współczynnika strat nadmiarowych ze współczynnikiem mocy

$$\kappa = \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1 \right) 100\%$$

Straty nadmiarowe nie występują tylko przy współczynnikiem mocy równym 1.

Interpretacja energetyczna tożsamości wrocławskiej w dziedzinie częstotliwości

W matematyce znane nierówności Buniakowskiego-Schwarza mogą być rozszerzone do tożsamości Lagrange'a zapisanej w nowej bardziej efektywnej dla zastosowań postaci

$$(26) \quad \sum_{k=1}^N A_k^2 \sum_{k=1}^N B_k^2 - \left(\sum_{k=1}^N A_k B_k \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (A_k B_l - A_l B_k)^2 \geq 0$$

Analogicznie wprowadzając wartości zespolone napięć \underline{U}_k oraz prądów \underline{I}_k harmonicznymi odbiornika, można tożsamość wrocławską przedstawić w postaci energetycznie zespolonej

$$(26a) \quad \left(\sum_{k=1}^N \underline{U}_k \underline{U}_k^* \right) \left(\sum_{k=1}^N \underline{I}_k \underline{I}_k^* \right) - \left(\sum_{k=1}^N \underline{U}_k \underline{I}_k^* \right) \left(\sum_{k=1}^N \underline{U}_k \underline{I}_k^* \right)^* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (\underline{U}_k \underline{I}_l - \underline{U}_l \underline{I}_k) (\underline{U}_k \underline{I}_l - \underline{U}_l \underline{I}_k)^*$$

czyli ostatecznie

$$S^2 - P^2 - Q_D^2 = Q_B^2$$

gdzie

$$(26b) \quad S = \sqrt{\sum_{k=1}^N |\underline{U}_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^N |\underline{I}_k|^2}$$

$$P = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^N \underline{U}_k \underline{I}_k^*$$

$$Q_B = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^N \underline{U}_k \underline{I}_k^*$$

$$(26c) \quad Q_D^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N |(\underline{U}_k \underline{I}_l - \underline{U}_l \underline{I}_k)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \Delta_{kl} \Delta_{kl}^*$$

Przy indeksach k, l własnych harmonicznymi, wyrażenie pomocnicze Δ_{kl} przyjmuje postać

$$\Delta_{kl} = \underline{U}_k \underline{I}_l - \underline{U}_l \underline{I}_k = \underline{U}_k \underline{U}_l \underline{Y}_l - \underline{U}_l \underline{U}_k \underline{Y}_k = \underline{U}_k \underline{U}_l (\underline{Y}_l - \underline{Y}_k)$$

Natomiast, gdy np. l jest indeksem obcych harmonicznymi; wtedy $\underline{U}_l=0, I_l \neq 0$ i wyrażenie ma postać

$$\Delta_{kl} = \underline{U}_k \underline{I}_l - 0 \underline{I}_k = \underline{U}_k \underline{I}_l$$

Stąd ostatecznie kwadrat mocy deformacji (26c) jest sumą

$$(27) \quad Q_D^2 = \frac{1}{2} \sum_k \sum_l U_k^2 U_l^2 |\underline{Y}_k - \underline{Y}_l|^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_k U_k^2 \right) \left(\sum_l I_l^2 \right)$$

Z powyższego wzoru widać, że moc deformacji znika wtedy i tylko wtedy, gdy jednakowe są zespolone admitancje wszystkich harmonicznymi i nie istnieją prądy obcych harmonicznymi.

Dotychczas moc deformacji była określana przez wartości mocy pozornej, czynnej i biernej. Natomiast

wprowadzona wyżej tożsamość wrocławska pozwala wyrazić moc deformacji bezpośrednio przez wartości zespolone wyższych harmonicznych.

Termin „deformacja” został dość wcześnie wprowadzony w literaturze (łącznie z mocą bierną Budeanu), jednak brak było wyjaśnienia na czym w istocie polega przyczyna jej występowania. W świetle powyższych rozważań występowanie mocy deformacji jest synonimem braku równości między admitancjami harmonicznymi oraz istnienia harmonicznymi obcych (generowanych w odbiorniku).

Interpretacja energetyczna tożsamości wrocławskiej w dziedzinie czasu

Rozpisując podwójną całkę postaci

$$\int_a^b \int_a^b [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 dx dy$$

otrzymuje się tożsamość wrocławską będącą rozszerzeniem nierówności całkowej Buniakowskiego-Schwarza; do postaci tożsamości

$$(28) \quad \left[\int_a^b f^2(x) dx \right] \left[\int_a^b g^2(x) dx \right] - \left[\int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 dx dy \geq 0$$

Tożsamość wrocławska dobrze ilustruje słuszność nierówności Buniakowskiego-Schwarza oraz wyjaśnia pewną tajemniczość w spełnianiu przez dwie dowolne funkcje nierówności, którego to wyjaśnienia nie dostarcza klasyczny dowód nierówności.

Wprowadzając funkcje czasowe napięcia i prądu uzyskujemy tożsamość wrocławską w postaci energetycznej w dziedzinie czasu,

$$(29) \quad \left[\int_0^T u^2(t) dt \right] \left[\int_0^T i^2(t) dt \right] - \left[\int_0^T u(t)i(t) dt \right]^2 = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T [u(t)i(\tau) - u(\tau)i(t)]^2 dt d\tau$$

Po obustronnym podzieleniu powyższej tożsamości przez T^2 uzyskuje się postać

$$\|u\|^2 \|i\|^2 - (u, i)^2 = \frac{1}{2T^2} \int_0^T \int_0^T [u(t)i(\tau) - u(\tau)i(t)]^2 dt d\tau$$

$$S^2 - P^2 = Q_A^2$$

Stąd wynika całkowita postać kwadratu mocy biernej absolutnej Fryzego, wyrażona przez przebiegi napięcia i prądu odbiornika

$$(30) \quad Q_A^2 = \frac{1}{2T^2} \int_0^T \int_0^T [u(t)i(\tau) - u(\tau)i(t)]^2 dt d\tau$$

Ze wzoru (30) wynika, istotne w teorii pełnej kompensacji, stwierdzenie o jednoznacznym powiązaniu mocy biernej absolutnej Q_A z prądem czynnym Fryzego.

Bezpośrednim wnioskiem wynikającym z wrocławskiej tożsamości energetycznej jest twierdzenie o zerowej mocy biernej Fryzego.

Mianowicie, gdy prąd w linii jest prądem Fryzego

$$i(t) = G_e u(t), \quad \|i\| = G_e \|u\|,$$

wtedy

$$S = \|u\| \|i\| = G_e \|u\|^2, \quad P = (u, i) = G_e \|u\|^2$$

$$Q_A = \sqrt{S^2 - P^2} = 0$$

Odwrotnie, gdy

$$Q_A = 0,$$

wtedy zawarte we wzorze (30) wyrażenie zeruje się

$$u(t)i(\tau) - u(\tau)i(t) = 0, \quad \text{dla } 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq \tau \leq T$$

jeżeli w pewnej chwili $t=t_1$ istnieje niezerowa wartość napięcia,

$$u(t_1) \neq 0,$$

to istnieje skończona wartość ilorazu

$$\frac{i(t_1)}{u(t_1)} = G_1, \quad \text{czyli } i(t_1) = G_1 u(t_1)$$

Po podstawieniu do (30)

$$u(t_1)i(\tau) - u(\tau)i(t_1) = u(t_1)i(\tau) - u(\tau)[G_1 u(t_1)] = u(t_1)[i(\tau) - G_1 u(\tau)] = 0, \quad \text{dla } 0 \leq \tau \leq T$$

czyli

$$i(\tau) = G_1 u(\tau), \quad \text{dla } 0 \leq \tau \leq T,$$

Stąd ostatecznie wynika zależność dla prądu w linii wyrażona wzorem

$$i(t) = G_e u(t), \quad \text{dla } 0 \leq t \leq T,$$

$$G_e = \frac{(u, i)}{\|u\|^2} = \frac{(u, G_1 u)}{\|u\|^2} = G_1$$

A więc odbiornik nie pobiera mocy biernej absolutnej $Q_A=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy przez linię płynie prąd czynny Fryzego.

Można również powiedzieć, że stałość ilorazu prądu $i(t)$ do napięcia $u(t)$ gwarantuje znikanie mocy biernej Fryzego $Q_A=0$. I odwrotnie przyczyną niezerowej mocy biernej Fryzego jest zmienność w czasie ilorazu prądu do napięcia.

Z zerowania się mocy biernej absolutnej Fryzego wynika na podstawie (23) również zerowanie się mocy biernej Budeanu Q_B oraz mocy biernej deformacji Q_D .

W dalszej części opracowania przedstawiono strukturę układów filtrujących z możliwością doboru parametrów umożliwiających pełną realizację kompensacji składowych biernych prądu, jak również eliminację harmonicznymi generowanych w obwodach nieliniowych.

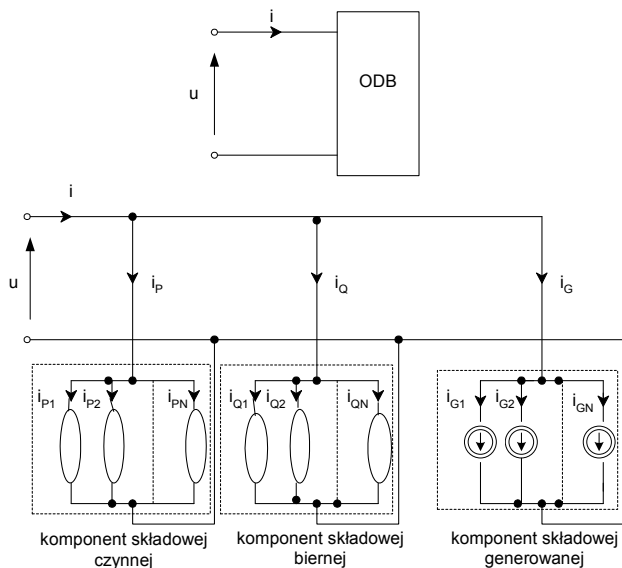
Metoda dekompozycji odbiornika w dziedzinie częstotliwości jako podstawa kompensacji filtracyjno łańcuchowej

Na wstępie zostaną zdefiniowane komponenty czynne i bierne odbiornika oraz podana konstrukcja struktury układu kompensacyjnego i eliminującego.

Podstawą określenia komponentów odbiornika są przebiegi sygnałów napięcia i prądu przedstawione przez rozwinięcia wyrażone wzorami (4),(5).

Zasada dekompozycji polega na tym, że dla zadanych sygnałów napięcia i prądu na zaciskach odbiornika tworzy się dwa układy zastępcze tak zwane komponenty: czynny i bierny mające tę własność, że prąd płynący w komponencie czynnym jest składową czynną prądu i_p , a prąd płynący w komponencie biernym jest składową bierną prądu i_Q .

Prostą strukturę komponentów pokazano na rysunku (rys3) złożoną z gałęzi równoległych tworzących ścieżki przepływu wszystkich harmonicznych. Każda gałąź jest łańcuchem ogniów dostrójonych do przepuszczania tylko jednej harmonicznej a blokowania pozostałych.



Rys.3 Dekompozycja odbiornika na część czynną, bierną i generowaną odpowiadające wyrażeniu (6)

Idea polega na utworzeniu filtra o konfiguracji łańcuchowej przepuszczającej wybrane pojedyncze harmoniczne i blokującej wszystkie pozostałe. W każdym komponencie realizowana jest oddzielna ścieżka dla każdej harmonicznej.

W każdej ścieżce dla rozpatrywanych kolejnych ogniów wyższych harmonicznych z zakresu $1 \leq n \leq N$ wymagane jest: 1) przepuszczanie n -tej harmonicznej (tylko) co zapewnia rezonans szeregowy wyrażony równaniem

$$n\omega L_n = \frac{1}{n\omega C_n}$$

2) blokowanie pozostałych harmonicznych dla $k \neq n$ co zapewnia rezonans równoległy, dla $k < n$

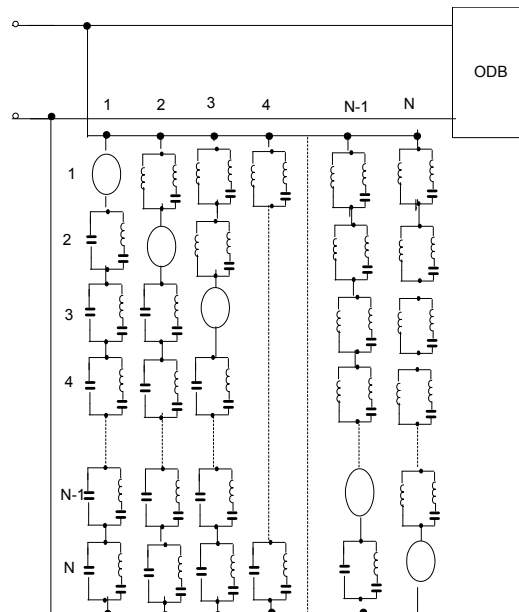
$$k\omega(L_n + L_{nk}) = \frac{1}{k\omega C_n}$$

dla $k > n$

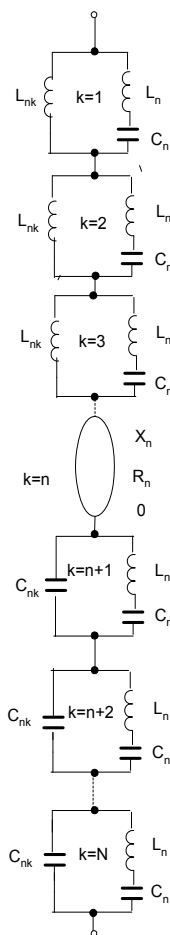
$$k\omega L_n = \frac{1}{k\omega} \left(\frac{1}{C_{nk}} + \frac{1}{C_n} \right)$$

Z podanych wzorów, zakładając jeden z elementów np. L_n oblicza się pozostałe C_n , L_{nk} , C_{nk} . wszystkich ogniów łańcucha rys.5 dla $k \neq n$. Ogniwo dla $k=n$ nazwane głównym (zaznaczone na rysunkach rys.4 ,5 w postaci elipsy) zawiera parametry dla n -tej harmonicznej odbiornika

$$(31) \quad \begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n^2 \omega^2 L_n}, & n=1,2,3,\dots,N \\ L_{nk} &= \left(\frac{n^2}{k^2} - 1 \right) L_n, & k < n \\ C_{nk} &= \frac{1}{(k^2 - n^2) \omega^2 L_n}, & k > n \end{aligned}$$



Rys.4 Układ o strukturze łańcuchowej realizujący warunki wydzielenia komponentów czynnego i biernego oraz kompensatora mocy biernej i eliminatora harmonicznych generowanych



Rys.5 Łańcuch ogniów filtrujących dla $1 \leq n \leq N$

łańcuch przedstawiony na rysunku (rys.5) ma tyle ogniów ile wynosi liczba uwzględnianych harmonicznych. Każde ogniwo przepuszcza tylko jedną harmoniczną o numerze n i blokuje pozostałe dla $k < n$ i $k > n$. Ogniwo główne stanowi element modelujący charakter komponentu jako element czynny, bierny lub zwierający.

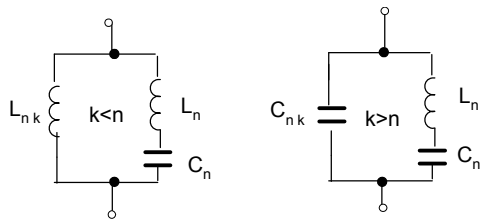
W prezentowanej metodzie struktura i parametry komponentu biernego stanowią podstawę do utworzenia kompensatora. Wystarczy zmienić na wartości przeciwne parametry ogniów głównych

$$X_n^c = -X_n$$

(z charakteru na przykład indukcyjnego na pojemnościowy i odwrotnie).

W przypadku eliminacji istniejących w prądzie obcych harmonicznych (generowanych) ogniwo główne jest elementem zwierającym ($Z_n=0$).

Ogniwo główne przy modelowaniu komponentu czynnego zawiera rezystancję dla n -tej harmonicznej $R_n > 0$ lub $R_n < 0$, komponentu biernego zawiera reaktancję X_n a dla eliminatora harmonicznych impedancję zerową.



Rys.6 Ogniwa łańcucha filtra przepustowo-blokujących. Przepuszczające harmoniczne krotności n , natomiast blokujące harmoniczne mniejsze i większe $k < n, k > n$, wzór (31)

Zagadnienie nierealizowalności pełnej kompensacji odbiornika jednym elementem reaktacyjnym C lub L

Przedstawiona wyżej metoda kompensacji filtracyjno-łańcuchowej jest realizowalna w dziedzinie częstotliwości dla określonej skończonej liczby harmonicznych. Wymaga jednak budowy układu kompensującego o strukturze złożonej z wielu elementów (ogniw łańcucha).

Rozwiązanie problemu kompensacji (redukcji prądu) w dziedzinie czasu przy wykorzystaniu tylko jednego elementu reaktacyjnego kondensatora lub induktora C, L sprowadza się do wyznaczenia minimum kwadratu normy prądu w linii zasilającej

$$\|i_t\|^2 = \|C\dot{u} + i\|^2 = \min(C), \quad \text{gdzie } \dot{u} = \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dC} \|C\dot{u} + i\|^2 = 0$$

$$(32) \quad \text{stąd} \quad \frac{d}{dC} [C^2 \|\dot{u}\|^2 + 2C(\dot{u}, i) + \|i\|^2] = 0$$

$$\text{czyli} \quad C = -\frac{(\dot{u}, i)}{\|\dot{u}\|^2}, \quad \text{przy } (\dot{u}, i) < 0 (*)$$

Wynik wyrażony wzorem (32) dla pojemności C jest zgodny z wartością pojemności optymalnej podanej w [19].

Przy odbiorniku, w którym ostatni warunek (*) nie jest spełniony, poszukiwanym elementem kompensującym może być induktor o indukcyjności L . Przy założeniu, że napięcie odbiornika nie zawiera składowej stałej

$$\|i_t\|^2 = \left\| \frac{1}{L} \ddot{u} + i \right\|^2 = \min(L), \quad \text{gdzie } \ddot{u} = \int u dt, \quad \langle u \rangle = 0$$

$$(33) \quad \frac{d}{dL} \left\| \frac{1}{L} \ddot{u} + i \right\|^2 = 0$$

$$\text{stąd} \quad \frac{d}{dL} \left[\frac{1}{L^2} \|\ddot{u}\|^2 + 2 \frac{1}{L} (\ddot{u}, i) + \|i\|^2 \right] = 0$$

$$\text{czyli} \quad \frac{1}{L} = -\frac{(\ddot{u}, i)}{\|\ddot{u}\|^2}, \quad \text{przy } (\ddot{u}, i) < 0 (**)$$

W przypadku, gdy nie jest spełniony żaden z ostatnich warunków wyrażonych nierównościami (*), (**) wtedy nie jest możliwa nawet częściowa kompensacja w dziedzinie czasu jednym elementem C lub L i należy zastosować np. kompensację filtracyjno-łańcuchową w dziedzinie częstotliwości z wybraną liczbą uwzględnianych harmonicznych N .

Z wzorami określającymi minimalne wartości prądu (32), (33) mogą być podane wzory określające wartości współczynnika mocy (34) po kompensacji jednoparametrowej λ_C, λ_L , przy czym λ jest współczynnikiem mocy przed kompensacją.

$$(34) \quad \lambda_C = \lambda / \sqrt{1 - \frac{(\dot{u}, i)^2}{\|\dot{u}\|^2 \|i\|^2}}, \quad \text{dla parametru } C (*)$$

$$\lambda_L = \lambda / \sqrt{1 - \frac{(\ddot{u}, i)^2}{\|\ddot{u}\|^2 \|i\|^2}}, \quad \text{dla parametru } L (**)$$

$$\lambda = \frac{(u, i)}{\|u\| \|i\|}$$

Stąd wynika możliwość wyznaczenia i oceny zmian współczynnika strat nadmiarowych κ przy jednoparametrowej kompensacji.

W podanym dalej przykładzie przedstawiono również przypadek nierealizowalności kompensacji jednym elementem C, L .

Minimalizacja wartości skutecznej prądu podstawą wprowadzenia prądu czynnego Fryzego.

Wyznaczenie minimum kwadratu składowej czynnej prądu linii

$$I_p^2 = \sum_{k=0}^N (U_k g_k)^2$$

z warunkiem zachowania całkowitej mocy czynnej pobieranej przez odbiornik

$$P = \sum_{k=0}^N U_k^2 g_k$$

sprowadza się do wyznaczenia warunkowego minimum funkcji Φ ze współczynnikiem Lagrange'a μ , w postaci

$$\Phi = \sum_{k=0}^N U_k^2 g_k^2 + \mu \left(P - \sum_{k=0}^N U_k^2 g_k \right)$$

Warunek minimum określony jest zerowaniem pochodnych

$$\frac{\partial \Phi}{\partial g_k} = U_k^2 2g_k - \mu U_k^2 = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = P - \sum_{k=0}^N U_k^2 g_k = 0,$$

$$\text{dla } k = 0, 1, 2, \dots, N$$

z których po obliczeniu, otrzymuje się warunek

$$\mu = 2g_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N$$

a stąd

$$P = \sum_{k=0}^N U_k^2 \frac{\mu}{2}$$

czyli

$$\mu = \frac{2P}{\sum_{k=0}^N U_k^2}$$

oraz wynik końcowy

$$g_k = \frac{\mu}{2} = \frac{P}{\sum_{k=0}^N U_k^2} = \frac{P}{U^2} = G_e = \frac{1}{R_e}$$

Otrzymane rozwiązanie oznacza, że minimalna wartość skuteczna składowej czynnej określona jest wzorem

$$(35) \quad I_{P \min} = \sqrt{\sum_{k=0}^N U_k^2 G_e^2} = G_e U = I_a = G_e \|u(t)\| = \|i_a\|$$

$$i_a = i_F = G_e u = \frac{P}{U^2} u$$

realizowana jest przez prąd czynny Fryzego [13, 14].

Sformułowanie problemów metody kompensacji w dziedzinie czasu.

W rozwoju historycznym teorii mocy w dziedzinie czasu już w jej zaraniu podstawowe znaczenie spełniła koncepcja Fryzego wiążąca moce ze składowymi prądami [13,14].

Jako podstawę koncepcji Fryzego przyjmujemy rozwiązanie zadania minimalizacji wartości skutecznej składowej biernej prądu

$$(36) \quad \|i - Au\|^2 = \min(A)$$

w którym wyznaczany jest parametr A .

Po obliczeniu pochodnej

$$(37) \quad \frac{\partial}{\partial A} \|i - Au\|^2 = 0$$

Uwzględniając, że

$$\|i - Au\|^2 = (i - Au, i - Au) = \|i\|^2 - 2A(u, i) + A^2 \|u\|^2$$

oraz wzór (3) otrzymuje się konduktancję ekwiwalentną

$$(38) \quad A = \frac{(u, i)}{\|u\|^2} = \frac{P}{U^2} = G_e = \frac{1}{R_e}$$

Uzyskane rozwiązanie zadania minimalizacyjnego pozwala na jednoznaczną dekompozycję prądu na dwie składowe ortogonalne

$$(39) \quad i = i_a + i_b, \quad (i_a, i_b) = 0$$

gdzie pierwsza składowa z wzoru (39) nazywana jest składową czynną prądu w sensie Fryzego, która jest współliniowa z napięciem zgodnie ze wzorem (35)

$$(40) \quad i_a = G_e u, \quad \|i_a\| = G_e \|u\|$$

$$P = G_e \|u\|^2 = \|u\| G_e \|u\| = \|u\| \|i_a\|$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy spełnienie warunku ortogonalności wyrażonego drugim równaniem we wzorze (39) przy uwzględnieniu zależności (40)

$$(41) \quad (i_a, i_b) = (i_a, i - i_a) = (i_a, i) - (i_a, i_a) =$$

$$= (G_e u, i) - \|i_a\|^2 = G_e P - G_e^2 \|u\|^2 =$$

$$= G_e P - G_e P = 0$$

przy czym $i_b = i - i_a$ oznacza składową bierną prądu w sensie Fryzego.

Na podstawie udowodnionej ortogonalności otrzymuje się warunek trójkąta dla norm prądu wyrażony wzorem

$$(42) \quad \|i\|^2 = (i, i) = (i_a + i_b, i_a + i_b) =$$

$$= (i_a, i_a) + 2(i_a, i_b) + (i_b, i_b) = \|i_a\|^2 + \|i_b\|^2$$

Z uzyskanego warunku trójkąta dla wartości skutecznych prądu wynika ważny dla zastosowań warunek trójkąta mocy.

Mnożąc stronami równanie (42) przez kwadrat normy napięcia otrzymuje się równanie postaci

$$(43) \quad \|u\|^2 \|i\|^2 = \|u\|^2 \|i_a\|^2 + \|u\|^2 \|i_b\|^2,$$

Wprowadzając typowe oznaczenia dla mocy

$$(44) \quad P = G_e \|u\|^2 = \|u\| \|i_a\|, \quad Q_A = \|u\| \|i_b\|, \quad S = \|u\| \|i\|$$

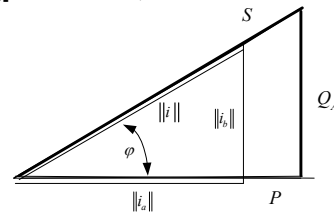
otrzymuje się związek dla trójkąta mocy

$$(45) \quad S^2 = P^2 + Q_A^2$$

oraz

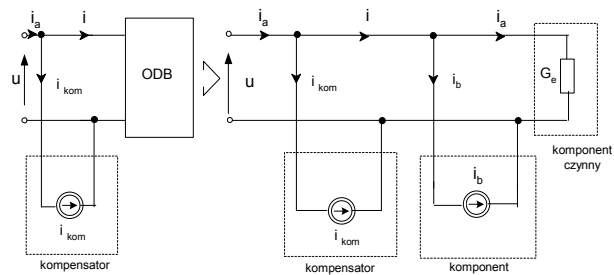
$$(46) \quad \cos \varphi = \frac{\|i_a\|}{\|i\|} = \frac{P}{S}, \quad \sin \varphi = \frac{\|i_b\|}{\|i\|} = \frac{Q_A}{S}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\|i_b\|}{\|i_a\|} = \frac{Q_A}{P}$$

gdzie -przez S, P, Q_A oznaczono moc pozorną, czynną i bierną absolutną mierzone w jednostkach $1[S]=1VA, 1[P]=1W, 1[Q]=1VAr=1var$,



Rys.7 Graficzne przedstawienie trójkąta norm prądów (wartości skutecznych prądów) i mocy

Należy podkreślić, że podobieństwo powyższych wzorów i trójkąta mocy do znanych zależności dla prądu sinusoidalnego jest tylko zewnętrzne bo w istocie dotyczą one bardzo złożonych sygnałów odkształconych.



Rys 8 Układ zastępczy odbiornika po dekompozycji prądów Fryzego oraz układ kompensatora mocy biernej absolutnej

Na powyższym schemacie rys.8 przedstawiono odbiornik oraz jego komponenty i układ kompensatora mocy biernej absolutnej Fryzego. Przy pełnej kompensacji (gdy $Q_A=0$) komponent czynny jest rezystorem o konduktancji ekwiwalentnej G_e , prąd kompensatora i_{komp} ma wartość przeciwną do składowej biernej prądu i_b w sensie Fryzego, stąd $\lambda = \cos \varphi = 1, \varphi = 0$.

Przy częściowej kompensacji, w celu poprawy współczynnika mocy z wartości $\lambda = \cos \varphi$, do wartości $\lambda' = \cos \varphi'$, wielkość prądu kompensatora powinna być wyrażona wzorem

$$(47) \quad i_{kom} = \gamma i_b, \quad \text{gdzie } \gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi} - 1, \quad (u, i_b) = 0$$

W bardziej ogólnym ujęciu energetycznym komponent czynny odbiornika jest absorberem energii (składowa mocy chwilowej o przebiegu pulsującym odpowiada tylko energii pobieranej), komponent bierny odbiornika jest reflektorem energii (składowa mocy chwilowej biernej o przebiegu oscylującym pobiera i oddaje jednakowe wartości energii) co wyrażone jest przez zależności wartości średnich

$$p_a = u i_a = G_e u^2, \quad p_b = u i_b, \quad \langle p_a \rangle = P \geq 0, \quad \langle p_b \rangle = 0$$

Kompensator wraz z komponentem biernym przy pełnej kompensacji redukuje całkowicie funkcję reflektora energii.

W tym sformułowaniu, można uważać, że w teorii obwodów jako układach o parametrach skupionych, kompensacja mocy biernej Fryzego jest analogią dopasowania falowego. W aspekcie ogólnej teorii propagacji pola elektromagnetycznego kompensator realizuje element dopasowania falowego..

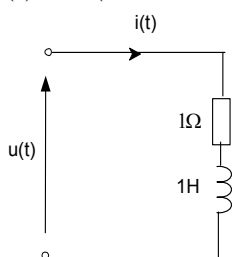
Przykłady zastosowania prezentowanych metod

W celu ilustracji zastosowania opisywanych metod, rozpatrzone będą przykłady odbiornika liniowego, a w

zakresie obwodów nieliniowych rozważany będzie przykład rezystora i diody idealnej oraz dławika nieliniowego.

i) W przykładzie odbiornika liniowego rozważana jest gałąź szeregową R, L (rys.9) zasilana napięciem odkształconym w postaci

$$u(t) = \sqrt{2}(\sin \omega t - \sin 3\omega t) \text{ V}, \quad \omega = 1 \text{ s}^{-1}$$



Rys.9 Schemat rozpatrywanej gałęzi R,L

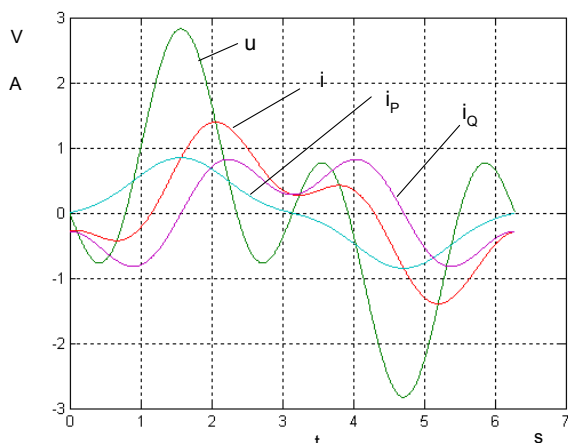
Obliczony przebieg prądu wyraża się wzorem

$$i = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t - \varphi_1) - \frac{1}{\sqrt{10}} \sin(3t - \varphi_3) \right], \quad \text{tg}(\varphi_1) = 1, \text{tg}(\varphi_3) = 3$$

Po wydzieleniu składowych czynnych i biernych przebiegu prądu otrzymuje się zależność

$$i = i_p + i_Q = \sqrt{2}(0,5 \sin t - 0,1 \sin 3t) + \\ -\sqrt{2}(0,5 \cos t - 0,3 \cos 3t) \text{ A}$$

Przebiegi napięcia i prądów przedstawiono na wykresach (rys.10)



Rys.10 Wykresy przebiegów napięcia, prądu, składowej czynnej i biernej prądu, $U=1\text{V}, \omega=1\text{s}^{-1}, R=1\Omega, L=1\text{H}$

a) Obliczenia w dziedzinie częstotliwości

W celu pełnego zestawienia wyników, obliczamy wartości skuteczne prądów, napięć i mocy

$$I_{P1} = 0,5 \text{ A}, I_{P3} = 0,1 \text{ A}, I_{Q1} = 0,5 \text{ A}, I_{Q3} = 0,3 \text{ A}$$

$$I_P = \sqrt{I_{P1}^2 + I_{P3}^2} = \frac{\sqrt{26}}{10} \text{ A}, I_Q = \sqrt{I_{Q1}^2 + I_{Q3}^2} = \frac{\sqrt{34}}{10} \text{ A},$$

$$I = \sqrt{I_P^2 + I_Q^2} = \frac{\sqrt{60}}{10} \text{ A}, \quad U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ V}$$

Wartości mocy czynnych i biernych

$$P_1 = U_1 I_{P1} = 0,5 \text{ W}, P_3 = U_3 I_{P3} = 0,1 \text{ W}, P = P_1 + P_3 = 0,6 \text{ W}$$

$$Q_1 = U_1 I_{Q1} = 0,5 \text{ var}, Q_3 = U_3 I_{Q3} = 0,3 \text{ var}, Q = Q_1 + Q_3 = 0,8 \text{ var}$$

Wartość mocy pozornej

$$S = UI = \sqrt{2} \frac{\sqrt{60}}{10} = \frac{\sqrt{30}}{5} \text{ VA}$$

Współczynnik mocy przed kompensacją

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{3}{\sqrt{30}} = 0,547$$

Współczynnik strat nadmiarowych

$$\kappa = \left[\left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 - 1 \right] 100\% = \left(\frac{30}{9} - 1 \right) 100 = 233,3\%$$

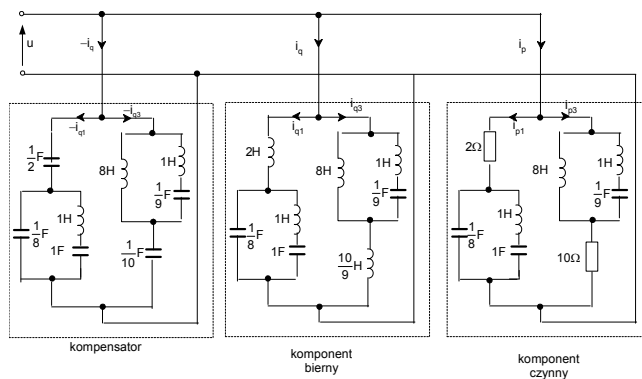
Współczynnik mocy po kompensacji filtracyjnej (mocy reaktancyjnej) przyjmuje wartość maksymalną

$$\lambda_{\max} = \frac{P}{UI_P} = \frac{6}{\sqrt{52}} = 0,832$$

Współczynnik strat nadmiarowych po kompensacji filtracyjnej mocy biernej

$$\kappa = \left(\frac{1}{\lambda_{\max}^2} - 1 \right) 100 = \left(\frac{52}{36} - 1 \right) 100 = 44,4\%$$

Widoczny jest znaczny bo ponad 5-krotny spadek strat nadmiarowych mocy w linii przesyłowej. Należy podkreślić, że kompensacyjna filtracyjna redukuje tylko moc bierną Q_B , bez wpływu na moc deformacji Q_D , nie zapewnia więc możliwości poprawy współczynnika mocy do wartości 1 i pełnej redukcji strat nadmiarowych.



Rys.11 Struktura i parametry elementów kompensatora, komponentu biernego i komponentu czynnego gałęzi szeregowej $R=1\Omega, L=1\text{H}$ (rys.9).

Obliczenie parametrów elementów komponentów czynnego i biernego oraz kompensatora

$$R_1 = \frac{U_1}{I_{P1}} = 2\Omega, \quad R_3 = \frac{U_3}{I_{P3}} = 10\Omega$$

$$X_1 = \frac{U_1}{I_{Q1}} = 2\Omega, \quad X_3 = \frac{U_3}{I_{Q3}} = \frac{10}{3}\Omega$$

Na podstawie powyższych wartości i przy wykorzystaniu wzorów ogniw filtracyjnych (31) obliczamy pozostałe parametry elementów komponentów zastępczych oraz kompensatora (rys. 11).

b) Obliczenia kompensacji jednoparametrowej w dziedzinie czasu

Przy tych samych przebiegach napięcia u i prądu i , w obwodzie z rys.9 obliczamy kolejno

$$(u, u) = 2 \text{ V}^2, \quad (i, i) = 0,6 \text{ A}^2,$$

$$(u, i) = 0,6 \text{ W}, \quad (\dot{u}, i) = -1,4 \text{ VA/s}$$

$$(\dot{u}, \dot{u}) = 10 \text{ V}^2/\text{s}^2$$

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{2}V, \quad \|i\| = \sqrt{(i,i)} = \frac{\sqrt{60}}{10} = 0,774A,$$

$$S = \|u\| \|i\| = \frac{\sqrt{30}}{5} VA, \quad \lambda = \frac{P}{S} = \frac{(u,i)}{\|u\| \|i\|} = 0,547$$

Dla kompensacji jednoparametrowej z wzoru (32) warunek realizacji jest ujemny, stąd

$$C = -\frac{(\dot{u}, i)}{\|u\|^2} = -\frac{-1,4}{10} = 0,14F$$

$$\lambda_{\max} = \lambda / \sqrt{1 - \frac{(\dot{u}, i)^2}{\|u\|^2 \|i\|^2}} = 0,547 / \sqrt{1 - \frac{1,4^2}{10 \cdot 0,6}} = 0,666$$

$$\kappa' = \left(\frac{1}{\lambda_{\max}^2} - 1 \right) 100 = \left(\frac{1}{0,666^2} - 1 \right) 100 = 125\%$$

Po kompensacji jednoparametrowej występuje poprawa współczynnika mocy z wartości $\lambda=0,547$ do $\lambda'=0,666$ oraz zmniejszenie strat nadmiarowych z $\kappa=233,3\%$ do $\kappa'=125\%$. Wynik jest jednak mniej korzystny w porównaniu do kompensacji łańcuchowej, gdzie $\lambda=0,832$, $\kappa=44,4\%$

c) Dla danych z rys.9 w wyniku kompensacji w dziedzinie czasu przy zastosowaniu kompensatora prądu biernego Fryzego otrzymujemy

$$u = \sqrt{2} (\sin t - \sin 3t) V,$$

$$i = \sqrt{2} (0,5 \sin t - 0,5 \cos t - 0,1 \sin 3t + 0,3 \cos 3t) A,$$

$$P = (u, i) = 0,6W$$

$$\|u\| = \sqrt{2}V, \quad \|i\| = \frac{\sqrt{60}}{10} A,$$

$$S = \|u\| \|i\| = \frac{\sqrt{30}}{5} VA, \quad \lambda = \frac{P}{S} = 0,547, \quad \kappa = 233,3\%$$

$$i_a = \frac{P}{\|u\|^2} u = \sqrt{2} (0,3 \sin t - 0,3 \sin 3t) A$$

$$i_b = i - i_a = \sqrt{2} (0,2 \sin t - 0,5 \cos t + 0,2 \sin 3t + 0,3 \cos 3t) A$$

$$i_{kom} = -i_b, \quad \lambda' = 1, \quad \kappa' = 0$$

Kompensacja mocy biernej Fryzego polega na zastosowaniu układu bezstratnego kompensatora realizowanego przez wymuszone źródło prądu $i_{kom} = -i_b$

ii) Dla układu o danych jak na rysunku rys.12 ,wykonać kompensację pełną Fryzego

$$u = 1 + \sqrt{2} \sin t, \quad i = \sqrt{2} \sin t$$

$$P = (u, i) = 1W, \quad \|u\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}V, \quad \|i\| = 1A$$

$$G_e = \frac{P}{\|u\|^2} = \frac{1}{2} = 0,5S$$

$$i_a = G_e u = (0,5 + \sqrt{2} \cdot 0,5 \sin t) A,$$

$$i_b = i - i_a = (-0,5 + \sqrt{2} \cdot 0,5 \sin t) A, \quad i_{kom} = -i_b$$

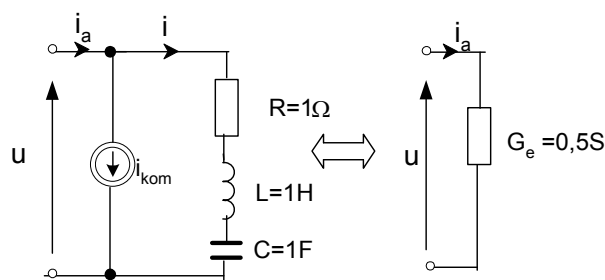
$$(u, i_{kom}) = 0$$

$$\lambda = \frac{P}{\|u\| \|i\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707, \quad \kappa = \left(\frac{1}{0,5} - 1 \right) 100 = 100\%$$

$$\lambda_{\max} = \frac{P}{\|u\| \|i_a\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{(0,5^2 + 0,5^2)}} = 1, \quad \kappa' = 0$$

Należy podkreślić, że kompensator odtwarza składowa stałą w prądzie podczas, gdy w układzie nieskompensowanym jest ona nieobecna. Oznacza to, że kompensator musi zawierać elementy aktywne, pozostając

w całości układem pasywnym (konserwatywnym [20]). Interesujące jest w tym przypadku dwukrotne obniżenie strat mocy w linii, przy redukcji całkowitej straty nadmiarowej.



Rys.12. Układ szeregowy RLC z kompensatorem zasilany napięciem ze składową stałą

iii) Dla odbiornika przedstawionego na rys.13 dany są przebiegi napięcia i prądu

$$u(t) = \sqrt{2} (U_1 \sin \omega t + U_3 \sin 3\omega t)$$

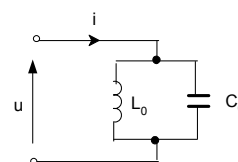
$$i(t) = \sqrt{2} \left[I_1 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + I_3 \sin \left(3\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

przy czym

$$\frac{1}{3} U_1 I_1 < U_3 I_3 < 3 U_1 I_1,$$

oraz spełnione są nierówności

$$1 + \left(\frac{U_3}{U_1} \right)^2 < \omega^2 L_0 C_0 < \frac{1 + \frac{1}{9} \left(\frac{U_3}{U_1} \right)^2}{1 + \left(\frac{U_3}{U_1} \right)^2}$$



Rys.13 Przykład odbiornika L_0, C_0 niekompensowalnego jednym elementem reaktacyjnym L lub C

Obliczamy

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \sqrt{2} \omega (U_1 \cos \omega t + 3U_3 \cos 3\omega t)$$

$$\ddot{u} = \int u dt = \sqrt{2} \frac{1}{\omega} \left(-U_1 \cos \omega t - \frac{1}{3} U_3 \cos 3\omega t \right)$$

Sprawdzamy warunki

$$(\dot{u}, i) = \omega (-U_1 I_1 + 3U_3 I_3) = 3\omega \left(U_3 I_3 - \frac{1}{3} U_1 I_1 \right) > 0$$

$$(\ddot{u}, i) = \frac{1}{\omega} \left(U_1 I_1 - \frac{1}{3} U_3 I_3 \right) = \frac{1}{3\omega} (3U_1 I_1 - U_3 I_3) > 0$$

A więc nie jest możliwa kompensacja jednym elementem C lub L z uwagi na niespełnienie warunków (32*) i (33**).

iv) W kolejnym przykładzie , rozważamy układ rezystora z diodą idealną jak na rysunku (rys.14) zasilany napięciem sinusoidalnym

$$u = U_m \sin \omega t, \quad \omega = 2\pi / T$$

Przebieg prądu przedstawiony jest zależnością

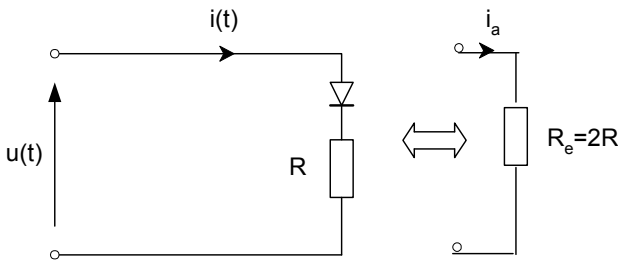
$$i = \frac{U_m}{2R} (\sin \omega t + |\sin \omega t|)$$

Z analizy Fouriera wynika jego rozkład na harmoniczne, wyrażony wzorem

$$i = \frac{U_m}{2R} \sin \omega t + \frac{U_m}{2\pi R} - \frac{U_m}{\pi R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)} \cos 2k\omega t$$

który w zapisie skróconym przyjmuje postać

$$i = i_1 + I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} i_{2k}$$



Rys.14 Układ rezystora z elementem diody idealnej i układ ekwiwalentny po pełnej kompensacji

Moc czynną pobieraną przez układ obliczamy z wzoru (3)

$$P = (u, i) = \frac{U_m^2}{4R}, \quad R_e = \frac{\|u\|^2}{P} = \frac{U_m^2}{2P} = 2R$$

Moc pozorna jest równa

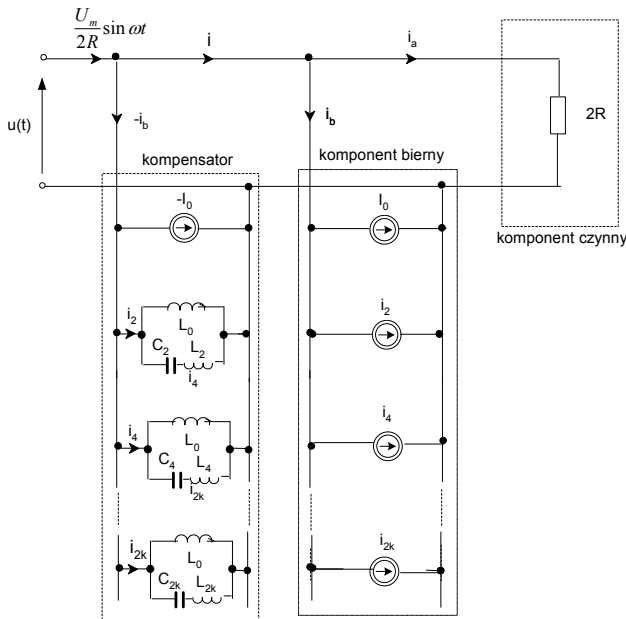
$$S = \|u\| \|i\| = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{U_m}{2R} = \sqrt{2} \frac{U_m^2}{4R} = \sqrt{2} P$$

Moc bierna absolutna w sensie Fryzego

$$Q_A = \sqrt{S^2 - P^2} = P$$

Współczynnik mocy

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$



Rys.15 Struktura komponentu czynnego i biernego oraz kompensatora dla układu szeregowego rezystora i diody idealnej przy zasilaniu sinusoidalnym

Po zastosowaniu kompensacji, polegającej na eliminacji harmonicznych generowanych prądu, współczynnik mocy wzrośnie do wartości $\lambda=1$. W tym przypadku kompensacja polega tylko na eliminacji generowanych parzystych harmonicznych i odtworzeniu składowej stałej.

Parametry ogniw filtra kompensującego z rysunku (rys.15) dobieramy z dwu warunków:

a) zwarcia każdej (2k-tej) harmonicznej przez rezonans szeregowy,

$$2k\omega L_{2k} - \frac{1}{2k\omega C_{2k}} = 0$$

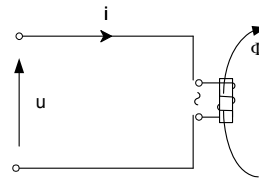
b) blokowanie (1-jej) harmonicznej przez rezonans równoległy

$$\omega L_0 = \frac{1}{\omega C_{2k}} - \omega L_{2k}$$

Przyjąć dowolnie L_0 , wyliczyć L_{2k}, C_{2k} dla $k=1, 2, \dots, N$ czyli

$$L_{2k} = \frac{L_0}{4k^2 - 1}, \quad C_{2k} = \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) C_0, \quad \omega^2 L_0 C_0 = 1$$

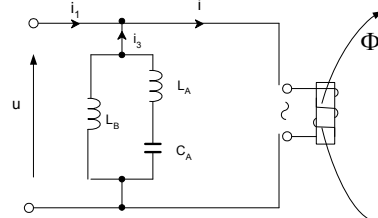
v) W następnym rozważanym przykładzie przedmiotem analizy jest bezstratny induktor nieliniowy (dławik) jak na rysunku (rys.16) o zadanej nieliniowej charakterystyce magnesowania $i=F(\Phi)$, zasilany napięciem sinusoidalnym



Rys.16 Schemat induktora nieliniowego
Zakładamy, że dla zaznaczonych na rysunku (rys.16) wielkości u, i, Φ określone są zależności

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t, \quad u = z \frac{d\Phi}{dt} = z\omega \Phi_m \cos \omega t = U_m \cos \omega t$$

$$i = \alpha \Phi + \beta \Phi^3 = \left(\alpha \Phi_m + \frac{3}{4} \beta \Phi_m^3 \right) \sin \omega t - \frac{1}{4} \beta \Phi_m^3 \sin 3\omega t = I_{1m} \sin \omega t - I_{3m} \sin 3\omega t = i_1 + i_3$$



Rys.17 Układ idealnego nieliniowego dławika z filtrem eliminującym 3-cią harmoniczną

Parametry idealne L_B, L_A, C_A filtru kompensującego wyznaczamy z warunku rezonansu szeregowego dla 3-ciej harmonicznej i z warunku rezonansu równoległego dla 1-szej harmonicznej

$$3\omega L_A - \frac{1}{3\omega C_A} = 0, \quad \omega L_B + \omega L_A - \frac{1}{\omega C_A} = 0$$

stąd, przyjmując dowolną wartość L_A oblicza się wartości

$$C_A = \frac{1}{9\omega^2 L_A}, \quad L_B = 8L_A$$

Harmoniczna trzecia zostaje usunięta z prądu zasilania i nie wchodzi do sieci (praktycznie przy dowolnie małej niezerowej rezystancji układu zasilającego).

Rozpatrywany układ jako bezstratny o charakterze indukcyjnym może być więc skompensowany całkowicie.

Wprowadzona na rysunku (rys.18) wielkość X_I oznacza reaktancję dla 1-szej harmonicznej określoną wzorem, która w kompensatorze ma być zrealizowana jako kondensator o pojemności C_K

$$X_1 = \frac{U_m}{I_{1m}} = \frac{z\omega}{\alpha + \frac{3}{4}\beta\Phi_m^2} = \frac{z\omega}{\alpha + \frac{3}{4}\beta\left(\frac{U_m}{z\omega}\right)^2} = \frac{1}{\omega C_K}$$

Z powyższego wzoru widoczna jest nieliniowa zależność parametru komponentu biernego od napięcia zasilania.

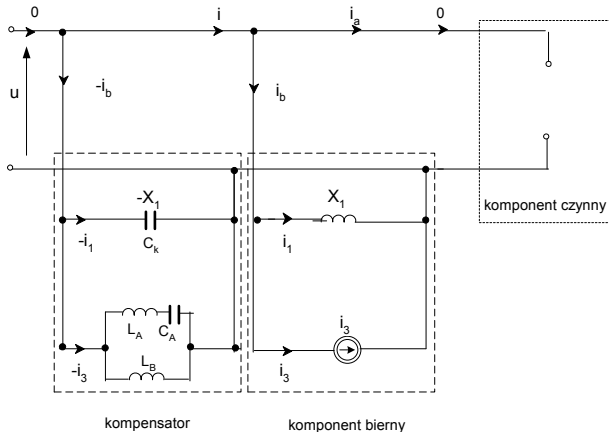
Fakt ten jest wykorzystywany w budowie stabilizatorów napięcia.

Amplituda prądu 3-ciej harmonicznej o wartości

$$I_{m3} = \frac{1}{4}\beta\Phi_m^3 = \frac{1}{4}a\beta\left(\frac{U_m}{z\omega}\right)^3$$

jest eliminowana (zwierana) w kompensatorze przez układ szeregowy L_A, C_A w rezonansie dla 3-ciej harmonicznej.

Z uwagi na bezstratność układu, komponent czynny jest pusty.



Rys.18 Struktura układów pełnej kompensacji prądu dla nieliniowego dławika bez strat

Podsumowanie

W ogólnym podsumowaniu rozważań, w celu ich uporządkowania, należy wskazać przyczyny powodujące różne kierunki ujęcia problematyki teorii mocy prądów odkształconych. Jako główną przyczynę należy wskazać różnice w sposobie dekompozycji i wydzielenia składowych prądu obciążenia.

Umownie można wskazać przynajmniej trzy rodzaje rozkładu prądu na: składowe naturalne (fizyczne) [11], ekwiwalentne (Fryzego) [13,14], mieszane (fizyczno-ekwiwalentne)[3,18]

$$i = i_p + i_Q + i_G,$$

$$i = i_a + i_b,$$

$$i = i_a + i_Q + i_d, \quad i_d = i_p - i_a + i_G = i_s + i_G$$

gdzie wprowadzone indeksy dla prądów oznaczają:

P -składowa czynna fizyczna, Q -składowa bierna fizyczna, a - składowa czynna Fryzego, b - składowa bierna Fryzego, d -składowa deformacji, s -składowa rozrzutu, G - składowa obca generowana.

Można zauważyć, że w prąd bierny Fryzego wchodzi jako części; składowe biernie, deformacji, rozrzutu, generowane.

Przedstawione metody kompensacji w pierwszej części opracowania filtracji łańcuchowej oraz następnie jedno parametrowej bazują na pierwszym rozkładzie fizycznym i tym samym mogą być realizowane przez układ kompensatora z elementami reaktancyjnymi LC.

W drugiej części opracowania przedstawiono metodę kompensacji, wynikającą z koncepcji teorii mocy Fryzego jako zastosowania kompensatora w postaci bezstratnego

(bez poboru mocy czynnej) źródła prądowego (wymuszalnika prądowego).

Podstawowym zadaniem kompensatora jest redukcja prądu, przez eliminację jego składowej bierniej w linii. Eliminacja ta jest równoważna dostarczeniu na zaciski odbiornika prądu biernego wytworzonego w kompensatorze. W układach sinusoidalnych rolę kompensatora spełnia kondensator, który pobierając moc bierną pojemnościową oddaje na zaciski odbiornika równą jej moc bierną indukcyjną.

Należy podkreślić, że w układach niesinusoidalnych, realizacja kompensacji w ogólnym przypadku wymaga zastosowania źródeł prądowych czyli elementów aktywnych ale bezstratnych. Tym samym kompensator w ogólnej klasyfikacji może być zarówno reaktancyjnym jak też niereaktancyjnym elementem konserwatywnym [20].

Ten rodzaj kompensacji uwzględniając dostępne metody rejestracji i przetwarzania danych w czasie rzeczywistym wpisuje się w rozwijaną obecnie problematykę kompensacji aktywnej.

W praktyce ostateczny wybór rodzaju kompensacji podlega ocenie ekonomicznej i porównaniu kosztów inwestycyjnych realizacji określonego typu kompensatora i korzyści eksploatacyjnych wynikających z obniżenia strat mocy w linii zasilającej.

Zakończenie

Problematyka kompensacji mocy prądów odkształconych ma ważny aspekt nie tylko teoretyczny ale również praktyczny. Obecnie widoczna jest tendencja wzrostu znaczenia ekonomicznego problemów kompensacji z uwagi na szerszą perspektywę zastosowania napędu elektrycznego w motoryzacji. Uważa się, że redukcja strat mocy w sieciach zasilających odległe stacje ładowania, nawet w wymiarze ułamka procentu, jest i będzie w sensie ekonomicznym głównym zadaniem energetyki w celu obniżenia kosztów dystrybucji energii elektrycznej.

Uwaga końcowa

W opracowaniu. zastosowano nową postać zależności matematycznej, wyjaśniającej istotę mocy deformacji i ważną równość dla bilansu mocy prądu odkształconego, którą nazwano wrocławską tożsamością matematyczną.

Przyjęta nazwa związana jest z Miastem szczególnie zasłużonych w dziedzinie zastosowań matematyków; jako miejscem urodzenia Karla Steinmetza w roku 1865 i śmierci Hugona Steinhausa w roku 1972.

Autorzy. Dr hab. inż. Adam Skopec, emerytowany prof. P.Wr. Politechnika Wroclawska, Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 53-370 Wrocław, Dr inż. Czesław Stec, Politechnika Wroclawska, Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 53-370 Wrocław, E-mail: czeslaw.stec@gmail.com

LITERATURA

- [1] Skopec A., Stec Cz., *Moc bierna absolutna jako podstawa teorii pełnej kompensacji prądu niesinusoidalnego w dziedzinie czasu w układach jednofazowych i trójfazowych*, Przegląd Elektrotechniczny, R.87 NR 1/2011, s. 220-22
- [2] Skopec A., Stec Cz.: *Metoda pełnej kompensacji mocy bierniej absolutnej prądów niesinusoidalnych układu trójfazowego czteroprzewodowego w dziedzinie czasu*, Przegląd Elektrotechniczny, R.89, NR 11/2013, s. 175-188
- [3] Skopec A. Stec Cz. : *Możliwość przedstawienia jednolitej nowej koncepcji mocy bierniej prądu niesinusoidalnego w dziedzinie czasu*, Przegląd Elektrotechniczny R.84 NR5/2008, s. 69-74
- [4] Skopec A., Stec Cz., Janik P., Waclawek Z.: *Teoretyczne aspekty realizacji pełnej kompensacji w obwodach prądu niesinusoidalnego*, Przegląd elektrotechniczny, R.88 NR 8/2012, s. 295-302

- [5] Skopec A. Stec Cz.: *Efektywna realizacja kompensacji pełnej optymalnej mocy biernej w układzie jednofazowym oraz trójfazowym 3 lub 4 przewodowym przy zasilaniu symetrycznym źródeł rzeczywistych i niesymetrycznym odbiorniku liniowym*, Przegląd Elektrotechniczny, R.91 NR 6/2015, s.171-176
- [6] Skopec A. Stec Cz.: *Strata minimalna i nadmiarowa w linii układu trójfazowego stowarzyszone z przepływem strumienia mocy pulsującej i oscylującej w dziedzinie czasu jako podstawa nowej interpretacji fizycznej i ekonomicznej kompensacji mocy biernej*, Przegląd Elektrotechniczny, R.93 NR 5/2017, s.48-56
- [7] Skopec A. Stec Cz.: *Metoda obliczania pełnej optymalnej kompensacji mocy biernej nieliniowych odbiorników jednofazowych lub trójfazowych niesymetrycznych przy zasilaniu źródłami rzeczywistymi sinusoidalnymi*, Przegląd Elektrotechniczny, R.90 NR 9/1014, s.229-233
- [8] Siwczyński M.: *O współzależności między mocą bierną a stabilnością napięcia zasilania w przypadku okresowych niesinusoidalnych przebiegów napięcia i prądu*, Przegląd Elektrotechniczny, R. 87 NR 6/2011, s.169-173
- [9] Siwczyński M.: *Energetyczna teoria obwodów*. Wydawnictwo Instytutu Gospodarki Surowcami i Energią PAN, Kraków 2003
- [10] Siwczyński M.: *Metody optymalizacyjne w teorii mocy obwodów elektrycznych*. Monografia 183; seria „Inżynieria Elektryczna”. Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 1995
- [11] Czarnecki L. S., *Currents Physical Components (CPC) concept: a fundamental for Power theory*, Przegląd Elektrotechniczny, R.84, NR 6/2008, s.28-37
- [12] Czarnecki L. S., *Moce w obwodach elektrycznych z niesinusoidalnymi przebiegami napięć i prądów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005
- [13] Fryze St.: *Wybrane zagadnienia teoretycznych podstaw elektrotechniki*, PWN Warszawa-Wrocław, 1966, Teoria mocy w obwodach elektrycznych, 197-256
- [14] Fryze St.: *Moc rzeczywista, urojona i pozorna w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia*, Przegląd Elektrotechniczny, NR 7/1931, s.193-203
- [15] Budeanu C.I.: *Puissances reactives et fictives*, Institute Romain de l'Energie, Bucharest, 1927
- [16] Inveited paper: *Tutorials from International School on Nonsinusoidal Currents and Compensation*, Przegląd Elektrotechniczny, NR6/2010 s.1-56.
- [17] Czarnecki L.S. Haley P.M.: *Currents' Physical Components (CPC) In Four-Wire Systems with Nonsinusoidal Symmetrical Voltage*, Przegląd Elektrotechniczny, R.91 NR 6/2015, s.48-53
- [18] Staud V.: *Fryze-Buchholtz-Depenbrock: Uniwersalna teoria mocy w dziedzinie czasu*, Przegląd Elektrotechniczny, R.84, NR 6/2008, s.1-11
- [19] Kuster N.L., Moore W.J.M.: *On the Definition of Reactive Power under Non-sinusoidal Condition*, IEEE Trans. Pow. Appl. Systems, PAS-99, 1980, No.3 1845-1854
- [20] Czarnecki L.S.: *Critical Comments on the Conservative Power Theory (CPT)*, Przegląd Elektrotechniczny, R.93 NR 1/2017, s. 268-274