

doi:10.15199/48.2020.02.24

Mieszany warunek brzegowy Dirichleta i Neumanna w metodzie rozdzielania zmiennych

Streszczenie. Rozpatrzono trzy metody uwzględniania mieszanego warunku Dirichleta i Neumanna występującego na brzegu stałej współrzędnej w metodzie rozdzielania zmiennych: metodę rozwinięcia w szereg (uogólnienie tej, która jest stosowana w przypadku warunku jednorodnego), metodę polegającą na przekształceniu otrzymanych szeregów i metodę kolokacji. Wskazano na specyficzne problemy na przykładzie prostego zagadnienia dotyczącego pola przepływowego.

Abstract. Three methods of considering the mixed Dirichlet and Neumann boundary condition in the method of separation of variables were considered: the method of expansion into series (generalization of the one that is used in the case of a homogeneous condition), the method of transforming the obtained series and the method of collocation. Specific problems are indicated on the example of a simple electroconductive field problem. (Mixed Dirichlet and Neumann boundary condition in the method of separation of variables).

Słowa kluczowe: Mieszany warunek Dirichleta i Neumanna; metoda rozdzielania zmiennych; metoda kolokacji.

Keywords: Mixed Dirichlet-Neumann boundary condition; method of separation of variables; collocation method.

Wstęp

Jedną z analitycznych metod stosowanych szeroko w analizie zagadnień polowych jest metoda rozdzielania zmiennych (MRZ). Chociaż jej zastosowanie ograniczone jest do obszarów o prostych kształtach, jak prostokąty, koła, sfery, jest ona bardzo użyteczna do uzyskania rozwiązania wyidealizowanych zagadnień. Fakt, że otrzymuje się zależność analityczną, pozwala na badanie rozwiązania w funkcji różnych parametrów zagadnienia, takich jak wymiary, wartości współczynników materiałowych czy wartości warunków brzegowych, co pozwala na często uchwycenie kluczowych zależności. Pomimo znacznych często uproszczeń przyjętych w celu uzyskania rozwiązania w postaci zwartej wzoru rozwiązanie takie jest bardzo pożądane i stanowi istotny punkt odniesienia podczas analizy danego problemu z uwzględnieniem bardziej realistycznych założeń.

Do uzyskania jednoznacznego rozwiązania równania różniczkowego opisującego zagadnienie polowe konieczne jest zadanie warunków brzegowych. Jednak nie oznacza to jeszcze, że uda się wyznaczyć analitycznie wszystkie stałe całkowania. Aby zastosowanie MRZ było możliwe, muszą być spełnione pewne warunki:

- 1) rozpatrywane równanie musi pozwalać na rozdzielanie zmiennych w przyjętym układzie współrzędnych – nie zawsze jest to możliwe, np. równanie Helmholtza ma postać uniemożliwiającą rozdzielanie zmiennych w układzie dwubiegunowym;
- 2) na brzegach rozpatrywanego obszaru jedna ze współrzędnych powinna być stała; matematycznie rzecz biorąc, najlepiej jest, jeśli w danym układzie współrzędnych obszar jest kostką, np. prostokątem w układzie współrzędnych kartezjańskich, kołem lub pierścieniem kołowym lub jego wycinkiem w układzie biegunowym itp.;
- 3) na danym fragmencie brzegu o stałej współrzędnej powinien być zadany warunek brzegowy tego samego rodzaju (np. na brzegu $x = 0$ warunek Dirichleta lub Neumanna; jeśli na części takiego brzegu zadano warunek Dirichleta, a na drugiej – warunek Neumanna, to prowadzi to do kłopotów obliczeniowych [1,2]). Praca dotyczy właśnie tego aspektu.

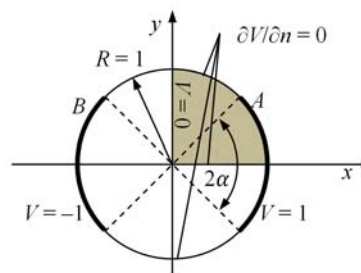
Czasami powyższe ograniczenia mogą być nieco osłabione, jak pokazano np. w pracach [3-6]. Jednak w wielu przypadkach występują trudności matematyczne, które uniemożliwiają pełne wykorzystanie potencjału MRZ. W pracy na prostym przykładzie wskazano na kłopoty

pojawiając się w przypadku, gdy na fragmencie brzegu będącego powierzchnią stałej współrzędnej zadano warunek Dirichleta (wartość poszukiwanej funkcji), a na dopełniającym fragmencie tej powierzchni brzegowej – warunek Neumanna (wartość pochodnej poszukiwanej funkcji). W literaturze można znaleźć kilka metod stosowanych w rozpatrywanym przypadku, np. [7-10].

Określenie problemu

Dla ustalenia uwagi rozpatrzono proste akademickie zagadnienie z zakresu pola przepływowego. Dana jest kołowa płytko o stałej grubości i konduktywności elektrycznej umieszczona w środowisku nieprzewodzącym. Do jej przeciwległych części ściany bocznej przyłożono symetrycznie dwie elektrody umożliwiające doprowadzenie i odprowadzenie prądu. Każda elektroda obejmuje brzeg o kącie rozwarcia 2α . Wychodząc z równań pola przepływowego otrzymuje się równanie Laplace'a dla potencjału V w obszarze płytki Ω . Na elektrodach zadany jest zerowy warunek Dirichleta $V = \pm U$. Na pozostałych fragmentach brzegu zadany jest zerowy warunek Neumanna wynikający z braku przepływu prądu przez te powierzchnie brzegowe. Bez zmniejszania ogólności przyjęto, że płytko ma promień równy 1, a potencjał elektrod wynosi ± 1 (co można zawsze uczynić stosując wymiary i wielkości względne). W tak przyjętym układzie współrzędnych zagadnienie przyjmuje postać równań:

$$(1) \quad \begin{cases} \nabla^2 V(P) = 0 & P \in \Omega, \\ V(P) = +1 & P \in A, \\ V(P) = -1 & P \in B, \\ \frac{\partial V}{\partial n} = 0 & P \in S \setminus (A \cup B). \end{cases}$$



Rys. 1. Widok obszaru obliczeniowego

Rozwiązanie ogólne

Ze względu na symetrię można rozpatrywać jedynie wycinek koła znajdujący się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych (zacięnięty fragment na rysunku 1). Na linii $x = 0$ musi zachodzić $V = 0$, a na linii $y = 0$ $dV/dn = 0$. Spełnienie równania Laplace'a w obszarze płytki, skończona wartość potencjału oraz symetria względem osi Ox i Oy wymagają, aby rozwiązanie miało następującą postać

$$(2) \quad V(r, \varphi) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} v_n r^n \cos n\varphi$$

gdzie v_n są nieznanymi współczynnikami, przy czym występują tylko nieparzyste harmoniczne przestrzenne. Ich wartości wynikają z niewykorzystanych jeszcze warunków na brzegu $r = 1$, tj. na brzegu z mieszanym warunkiem Dirichleta i Neumanna. Tutaj właśnie pojawiają się kłopoty ze znalezieniem wartości tych współczynników.

Rozwiązanie dla warunku Neumanna

Gdyby na elektrodach A i B zadano warunek Neumanna, dalsza procedura byłaby banalna. Postępowanie to zostanie tutaj krótko przytoczone po to, aby pokazać później, dlaczego w przypadku warunku mieszanego powstaje kłopot. Niech więc na brzegu $r = 1$ zadany jest warunek Neumanna $dV/dn = q(\varphi)$, gdzie q jest znaną funkcją. Oblicza się

$$(3) \quad \frac{\partial V}{\partial r}(r=1, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} n v_n \cos n\varphi$$

a funkcję $q(\varphi)$ rozwija się w szereg Fouriera

$$(4) \quad q(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos n\varphi$$

Przyrównując obydwa wyrażenia, dostaje się $v_n^N = q_n/n$, gdzie górnym indeksem N zaznaczono, że jest to wzór dotyczący przypadku z zadaniem warunkiem Neumanna. Współczynniki rozwinięcia q_n oblicza się jako

$$(5) \quad q_n = \frac{(q, \cos n\varphi)}{\|\cos n\varphi\|^2}$$

gdzie zapis (g, h) oznacza iloczyn skalarny funkcji g i h na przedziale $[0, \pi/2]$, a $\|g\|$ jest normą funkcji g w tym przedziale:

$$(6) \quad (g, h) \equiv \int_0^{\pi/2} g(\varphi)h(\varphi) d\varphi, \quad \|g\|^2 \equiv (g, g)$$

W rozpatrywanym przypadku ze względu na symetrię musi być $q(-\varphi) = q(\varphi)$ oraz $q(\pi - \varphi) = -q(\varphi)$. Prowadzi to do zależności

$$(7) \quad v_n^N = \frac{4}{n\pi} \int_0^{\alpha} q(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Uwzględniono przy tym fakt, że $q(\varphi) = 0$ poza elektrodami. O ile tylko $q(\varphi)$ spełnia warunki rozwijalności w szereg Fouriera, procedura ta pozwala na wyznaczenie dowolnego v_n^N w sposób w pełni analityczny.

Przypadek z warunkiem mieszanym

Wróćmy do przypadku z warunkami Dirichleta na elektrodach. Na brzegu $r = 1$ zadany jest zatem mieszany

warunek Neumanna i Dirichleta. W pracy [3] zaproponowano podejście polegające na uogólnieniu przedstawionego wyżej postępowania. W tym celu definiuje się pomocniczą funkcję związaną z zerowym warunkiem Neumanna na brzegu $r = 1$ poza elektrodami:

$$(8) \quad p(\varphi) = \begin{cases} V'_r(1, \varphi) & \text{dla } \varphi \leq \alpha, \\ 0 & \text{dla } \varphi > \alpha. \end{cases}$$

przy czym ze względu na symetrię rozpatruje się zacięniętą na rysunku 1 ćwiartkę płytki. Funkcję tę rozwija się w szereg Fouriera

$$(9) \quad p(\varphi) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} p_n \cos n\varphi$$

i przyrównuje do wyrażenia (3), otrzymując $p_n = n v_n$, przy czym

$$(10) \quad p_n = \frac{(p, \cos n\varphi)}{\|\cos n\varphi\|^2} = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} v_k^D D_{nk}$$

gdzie górny indeks D symbolizuje przypadek z warunkiem Dirichleta, natomiast

$$(11) \quad D_{nk} = \frac{(\cos k\varphi, \cos n\varphi)_{[0, \alpha]}}{\|\cos n\varphi\|^2} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(k+n)\alpha}{k+n} + \frac{\sin(k-n)\alpha}{k-n} \right]$$

przy czym dla $k = n$ należy wziąć odpowiednią granicę. Stąd uwzględniając $p_n = n v_n^D$, trzymuje się zależność

$$(12) \quad n v_n^D = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} k v_k^D D_{nk}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

W ten sposób uwzględniono zerowy warunek Neumanna, ale nie uwzględniono jeszcze warunku Dirichleta na elektrodach. Postępuje się zatem znowu podobnie. Definiuje się pomocniczą funkcję:

$$(13) \quad u(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \varphi \leq \alpha, \\ V(1, \varphi) & \text{dla } \varphi > \alpha, \end{cases}$$

którą rozwija się w szereg Fouriera $u_1 \cos \varphi + u_3 \cos 3\varphi + u_5 \cos 5\varphi + \dots$, a następnie przyrównuje do $V(1, \varphi)$, otrzymując równość $v_n^D = u_n$. Współczynniki u_n wynoszą

$$(14) \quad u_n = \frac{(u, \cos n\varphi)}{\|\cos n\varphi\|^2} = C_n + \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} C_{nk} v_k^D$$

gdzie

$$(15) \quad C_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\alpha} \cos n\varphi d\varphi = \frac{4}{n\pi} \sin n\alpha, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$(16) \quad C_{nk} = \frac{(\cos k\varphi, \cos n\varphi)_{[\alpha, \pi/2]}}{\|\cos n\varphi\|^2} = \delta_{nk} - D_{nk}$$

gdzie δ_{nk} jest deltą Kroneckera. Wtedy równanie $v_n = u_n$ prowadzi do zależności

$$(17) \quad \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} D_{nk} v_k^D = C_n, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Aby spełnić wymagane warunki brzegowe, konieczne jest spełnienie równości (12) oraz (17). Czy jest to jednak możliwe? Najpierw przeanalizujemy przypadek, kiedy $\alpha = \pi/2$, co de facto oznacza zadanie na całym brzegu $r = 1$ warunku Dirichleta. Wtedy $D_{nk} = \delta_{nk}$ i równanie (12) jest tożsamościowo spełnione, a równanie (17) daje $v_n^D = C_n$. Rozwiązanie zatem istnieje przynajmniej dla $\alpha = \pi/2$, choć występuje wtedy skok potencjału dla $r = 1$ i $\varphi = \pm \pi/2$.

Rozpatrzmy teraz przypadek dowolnej wartości α . Równania (12) i (17) można zapisać w postaci macierzowej. W tym celu wprowadźmy wektory kolumnowe v_D i C , których elementami są współczynniki odpowiednio v_n^D i C_n . Wprowadźmy także macierz D o elementach D_{nk} oraz macierz E o elementach $(k/n)D_{nk}$. Równania (12) i (18) w zapisie macierzowym przyjmują postać

$$(18) \quad v_D = E v_D, \quad D v_D = C$$

Gdyby rozpatrywane macierze były skończenie wymiarowe, powyższe zagadnienie miałoby rozwiązanie tylko wówczas, jeżeli E byłaby macierzą jednostkową. Wydaje się zatem, że rozwiązanie nie istnieje z powodu postaci macierzy E , która jednostkowa nie jest. Wyobraźmy sobie jednak, że na elektrodzie A zadano taki warunek Dirichleta, jaki wynika z wartości $V(r, \varphi)$ danej wzorem (2) przy współczynnikach v_n określonych wzorem (7), tzn. zamiast wzoru (13) byłby

$$(19) \quad u(\varphi) = \begin{cases} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} v_n^N \cos n\varphi & \text{dla } \varphi \leq \alpha, \\ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} v_n^D \cos n\varphi & \text{dla } \varphi > \alpha, \end{cases}$$

W takim przypadku wektor C miałby postać $D v_N$, a drugie z równań (18) przyjęłoby postać $D v_D = D v_N$. O ile tylko macierz D jest odwracalna, dochodzi się do wniosku że $v_D = v_N$, czyli tak jak być powinno. Przynajmniej więc w tym przypadku rozwiązanie istnieje. Tak więc wydaje się, że przynajmniej w niektórych przypadkach współczynniki v_D powinno dać się wyznaczyć. Ponieważ współczynniki D_{kn} nie zależą od wartości potencjału na elektrodzie A, to również macierze E i D od niego nie zależą. Zatem wydaje się że pomimo tego, iż E nie jest macierzą jednostkową, rozwiązanie równań (18) istnieje.

Powyższe rozważania wskazują, że rozwiązanie zagadnienia istnieje. Przybliżona postać rozwiązania zostanie wyznaczona przy założeniu, że współczynniki v_n^D maleją wraz ze wzrostem n , przynajmniej począwszy od pewnego n . Pomijając współczynniki dla $N > 0$, nieskończone macierze obcina się tak, aby powstała pewna liczba równań $M < N$ wynikająca z równania (13) i pozostała liczba $N - M$ równań wg równania (17). Racjonalne wydaje się przyjęcie $M = \lceil N/2 \rceil$. Otrzymuje się wtedy następujący układ równań:

$$(20) \quad \begin{bmatrix} (E - I)_{M \times N} \\ D_{(N-M) \times N} \end{bmatrix} v_{N \times 1}^D = \begin{bmatrix} 0_{M \times 1} \\ C_{(N-M) \times 1} \end{bmatrix}$$

Inna metoda polega na utworzeniu z równań (18) jednego równania, np.

$$(21) \quad \begin{aligned} DE v_D &= C \\ (E - I + D) v_D &= C \\ (I - E + DE) v_D &= C \end{aligned}$$

i wiele innych. Następnie obcina wymiary macierzy do N i rozwiązuje powstały układ równań. Należy tutaj zwrócić uwagę, że w ogólności obcięta macierz DE nie jest równa

iloczynowi obciętych macierzy D i E , a więc nie poleca się tych postaci równań, które zawierają iloczyny macierzy nieskończenie wymiarowych. Najbardziej wskazane z równań (21) jest więc drugie.

Jeszcze inny sposób polega na wykorzystaniu metody kolokacji. Obiera się N punktów na brzegu z mieszanym warunkiem. Niech punkty te mają współrzędne biegunowe $(1, \varphi_n)$. Następnie układa się równania:

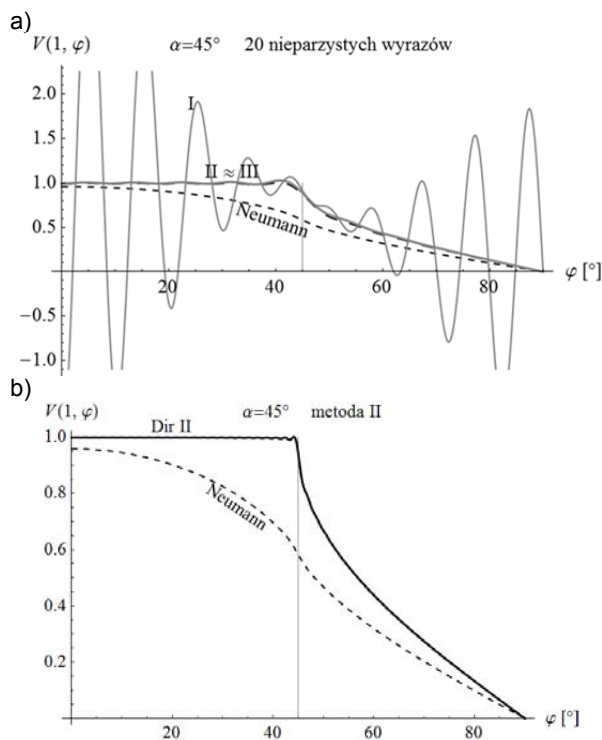
$$(22) \quad \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} v_k^D \cos k\varphi_n = 1 \quad \text{gdy } 0 < \varphi_n \leq \alpha$$

$$(23) \quad \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} k v_k^D \cos k\varphi_n = 0 \quad \text{gdy } \alpha < \varphi_n < \frac{\pi}{2}$$

Następnie szeregi obcina się do N wyrazów najniższego rzędu, a powstały układ równań rozwiązuje ze względu na współczynniki v_k^D . Ten sposób jest najprostszy, gdyż nie wymaga obliczania całek.

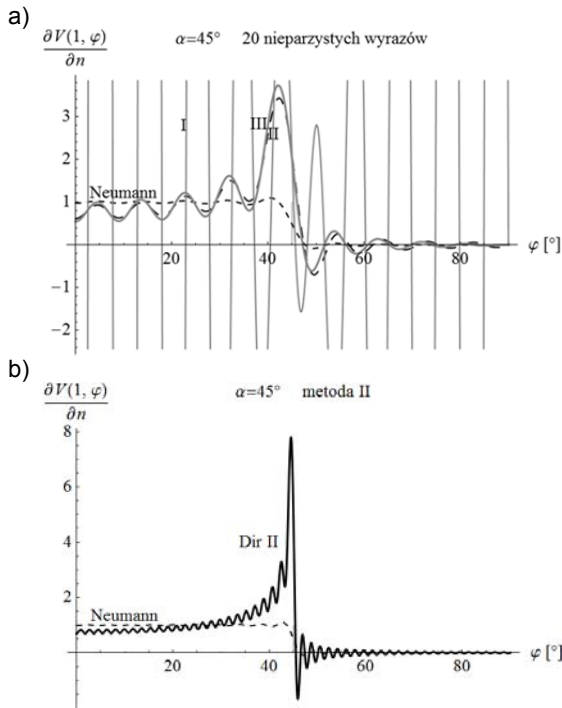
Wyniki i dyskusja

Na podstawie powyższych rozważań wykonano obliczenia numeryczne trzema metodami wyznaczania współczynników v_n^D : metodą I przedstawioną wzorem (20), metodą II przedstawioną wzorem (21) pozycja 2, metodą III (kolokacji) wg wzorów (22)-(23). Na rysunku 2a pokazano wykres potencjału $V(1, \varphi)$ uzyskany rozpatrywany metodami dla $\alpha = \pi/4$ z uwzględnieniem 20 wyrazów o nieparzystych indeksach. Najgorzej wypada metoda I, która prowadzi do bardzo źle uwarunkowanej macierzy i bardzo dużych błędów w rozwiązaniu (nie pomaga tu nawet metoda SVD). Metody II i III dają zbliżone rozwiązania. Rysunek 2b przedstawia wykres $V(1, \varphi)$ uzyskanego metodą II przy 100 nieparzystych wyrazach. Potwierdza on poprawność metody.



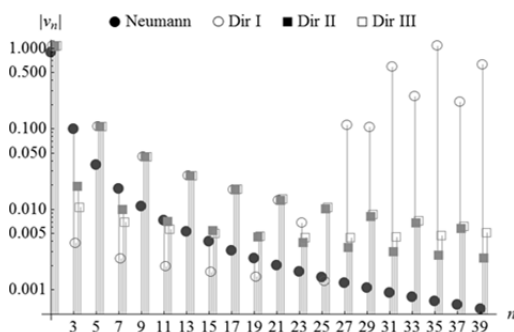
Rys. 2. Wykres potencjału na brzegu $r = 1$: a) dla rozpatrywanych metod przy uwzględnieniu 20 nieparzystych wyrazów, b) dla metody II przy uwzględnieniu 100 nieparzystych wyrazów (zaznaczono także rozwiązanie z warunkiem Neumanna)

Na rysunku 3a pokazano wykres pochodnej dV/dr na rozpatrywanym brzegu dla 20 wyrazów, a na rysunku 3b - dla metody II przy 100 wyrazach o nieparzystych indeksach. Jak w przypadku potencjału, metoda I zawodzi zupełnie, ale metody II i III dają zbliżone wyniki. Uwagę przyciągają oscylacje, które nie zanikają nawet dla dużej liczby uwzględnionych wyrazów (efekt Gibbsa). Jest to związane ze skokiem pochodnej na krańcu elektrody w punkcie styku warunku Neumanna i Dirichleta.



Rys. 3. Wykres pochodnej normalnej potencjału na brzegu $r = 1$: a) dla rozpatrywanych metod przy uwzględnieniu 20 nieparzystych wyrazów, b) dla metody II przy uwzględnieniu 100 nieparzystych wyrazów (zaznaczono także rozwiązanie z warunkiem Neumanna)

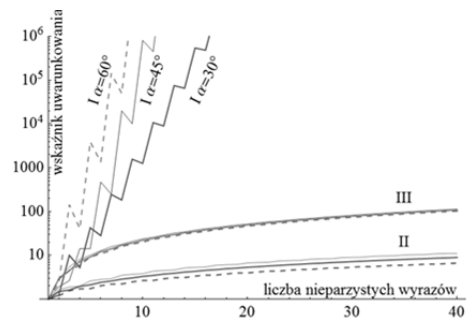
Na rysunku 4 porównano spektrum wartości bezwzględnych współczynników v_n^D uzyskanych rozpatrywanymi metodami i dodatkowo v_n^N . Duże wartości tych współczynników uzyskane metodą I wynikają z błędów numerycznych. Metody II i III dają zbliżone wartości współczynników, ale nie jednakowe.



Rys. 4. Porównanie spektrum współczynników rozwiązania uzyskane rozpatrywanymi metodami; zaznaczono także spektrum dla przypadku z warunkiem Neumanna

Na rysunku 5 pokazano zależność wskaźnika uwarunkowania macierzy głównej w każdej z trzech metod (rozumianego jako iloraz maksymalnej i minimalnej wartości

osobliwej). Metoda I daje bardzo źle uwarunkowany układ równań, natomiast metody II i III są porównywalne, choć metoda II daje układ równań lepiej uwarunkowany.



Rys. 5. Porównanie wskaźników uwarunkowania macierzy głównej układu równań na współczynniki rozwiązania

Wnioski

Mieszany warunek Dirichleta-Neumanna w przypadku metody rozdzielania zmiennych sprawia kłopoty i wymaga numerycznego wyznaczania współczynników rozwiązania. Najprostsza w realizacji jest metoda kolokacji, chociaż wydaje się, że w rozpatrywanym przypadku metoda II daje nieco dokładniejsze wyniki. Jednak nie zawsze tak jest, jak pokazano w pracy [10].

Autorzy: dr hab. inż. Paweł Jabłoński, Politechnika Częstochowska, Instytut Optoelektroniki i Systemów Pomiarowych, al. Armii Krajowej 17, 42-201 Częstochowa, E-mail: p.jablonski@el.pcz.pl.

LITERATURA

- [1] Repin S., Sauter S., Smolianski A., A posteriori error estimation for the Poisson equation with mixed Dirichlet/Neumann boundary conditions, *J. Comput. and Applied Math.* 164-165 (2004), 601-612.
- [2] Jakobson D., Levitin M., Nadirashvili N., Polterovich I., Spectral problems with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions: Isospectrality and beyond, *J. Comput. and Appl. Math.* 194, (2006), 141-155.
- [3] Read W.W., Series solutions for Laplace's equation with nonhomogeneous mixed boundary conditions and irregular boundaries, *Mathl. Comput. Modelling* 17 (1993), 12, 9-19.
- [4] Read W.W., A comparison of analytic series method for Laplacian free boundary problems, *Mathl. Comput. Modelling* 20 (1994), 12, 31-44.
- [5] Li P., Stagnitti F., Uren N.F., Analytical solution for finite domain Laplacian equation with coexistent boundary conditions, *Mathl. Comput. Modelling* 25 (1997), 10, 29-45.
- [6] Read W.W., An analytic series method for Laplacian problems with mixed boundary conditions, *J. Comput. and Applied Math.* 209 (2007), 22-32.
- [7] Balsim I., Neimark M.A., Rumschitzki D.S., Harmonic solutions of a mixed boundary problem arising in the modeling of macromolecular transport into vessel walls, *Computers and Math. with Applications* 59 (2019), 1897-1908.
- [8] Krenev L.I., Tokovyy Y.V., Aizikovich S.M., Seleznev N.M., Gorokhov S.V., A numerical-analytical solution to the mixed boundary-value problem of the heat-conduction theory for arbitrarily inhomogeneous coatings, *Int. J. Thermal Sci.* 107 (2016), 56-65.
- [9] Krenev L.I., Aizikovich S.M., Tokovyy Y.V., Wang Y.Ch., Axisymmetric problem on the indentation of a hot circular punch into an arbitrarily nonhomogeneous half-space, *Int. J. Solids and Struct.* 59 (2015), 18-28.
- [10] Jabłoński P., Approaches to mixed Dirichlet-Neumann boundary condition in the method of separation of variables, XXIX Sympozjum Środowiskowe PTZE, 9-12 czerwca 2019, Janów Podlaski.